DVA DNI S DIDAKTIKOU MATEMATIKY 2018

ZBORNÍK PRÍSPEVKOV

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVA
BRATISLAVA, 6. – 7. 9. 2018

ORGANIZÁTOR

ODDELENIE DIDAKTIKY MATEMATIKY
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

PROGRAMOVÝ A ORGANIZAČNÝ VÝBOR

MÁRIA SLAVÍČKOVÁ
MONIKA DILLINGEROVÁ
MICHAELA VARGOVÁ
PETER VANKÚŠ

EDITOR

MÁRIA SLAVÍČKOVÁ

Táto publikácia neprešla jazykovou úpravou. Príspevky neboli recenzované. Za obsahovú náplň príspevkov a ich jazykovú stránku zodpovedajú autori.

Vyšlo v roku 2018

ISBN 978 – 80 – 8147 – 087 – 5

OBSAH

POZVANÉ PREDNÁŠKY

PRÍSPEVKY ÚČASTNÍKOV

Milé kolegyne, milí kolegovia,

Tretí ročník konferencie Dva dni s didaktikou matematiky bol síce o niečo chudobnejší čo sa počtu účastníkov týka, no o obsahovej náplni sa to určite povedať nedá. Zazneli veľmi zaujímavé príspevky, zúčastnili sme sa podnetných pracovných dielní, zapojili sme sa do vždy emotívnej panelovej diskusie a príjemne sme sa porozprávali na neformálnej časti konferencie. Rada by som verila, že naša snaha o vytvorenie aktívnej komunity učiteľov a učiteliek matematiky, ktorí sa každoročne stretávajú na akademickej pôde a zdieľajú medzi sebou nápady, podnety, osvedčené praktiky, ktoré sa v triedach ukázali ako tie, ktoré našich súčasných žiakov oslovujú, ktoré ich motivujú a vedú k lepším výsledkom, nie je márna. Že sa nebudete báť prezentovať Vašu prácu (aj keď ju považujete možno za nezaujímavú pre ostatných), že sa zapojíte do diskusií, nebudete sa ostýchať opýtať sa a celkovo prispejete k priateľskej atmosfére konferencie.

Som nesmierne rada, že konferencia má svoje „účastnícke stálice“ a tiež, že na každom ročníku vidno aj nové tváre. Je to pre nás, ako organizátorov, naozaj povzbudivé a o to s väčšou radosťou a nasadením sa pustíme do prípravy štvrtého ročníka našej konferencie.

Dúfam, že príspevky, ktoré sú uverejnené v zborníku príspevkov Vám pomôžu si niektoré príspevky pripomenúť, alebo sa dozviete niečo o príspevkoch, na ktorých ste sa nemohli zúčastniť. Nebojte sa osloviť autorov, ak Vás ich príspevok zaujal, alebo by ste chceli vyskúšať niečo z toho, čo robili.

Neostáva, len pevne dúfať, že prvý septembrový týždeň sa nebude spájať len so začiatkom školského roka, celému jeho zabezpečeniu, ale aj s našou konferenciou, na ktorú prídete načerpať podnety do ďalšej tvorivej práce, prídete sa podeliť o vlastné skúsenosti a najmä, upevníte staré priateľstvá ale aj vytvoríte nové.

Za programový a organizačný výbor

Mária Slavíčková

CHYBY, OMYLY A MATEMATIKA

KUŘINA FRANTIŠEK

Na úvod

Problematika chyb ve školské matematice je kardinální otázkou pojetí vzdělávání. Je-li vyučování matematice pouhé předávání poznatků formou výkladu či přednášky, musí se vyučující snažit jakýchkoliv chyb se vyvarovat – aby nešířil nesprávné informace. Každá chyba žáků pak musí být potrestána, neboť se „správnou vědu“ nenaučili. Má-li ovšem mít vyučování aspoň zčásti charakter poznávacího procesu, jsou omyly přirozenými milníky na této cestě, neboť ukazují směry hledání a umožňují nalézání správných výsledků. Vyučování matematice se tak realizuje mezi póly:

CHYBO, BUDIŽ PROKLETA — CHYBO, BUDIŽ VÍTÁNA.

Dostupnosť článku/prednášky

Celý text bol publikovaný v časopise Matematika, fyzika, informatika a je dostupný na adrese: http://mfi.upol.cz/files/26/2603/mfi_2603_174_184.pdf

Prof. RNDr. František Kuřina, CSc.
Univerzita Hradec Králové
Rokitanského 62
CZ – 50 002
e-mail: kurinovi@gmail.com

ŠTATISTIKA V PEDAGOGICKOM VÝSKUME I VO VZDELÁVANÍ

ĽUBOMÍR RYBANSKÝ

V súčasnosti sa štatistika a spracovanie informácií dostáva čoraz viac do povedomia nielen u ľudí pracujúcich vo vede a výskume, ale i širokej verejnosti. Svoje miesto má i v pedagogickom výskume a vo vzdelávaní, kde je najčastejšie využívaná na analyzovanie výsledkov rôznych testovaní. Známe sú rôzne medzinárodné štúdie (PISA, TIMSS, PIRLS, TALIS a iné), ktoré okrem iného umožňujú porovnávať dosiahnuté výsledky študentov, prostredníctvom testov v rôznych vzdelávacích systémoch a získané výsledky využiť pri navrhovaní efektívnej vzdelávacej politiky. O niečo podobné - skvalitnenie výchovno-vzdelávacieho procesu sa snažia dennodenne aj učitelia v triedach. V prvom prípade sa využívajú dáta získané z testových zošitov, dotazníkov určených žiakom, učiteľom a školám. Získané dáta sa analyzujú pokročilými štatistickými metódami ako napríklad IRT (Item Response Theory) resp. rôzne IRT modely. Tieto modely okrem splnenia iných predpokladov vyžadujú pomerne veľké výberové súbory, takže pri analýze výsledkov písomnej práce v triede sú sotva použiteľné. Je teda namieste otázka, ako premeniť dostupné informácie o výsledkoch písomných prác, domácich úloh a podobne na zistenia a návrhy vhodných výučbových postupov. Ako príklad môže poslúžiť základná škola v South Avondale v Cincinnati v štáte Ohio, ktorá bola jednou z najhorších škôl v meste. Napriek tomu, že výsledky sa monitorovali prostredníctvom špecializovaného softvéru a učitelia dostávali pravidelné správy a tabuľky s výsledkami žiakov, tak zlepšenie výsledkov žiakov neprichádzalo. Zlepšenie nastalo až potom, čo vedenie školy zriadilo kartotéku a učitelia ručne prepisovali výsledky žiakov spolu s otázkami na ktoré v písomkách odpovedali nesprávne na kartičky. Učitelia neboli už iba pasívnymi príjemcami údajov, ale aktívne s nimi pracovali, čo im umožnilo porozumieť údajom, zisťovať silnejšie a slabšie stránky žiakov a v neposlednom rade vnímať žiakov ako jednotlivcov.

Samotné testovanie je však prínosom i pre samotných žiakov, pretože je spôsobom ako prerušiť proces zabúdania. Samotný akt vyvolania z pamäte spôsobí, že si znalosť v budúcnosti lepšie vybavíme. Je tiež známe, že tréningom vybavovania (testovaním) sa učivo udrží v pamäti oveľa lepšie než opätovným vystavením sa učivu (opakovanie). Testovanie je tak účinnou pomôckou pri učení sa, dokonca jedným z najúčinnejších nástrojov.

RNDr Ľubomír Rybanský, PhD.
Katedra matematiky UKF Nitra,
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
e-mail: lrybansky@ukf.sk

REZY TELIES – ROZŠIRUJÚCE ÚLOHY

PATRÍCIA BARTSCHOVÁ

ABSTRAKT.V článku sa zaoberáme sadou úloh z rezov telies, ktoré sú rozširujúcimi zadaniami k zadaniam, ktoré sa nachádzajú v aktuálnych učebniciach. Sadu úloh sme sa snažili navrhnúť tak, aby u žiakov vzbudzovala záujem a dostatočne ich vnútorne motivovala, aby bola pomôckou pri rozvoji predstavivosti žiaka.

Stereometia, rezy telies

Stereometria je to oblasť matematiky, ktorá sa zaoberá geometriou (konštrukčnou, analytickou) trojrozmerného priestoru. Pod konštrukčnú geometriu patria rezy telies, tvorba siete, zobrazovanie telies, konštrukčné zostrojenie vzdialenosti bodov od priamky, roviny alebo uhla dvoch priamok (rovín). Pod analytickú geometriu patria výpočty objemu, povrchu, vzdialenosti bodu od roviny, priamky, uhla dvoch priamok alebo rovín.

Pod pojmom rez telesa si môžeme predstaviť jednoducho prienik roviny s telesom. Na to, aby sa rez dal zostrojiť musí byť rovina zadaná jednoznačne:

- troma nekolineárnymi bodmi
- priamkou a bodom neicidujúcim s touto priamkou
- dvoma rôznobežnými priamkami
- dvoma rôznymi rovnobežkami

Rezom telesa rovinou môže byť: n-uholník, úsečka, bod alebo prázdna množina.

Zavedenie pojmu rez telesa v našom ponímaní je pre nás dôležité z toho hľadiska, aby bolo zrejme čo od žiakov očakávame pri riešení našej sady úloh. Keďže na hodinách, kde sa učia rezy telies sa väčšinou objavujú dve definície toho čo rez telesa rovinou je a to, že rezom telesa je prienik roviny a telesa, pričom je to časť len na stenách z čoho usudzujeme, že teleso je tvorené len zo stien a je duté, pričom rez má len obvod a druhá definícia, ktorá sa často vyskytuje, že rezom telesa je prienik roviny a telesa, ktorým je mnohouholník aj s vnútrom, teda teleso je plné a výpočtom vieme zistiť akú plochu telesa zaberá rez.

Rozširujúce úlohy zo stereometria

Pri tvorbe sady úloh sme sa snažili nájsť časť stereometrie, v ktorej by sa dalo pokračovať, prípadne by sa dala rozšíriť o nové, náročnejšie verzie úloh, prípadne nadväzujúce úlohy na už existujúce. My sme sa zamerali na rozšírenie konštrukčnej časti stereometrie, konkrétne rezov telies. Navrhnutá sada[1] úloh pozostáva z piatich častí, ktoré obsahujú zadania zamerané na jednu problematiku. Jednotlivé časti sa dajú rozširovať o nové zadania, napríklad zmenou použitých telies, vyznačených prvkov atď. Naša sada úloh obsahuje tieto časti:

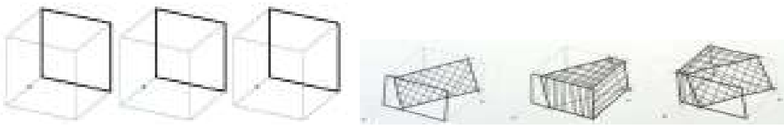
[1] Sada zadaní s rezmi telies: goo.gl/kVS8uP

1. Rez kocky jednou rovinou
2. Rez kocky viacerými rovinami
3. Rez kociek jednou rovinou
4. Množinové operácie na geometrických útvaroch
5. Pôdorys, rez pôdorysu a nárys

V nasledujúcom texte si priblížime každú z nich spolu s očakávaným riešením, ktoré by malo byť výsledkom riešenia. Každý obraz telesa má vyznačenú jednu stenu hrubšie ako sú ostatné steny. Táto stena je viditeľná pri pohľade spredu a slúži ako pomôcka pre jednoznačné určovanie viditeľnosti riešenia. Žiaci si pre zjednodušenie riešenia môžu dokresliť viditeľnosť.

1. Rez kocky jednou rovinou

S rezom kocky rovinou sa žiaci stretávajú v konštrukčnej alebo metrickej časti stereometrie, ak majú zostrojiť rez kocky roviny, zistiť veľkosť úsečky incidujúcej dvoma bodmi alebo ak majú zistiť vzdialenosť bodu od roviny či už konštrukčne, alebo výpočtom. Táto časť sady úloh slúži na precvičenie zostrojenia rezu kocky rovinou, ktorá je zadaná buď troma nekolineárnymi bodmi, bodom a priamkou, ktorá s ním neinciduje, alebo dvoma rôznobežnými priamkami. Naše zadania v tejto časti slúžia len na zopakovanie si rezu telesa, v našom prípade kocky, jednou rovinou. Sú zadávané obrazom kocky, v ktorom sú vyznačené prvky, ktorými sa rez má zostrojovať. Na ukážke zadania (Obr. 1) si povieme čo je úlohou žiaka pri riešení.

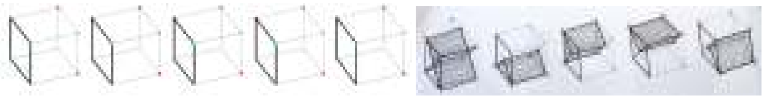


Obr. 1: Zadanie: Rez kocky jednou rovinou a ukážka žiackeho riešenia

Úlohou žiaka je do prvého obrazu kocky zakresliť rez kocky zadanou rovinou. Do zvyšných dvoch obrazov kocky má žiak zakresliť, na aké časti by sa rozpadla kocka, ak by sme ju reálne rezali danou rovinou. Rovnako pri zakresľovaní týchto časti po reze vyžadujeme riešenie viditeľnosti.

2. Rez kocky viacerými rovinami

Rez kocky dvoma rôznymi rovinami sa používa najčastejšie pri určovaní uhla dvoch mimobežiek alebo určenia vzdialenosti bodu od roviny či už konštrukčne alebo výpočtom. Táto časť sady úloh slúži na precvičenie zostrojenia rezu kocky dvoma rovinami, z ktorých je každá jedna zadaná buď troma nekolineárnymi bodmi, bodom a priamkou, ktorá s ním neinciduje, alebo dvoma rôznobežnými priamkami. Zadanie rovín je farebne odlíšené. Naše zadania v tejto časti slúžia len na zopakovanie si rezu telesa a riešenie viditeľnosti, v našom prípade kocky, dvoma rovinami. Zadávané sú obrazom kocky, v ktorom sú vyznačené prvky, ktorými sa rezy majú zostrojovať. Na ukážke zadania (Obr. 2) si povieme čo je úlohou žiaka pri riešení. Zadania sú odlišné s predchádzajúcou časťou v tom, že obsahujú päť rovnakých obrazov telies. A žiak má riešiť viditeľnosť pre všetky obrazy kocky.

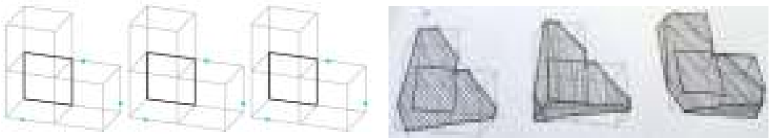


Obr. 2: Zadanie: Rez kocky dvoma rovinami a ukážka žiackeho riešenia.

Úlohou žiaka je do prvého obrazu kocky zakresliť rez kocky zadanými rovinami a správne v ňom vyriešiť viditeľnosť, ako sa tieto dve roviny prekrývajú. Do zvyšných štyroch obrazov kocky má žiak zakresliť na aké časti by sa rozpadla kocka, ak by sme ju reálne rezali danými rovinami. Rovnako ako v predchádzajúcej časti požadujeme od žiaka riešenie viditeľnosti.

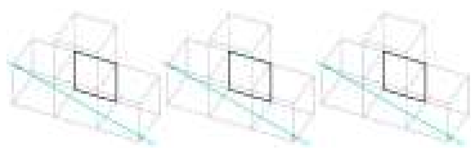
3. Rez kociek jednou rovinou

Rez jednoduchého telesa jednou rovinou je súčasťou stereometrie na vyššom sekundárnom vzdelávaní. Nami zadávané teleso je zložené z kociek tak, aby sa dve susedné kocky dotýkali vždy celou stenou. Všetky kocky na telese majú rovnakú dĺžku hrany. Táto časť sady pozostáva z dvadsiatich úloh, ktoré sú rozdelené na štyri menšie časti a to podľa uloženia kociek v kockovom telese. Naše zadania sú zadávané obrazom kockového telesa, v ktorom sú vyznačené prvky, ktorými sa rez má zostrojovať. Na ukážkach jednotlivých typov zadaní si vysvetlíme vzájomné rozdiely medzi nimi.



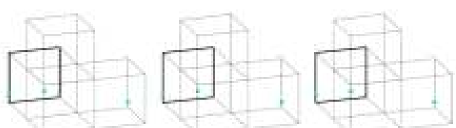
Obr. 3: Zadanie: Rez kockovým telesom jednou rovinou a ukážka žiackeho riešenia.

Úlohou žiaka je ako v predchádzajúcich častiach, do prvého obrazu telesa zakresliť rez kockového telesa zadanou rovinou. Do zvyšných dvoch obrazov kockového telesa má žiak zakresliť na aké časti by sa rozpadlo kockové teleso, ak by sme ho reálne rezali danou rovinou. Všetky telesá v zadaní tejto časti pozostávajú z troch kociek, pričom ich usporiadanie predstavuje nekonvexný trojrozmerný útvar (Obr. 3). Rovnako pri zakresľovaní časti po reze vyžadujeme riešenie viditeľnosti.



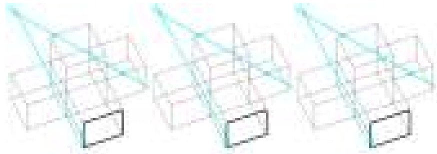
Obr. 4: Zadanie: Rez kockami jednou rovinou.

Nasledujúca časť piatich zadaní je pozmenená tak, že kockové teleso obsahuje štyri kocky, pričom ich usporiadanie opäť predstavuje nekonvexný trojrozmerný útvar. Ale kocky sú usporiadané v jednej vrstve.



Obr. 5: Zadanie: Rez kockami jednou rovinou.

Ďalšiu časť tvoria zadania, ktoré obsahujú rovnako štyri kocky, ale v dvoch vrstvách (Obr. 5).



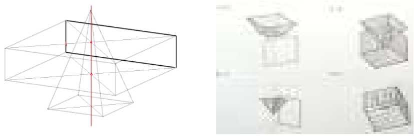
Obr. 6: Zadanie: Rez kockami jednou rovinou.

Posledná časť obsahuje rovnako päť zadaní a k predchádzajúcemu kockovému telesu sme pridali jednu kocku (Obr. 6).

4. Množinové operácie na geometrických útvaroch

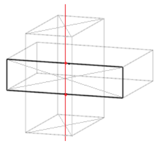
S množinami a množinovými operáciami sa žiaci stretávajú už na prvom stupni základnej školy, prevažne v slovných úlohách, neskôr na druhom stupni, kde si pri postupoch konštrukcií n-uholníkov zavádzajú pojem prienik alebo pri nerovniciach, kde riešením nerovnice môže byť zjednotenie intervalov. Na strednej škole sa žiaci stretávajú s množinovými operáciami na množinách a graficky ich prezentujú napríklad Vennovými diagramami, ktoré môžeme považovať za dvojrozmerné geometrické útvary. Táto časť sady úloh slúži na precvičenie základných množinových operácií spojených s grafickým znázorneným na trojrozmernom telese zloženom z dvoch jednoduchých telies, ktoré majú spoločnú množinu vnútorných bodov. Táto časť je rozdelená na dve menšie časti. A to vzhľadom na usporiadanie telies, v ktorom jedno úplne prechádza druhým telesom a keď jedno teleso prechádza len čiastočne druhým telesom. Každé zadanie pozostáva zo štyroch častí na riešenie: prieniku, zjednotenia, rozdielu telies a doplnku rozdielu telies (rozdiel v opačnom poradí).

V jednom zadaní je vždy rovnaká vzájomná poloha dvoch telies. V každom zadaní je zmenené jedno teleso.



Obr. 7: Zadanie: Množinové operácie na geometrických útvaroch a ukážka žiackeho riešenia.

Úlohou žiaka je zostrojiť viditeľnosť časti telesa tak, aby spĺňala požadovanú množinovú operáciu. Pre riešenie jednotlivých operácií žiak dostáva rôzne natočené teleso. Táto časť obsahuje šesť skupín zadaní pričom v každej skupine je každá z vyššie spomenutých operácií práve raz. Teleso je zložené z dvoch jednoduchých telies tak, že tieto telesa majú spoločnú os (Obr. 7) a žiaci majú vyznačené dva spoločné body týchto telies.



Obr. 8: Zadanie: Množinové operácie na geometrických útvaroch.

V druhej časti sa nachádzajú štyri skupiny zadaní, tak isto sa v každej nachádza každá z operácií, ktoré sme použili aj v predchádzajúcej časti s množinovými operáciami. Táto časť sa odlišuje tým, že telesá majú spoločnú os, pričom pre jedno teleso je osou prechádzajúca telesom a pre druhé teleso je stenovou osou (Obr. 8). Žiaci majú taktiež vyznačené dva spoločné body týchto telies.

5. Pôdorys, rez pôdorysu a nárys

Pojem pôdorys si žiaci osvojujú už na prvom stupni, kedy sa stretávajú s kockovými stavbami a ich kódovaním do pôdorysov príslušných stavieb. S nárysom sa žiaci majú možnosť stretnúť v siedmom ročníku. Ďalšie zadania sú na zakreslenie rezu v pôdoryse a nárys podľa tohto rezu. Rez pôdorysom je pre žiakov, ktorý neštudujú technický odbor zameraný na staviteľstvo, neznámy pojem. Táto časť sady úloh pozostáva zo štyroch typov zadaní. V prvej časti sa nachádza jedno zadanie a to na zakreslenie pôdorysu poschodia ich školy, kde sa nachádza učebňa, ktorú žiak navštevuje. V riešení očakávame aspoň naznačenie detailov poschodia, akými sú dvere, prípadne okná.

Obr. 9: Zadanie: Rez pôdorysom.

Druhá časť obsahuje jedenásť zadaní, v ktorých sú obrázky pôdorysov (Obr. 9), autorom pôdorysov je interiérová dizajnérka Alisa Lizarralde. Žiaci majú slovne zadané kadiaľ majú viesť rez, ktorý majú symbolicky podľa pokynov v pôdoryse zaznačiť. Tretia časť obsahuje päť zadaní, v ktorých majú žiaci nakresliť nárys tak, ako by videli situáciu, ak by sa odrezala časť pôdorysu z predchádzajúcej časti. Posledná časť s pôdorysmi, rezmi a ich nárysmi pozostáva z dvoch zadaní. Žiak má zadané prislúchajúce pôdorysy pre prvé a druhé podlažie rodinného domu (Obr. 9) a úlohou žiaka je zakreslenie takto zadaného domu zo štyroch svetových strán, pričom doriešenie správneho zakreslenia strechy nie je dôležité.

LITERATÚRA

[1] Kubáček, Z., *Matematika pre 1. ročník gymnázií – 2. časť*, Bratislava, SPN – Mladé letá, 2010, ISBN 978-80-10-01827-7, s. 151

[2] Kubáček, Z., *Matematika pre druhý ročník gymnázií – prvá časť*, Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana, 2009, ISBN 978-80-7158-983-9, s. 112

Patrícia Bartschová
FMFI UK, Mlynská Dolina F1
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: bartschova.patricia@gmail.com

METÓDY RIEŠENIA A HODNOTENIA OTVORENÝCH MATEMATICKÝCH PROBLÉMOV

KRISTÍNA BULKOVÁ, SOŇA ČERETKOVÁ

ABSTRAKT. *Otvorené matematické problémy, ako prostriedok objavného vyučovania, poskytujú žiakom využiť a rozširovať svoje matematické vedomosti prostredníctvom vlastného skúmania. Vzhľadom na ľubovoľný výber stratégie a rozmanitosť postupov v žiackych riešeniach nastáva problém v ich objektívnom hodnotení. Účastníci workshopu mali príležitosť riešiť vybrané úlohy z rôznych ročníkov tímovej matematickej súťaže Matematický B-deň. Ukážky obsahovali aj autentické riešenia žiakov, pomocou ktorých bola predstavená metodika hodnotenia problémov s otvorenou možnosťou stratégie riešenia.*

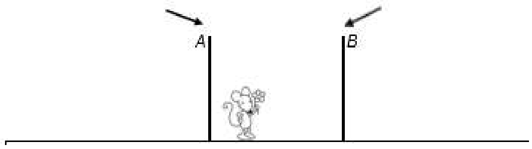
Na úvod o otvorených problémoch v matematike...

Všeobecne vo vyučovaní matematiky platí, že riešenie matematickej úlohy je činnosť, počas ktorej žiak aplikuje skôr naučené stratégie riešenia úloh. Úloha sa stáva problémom, ak riešiteľ nespozná riešiteľskú stratégiu okamžite, ale musí hľadať nové, dovtedy neznáme cesty k riešeniu. Slovne zadaný matematický problém predstavuje slovný opis situácie a úlohou riešiteľa je vytvoriť vhodnú odpoveď, ktorá predstavuje riešenie. Otvorený matematický problém je tak definovaný ako problém so, spravidla, otvorenou tvorbou odpovede, ktorá je neštandardná vzhľadom ku stratégiám riešenia matematických úloh a problémov osvojených na vyučovacích hodinách matematiky. Odpoveď, okrem podoby vypočítaného čísla, výrazu, predpisu funkcie, geometrickej konštrukcie a podobne, môže obsahovať i opis vlastností vytvoreného matematického modelu a riešiteľ môže ďalej argumentovať, odvodiť a dokázať rôzne, vybrané, atribúty riešenia.

Súťaž Matematický B-deň

Žiaci stredných škôl majú možnosť zapojiť sa na Slovensku do tímovej matematickej súťaže pre 3 – 4 členné tímy s názvom *Matematický B-deň*. Zadanie súťaže tvorí súvislý text v rozsahu 10 až 20 strán skomponovaný z gradovaných matematických úloh a vysvetľujúcich komentárov týkajúcich sa vybraného problému. Problém predstavuje reálnu situáciu, s ktorou sú žiaci na začiatku textu oboznámení. Postupným definovaním pojmov a riešením úvodných navádzajúcich úloh sa žiaci dostávajú hlbšie do problému a sú postupne nútení problémovú situáciu matematizovať. Otvorené matematické problémy v závere zadania vedú k originálnemu skúmaniu v matematike a k vytváraniu matematického modelu reálnej situácie.

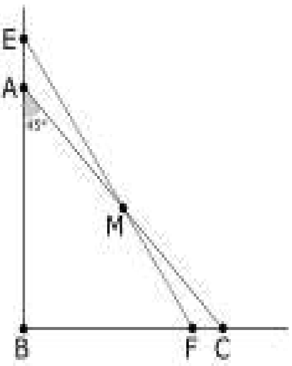
Ukážka 1: „*Použite dve zrkadlá (A a B) a myšku s kyticou v jednej labke, prípadne použite iný predmet, ktorý ma jednoznačne odlíšenú ľavú a pravú stranu. Nakreslite si obrázok myšky, ako ju vidíte v druhom zrkadle (Obr. 1), ... Zobrazte ďalšie virtuálne bunky (niekoľkokrát zopakované zrkadlové obrazy) s obrázkami myšiek!*“



Obrázok 1

Ukážka 2: „*Ak zložíme pásik papiera dvakrát na polovicu a potom ho spätne rozvinieme, vždy dostaneme štyri rovné časti pásika a vždy rovnaký počet ohybov (tri). Koľko rovných častí a koľko zákrut má model cesty, ak pásik papiera zložíme n-krát? (n=1,2,...)*“

Ukážka 3: „*Daný je rovnoramenný trojuholník ABC, bod M je stred strany AC. Bod F leží medzi vrcholmi B a C trojuholníka ABC vo vnútri strany BC. Priamka FM pretína priamku, na ktorej leží strana AB v bode E. Dokážte, že úsečka EF je dlhšia ako úsečka (strana trojuholníka) AC.*“ (Obr. 2)



Obrázok 2

Autentické riešenia žiakov

V priebehu siedmych hodín majú žiaci za úlohu zadanie súťaže *Matematický B-deň vyriešiť*, napísať podrobný opis svojich úvah a výsledky, ku ktorým sa dopracovali, zdôvodňovať matematickými argumentmi. Hodnoteným výstupom súťaže je jedna písomná správa za celý 3-4 členný tím.

Ako ukážku uvedieme riešenia

Riešenie 2-A: „*Rovných častí je $8=2^3$, pretože každým ohybom vznikajú 2 časti, teda 3 ohybmi vznikne 2*2*2 častí a to je 8. Zákrut je 8-1=7. Ak spojím pásik do kruhu, tak aby začiatočná rovná plocha s koncovou vytvorili záhyb, tak počet záhybov = počtu rovných plôch. Každý záhyb je tvorený práve 2 rovnými plochami a pri každej ploche sú 2 záhyby, teda každá plocha je pri záhyboch použitá 2-krát. Rozpojením kruhu zrušíme jeden záhyb a počet rovných plôch h je nezmenený. Tak počet záhybov v rozpojenom pásiku je počet rovných plôch-1 a to je v tomto prípade 7. Potom 2^n=počet rovných plôch a 2^n-1 = počet záhybov – rovnako ako sme odôvodnili pre tri ohnutia*."

Riešenie 2-B: „*Máme papierik, ktorý budeme ohýbať. Môžeme ho zohnúť doprava alebo doľava, čo si neskôr zaznačíme ako postup skladania pomocou malých písmen* r *a* l. *Po každom zložení dostaneme dvojnásobný počet rovných dielikov, pretože z každého rovného dieliku spravím 2 ďalšie, čo znamená, že ak papierik zložíme n-krát, dostaneme 2^n rôznych častí. Medzi týmito dielikmi nám vznikli ohyby, ktoré smerujú doprava alebo doľava. ... Po každom rovnom dieliku (okrem posledného) nasleduje 1 ohyb, čo znamená, že počet ohybov je o 1 menší ako počet rovných dielikov, t. j. 2^n-1.*"

Riešenie 2-C: „*Pri skladaní papierika na 3 razy sme využili variácie s opakovaním 2^3=8, čiže máme 8 kombinácii. ... Vzorec na výpočet počtu rovných častí (stien) je 2^n, kde n je počet zhybov. Vzorec na výpočet počtu zákrut je 2^n-1, kde n je počet zhybov*."

Hodnotenie žiackych riešení

Všetky tímy dospeli k správnemu riešeniu, avšak každý tím iným spôsobom. To, ktorý tím uviedol lepšie riešenie, nie je na prvý pohľad zrejmé, žiaci totiž k riešeniam pristupujú tvorivo.

Žiacke riešenia v súťaži hodnotí tím hodnotiteľov a žiaci sa výsledok dozvedajú približne šesť týždňov po uskutočnení súťaže. Hodnotitelia sa zameriavajú na jednotlivé aspekty schopností tvoriť, dokazovať či argumentovať v matematike. Hodnotenie je však často ovplyvnené subjektívnym náhľadom hodnotiteľa na preložené žiacke riešenia problému a tiež jeho vlastnými očakávaniami.

Vhodným prostriedkom hodnotenia písomných žiackych riešení otvorených matematických problémov predstavuje rubrika. Rubrika slúži ako hodnotiaca tabuľka vybraných aspektov, ktoré chceme v žiackych riešeniach pozorovať. Je dôležité si určiť a dôsledne popísať sledované aspekty v riešiteľskom postupe tak, aby zvolený hodnotiaci nástroj pomohol k objektívnemu hodnoteniu žiackych riešení otvorených matematických problémov.

MATEMATICKÉ KOMPETENCIE	
ÚROVEŇ	*POPIS VÝKONU ŽIAKA*
1.	Žiak vie spracovať informácie v zadaní a využiť dostupné pomôcky.
2.	Žiak využíva symbolické, formálne a technické vyjadrenia a ovláda základné matematické pojmy, fakty, tvrdenia a postupy.
3.	Žiak znázorňuje a popisuje matematické objekty, pracuje s vlastnosťami medzi nimi.
4.	Žiak vie vymedziť problém, stanoviť základnú otázku, zvoliť stratégiu a problém vyriešiť, využíva matematické myslenie a usudzovanie.
5.	Žiak využíva matematickú argumentáciu, vie skonštruovať dôkaz.
6.	Žiak vytvára matematický model.

Tabuľka 1: Rubrika pre hodnotenie matematických kompetencií

V našom výskume sa zameriavame na sledovanie kľúčových kompetencií žiakov v riešiteľskom postupe otvorených matematických problémov. Rubrika pre hodnotenie matematických kompetencií (Tab. 1) tvorí základ pre vytváranie ďalších rubrík pre ľubovoľné aspekty, ktoré chceme u žiakov pozorovať. Ako ukážku sme uviedli systém rubrík pre hodnotenie písomného prejavu žiakov v riešeniach otvorených matematických problémov.

Žiacke riešenie má mať formu súvislej písomnej správy, ktorá obsahuje originálne údaje, tabuľky a grafy, analýzu údajov a ich interpretáciu a to všetko zväčša spracované do matematického modelu. Pri hodnotení kvality písomných správ žiackych riešení sú sledované tri hlavné atribúty:

- **Obsah písomnej správy**: písomná správa musí zodpovedať zásade úplnosti, musí obsahovať všetky údaje a myšlienky riešiteľov, použité informácie musia byť relevantné k problému, text je plynulý, vety na seba nadväzujú a v texte sa nevyskytujú duplicitné pojmy, výrazy alebo myšlienky (príloha 1).
- **Matematická argumentácia**: správnej a logickej matematickej argumentácii v písomných žiackych riešeniach je kladená osobitá pozornosť, spolu s využívaním osvojenej vedeckej terminológie, ale aj spolu s narábaním s originálnymi pojmami, zavedenými riešiteľmi pre potrebu riešenia (príloha 2).
- **Jasnosť a čitateľnosť textu**: pri hodnotení jasnosti a čitateľnosti textu je potrebné brať do úvahy doteraz spomenuté zásady, ako plynulosť, úplnosť, správna terminológia, spolu s kompetenciou tvorivého písania. Hodnotenou je i podmienka pre súťažiacich: písať svoju písomnú správu tak, aby textu rozumel i čitateľ, ktorý zadanie súťaže (úloh a problémov) nepozná (príloha 3).

Záver

Matematický B-deň je tímová súťaž, prostredníctvom ktorej majú žiaci, ako i učitelia, možnosť získať nový pohľad na matematiku pomocou matematizovania reálnych situácií. Zúčastniť sa jej môžu tímy žiakov stredných škôl, ktorí majú záujem prežiť deň plný matematického skúmania a vzájomnej spolupráce.

Prejavené matematické kompetencie pomáhajú k objektívnemu hodnoteniu výkonu žiakov v písomných riešeniach. Vďaka rubrikám tak možno využívať vhodný hodnotiaci nástroj, ale pomocou nich je tiež možné formulovať i spätnú väzbu pre zúčastnených tímov žiakov a ich učiteľov.

LITERATÚRA

[1] Čeretková, S.: Objavné vyučovanie matematiky prostredníctvom úloh súťaže Matematický B-deň. In. Molnár, J. Peška, P. (eds.) Zvyšování kompetencí studentů DSP v oblasti didaktiky matematiky. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci. 2014, ISBN: 978-80-244-4353-9

[2] Brookhart, S. M. 2013. How to Create and Use Rubrics for Formative Assessment and Grading. Alexandria, Virginia, USA: ASCD, 2013. 162 s. ISBN 978-1-4166-1507-1.

[2] Matematický B-deň 2012: *(Cr)easy!* Dostupné na: http://www.primas.ukf.sk/download/bday/B-DAY_2012_SK_zadanie.pdf

[3] Matematický B-deň 2013: *Odrazy v zrkadlách*. Dostupné na: http://www.primas.ukf.sk/download/bday/Bday2013_zadanie.pdf

[4] Matematický B-deň 2015: *Za rohom....* Dostupné na: http://www.primas.ukf.sk/download/bday/Matematicky_B-den_2015_SK.pdf

Mgr. Kristína Bulková, doc. PaedDr. Soňa Čeretková, PhD.
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
SK – 949 74
e-mail: kristina.bulkova@ukf.sk, sceretkova@ukf.sk

PRÍLOHY

OBSAH ZÁVEREČNEJ SPRÁVY	
ÚROVEŇ	POPIS VÝKONU ŽIAKA
1.	Písomná správa nespĺňa kritériá pre špecifikáciu záverečnej správy. Použité informácie nie sú relevantné.
2.	Písomná správa nemá formu záverečnej správy. Väčšina informácii je relevantných, ale roztrúsených a nie úplne zrozumiteľných. Obrázky a tabuľky neslúžia pre podporu textu, sú len ilustračné.
3.	Písomná správa sa skladá z viacerých častí tvoriacich menšie záverečné správy, v rámci jedného zadania. Miestami využité obrázky a tabuľky nie sú správne označené a nie sú ani prehľadné.
4.	Písomná správa sa skladá z viacerých menších správ, ktoré na seba väčšinou nadväzujú. Celistvosť textu je narušená, pretože chýbajú dôležité prepájajúce detaily.
5.	Písomná správa má formu záverečnej správy, matematického súvislého textu. Celistvosť textu je iba mierne narušená, pretože chýbajú drobné detaily. Použité tabuľky, grafy či obrázky sú miestami neprehľadné.
6.	Písomná správa má formu súvislého matematického textu, informácie sú presné a relevantné. Využité obrázky, tabuľky sú prehľadné a správne označené.

Príloha č. 1: Rubrika pre hodnotenie obsahu záverečnej správy v písomnom žiackom riešení otvorených matematických problémov.

MATEMATICKÁ ARGUMENTÁCIA	
ÚROVEŇ	POPIS VÝKONU ŽIAKA
1.	Písomná správa pozostáva len z domnienok a úvah, je radou neštruktúrovaných údajov. V texte nie je vôbec využitá matematická terminológia.
2.	Písomná správa sa neopiera o existujúce fakty. Využíva základnú matematickú terminológiu ale matematická argumentácia absentuje alebo nie je jasná.
3.	Písomná správa obsahuje občasnú matematickú argumentáciu, avšak v rámci celého riešenia chýba matematické odôvodňovanie.
4.	Argumentácia sa opiera o informácie potrebné pre prácu s matematických textom. Použité zdôvodňovanie pripomína matematický dôkaz.
5.	Písomná správa obsahuje matematické dôkazy podporené matematickou argumentáciou, ale nie sú vysvetlené všetky prepojenia medzi jednotlivými bodmi správy alebo medzi zadaniami a riešeniami úloh.
6.	Výsledná písomná správa predstavuje súvislý text organizovaný v logickom slede. V písomnom prejave je plne využitá matematická argumentácia a matematické dôkazy.

Príloha č. 2: Rubrika pre hodnotenie matematickej argumentácie v písomnom žiackom riešení otvorených matematických problémov.

JASNOSŤ A ČITATEĽNOSŤ TEXU	
ÚROVEŇ	POPIS VÝKONU ŽIAKA
1.	Text nie je jasný, štylizácia a výber slov nie sú prijateľné. Čitateľ, ktorý zadanie nepozná, by nevedel určiť o čo v zadaní ide.
2.	Text nie je úplne jasný, jazyková štylizácia a výber slov sú jednoduché. Čitateľ, ktorý zadanie nepozná by vedel približne určiť, akej témy sa zadanie týka.
3.	Text je miestami jasný, miestami nie. Jazyková štylizácia a výber slov sú jednoduché. Čitateľ, ktorý zadanie nepozná by vedel približne určiť, akej témy sa zadanie týka.
4.	Text je z väčšej miery jasný ako nejasný, jazyková štylizácia a výber slov sú zväčša efektívne a korešpondujú so zadaním. Čitateľ, ktorý zadanie nepozná by vedel určiť podstatu riešeného problému.
5.	Text je štylisticky jasný. V texte sa vyskytujú menšie chyby, ale do čitateľnosti textu nezasahujú. Čitateľ, ktorý sa nestretol so zadaním sa v riešení vie zorientovať a vie určiť aký problém žiaci riešili.
6.	Text je štylisticky jasný, neobsahuje chyby zasahujúce do podstaty správnosti riešenia. Čitateľ, ktorý sa nestretol so zadaním, sa v riešení vie zorientovať a je schopný bez pochýb určiť, aký problém žiaci riešili.

Príloha č. 3: Rubrika pre hodnotenie jasnosti a čitateľnosti textu v písomnom žiackom riešení otvorených matematických problémov.

NIEKOĽKO KVAPIEK MEDU

VIERA ČERŇANOVÁ

ABSTRAKT. *Pre začínajúceho učiteľa býva obzvlášť náročné hľadať spôsoby, ako nebyť zbytočne autoritatívnym, a pritom dosiahnuť napredovanie žiakov vo svojom predmete. Radostné napredovanie. V príspevku sa podelím o niektoré metódy či triky, ktoré objavujem a uplatňujem ako učiteľ – kedysi na univerzite, neskôr na gymnáziu a teraz opäť na univerzite.*

Na úvod

Na modulovej stránke [1] určenej pre triednych učiteľov čítame: „Motivácia je zázrak, ktorý dokáže divy. Kladná motivácia je v demokratickej spoločnosti jej prioritnou formou. Prečo ju teda nevyužiť, keď mnohokrát nič (z pohľadu materiálneho) nestojí."

Budem robiť chyby

Postaviť sa pred žiakov v adolescentnom veku a čeliť ich kritickému nastaveniu nie je vôbec jednoduché. Niektorí učitelia, osobitne začínajúci, si preto nasadia masku autority a neomylnosti. Takýmto postojom však učiteľ ťahá za kratší koniec. Z pozície moci síce môže dosiahnuť, že žiaci sa budú učiť, aby nemali zlú známku, ale „rešpekt", ktorý budú mať voči učiteľovi, nebude rešpektom partnerským a možno ani tvorivým. Učiteľ občas urobí chybu tak či tak, no chyba „neomylného" učiteľa je v očiach žiakov neodpustiteľným prehreškom, zdrojom skrytej škodoradosti a neúcty..

Keď som šla prvýkrát do triedy so štyridsiatimi pätnásťročnými gymnazistami, mala som skutočne veľký rešpekt. Vtedy mi skrsla myšlienka: nielen pripustiť, že budem robiť chyby, ale v triede to aj povedať. Reakcia bola skvelá. Nastavenie voči učiteľovi ako triednemu nepriateľovi vystriedalo prekvapenie, ktoré sa razom zmenilo na nastavenie spolupracovať. Netvrdím, že tomu tak bolo u všetkých žiakov. Avšak dôležité bolo, že sa tak stalo u mienkotvorných typov, intelektuálnych lídrov triedy. Títo potom s chuťou, no nie škodoradostne, striehli na moje chyby. Bola to súčasť našej spoločnej hry v partnerskom ovzduší. Žiaci sa učili považovať učiteľa za toho, kto im pomáha získavať poznatky a budovať zručnosti, a pritom kriticky a konštruktívne myslieť.

Odvtedy vždy, keď nezabudnem, na začiatku školského roka či semestra poviem v každej skupine: „Budem robiť chyby. Niektoré zámerne, aby som vyskúšala vašu pozornosť. Iné budú iba preklepy. A občas urobím naozajstnú chybu. Očakávam, že ma budete na moje chyby upozorňovať. Odmením to bonusom."

Povzbudzujem kolegov učiteľov, aby sa nebáli pred žiakmi pripustiť, že sú omylní. Nie je to hanba. Naopak. Ukázať žiakom, ako prijať svoju nedokonalosť a pracovať s ňou, má veľký výchovný význam.

Keď 100% nie je 100%

Náš školský systém je nastavený na hodnotenie známkami, bodmi, percentami, percentilmi... Učiteľ sa tomu nevyhne, preto je rozumné motivovať študentov aj prostredníctvom hodnotenia. Udeľovanie bonusových bodov, ktoré môžu zlepšiť výslednú známku žiaka, považujem za samozrejmosť. Učitelia zvyknú dávať bonusové body pri aktivitách v triede, práci s IKT i pri písomnom skúšaní. Učiteľ po čase dokáže nastaviť toto priebežné odmeňovanie tak, aby sa niektorí žiaci neutiekali iba k získavaniu bonusových bodov za aktivitu, pričom pri štandardnom skúšaní by boli ich výsledky o niekoľko stupňov horšie.

Pri písomnom skúšaní sa mi osvedčilo ponúknuť body navyše aj z iných dôvodov. Žiaci považujú niektoré požiadavky učiteľa za zbytočné až obťažujúce. V písomke sa to prejaví ešte vypuklejšie: neraz sa stáva, že žiak sa ohradí voči zníženému hodnoteniu svojho riešenia, najmä ak má správny výsledok. A tak sú bonusové body motivačným trikom pre žiakov i pre mňa.

Príklad. Písomka sa započítava do celkového hodnotenia ako 20–bodová, pričom maximálny súčet bodov je 23. Ak študent napíše riešenie bez zdôvodnenia jednotlivých krokov, nedostane za príslušnú úlohu plný počet bodov. Výsledná známka bude povedzme 19 bodov z 20. Vtedy je študent na jednej strane rád, že získal takmer 100% zo základu 20, na druhej strane ho mrzí, že nezískal viac. Mám skúsenosť, že pri takomto spôsobe hodnotenia sa študent na učiteľa za nepridelené body nehnevá, čo je veľmi dôležitá skutočnosť. Pozitívne nastavenie voči učiteľovi totiž zvyšuje žiakovu snahu spolupracovať, a tiež ochotu prijať svoj vlastný podiel viny a poučiť sa z neho: „Učiteľ mi dal šancu, ja som ju nevyužil naplno.“ V budúcnosti si dá viac záležať na tom, aby písal dôkladnejšie, a tak získal lepšie skóre. Takto učiteľ pomôže študentovi nielen posilniť vnútornú motiváciu napredovať v danom predmete, pomôže mu i ľudsky dozrievať.

Prečo je tento motivačný trik dôležitý aj pre mňa ako učiteľa? Pretože mi dáva priestor požadovať určitú „nadstavbu“. V písomnom prejave považujem za dôležitý nielen správny postup a výpočet, ale aj zdôvodňovanie jednotlivých krokov. Ono totiž podporuje čítanie odborného textu s porozumením a strategický prístup k riešeniu úloh. Je to moja súčasť boja proti mechanickému riešeniu úloh, proti prístupu *Ako sa to robí?* namiesto *Prečo to robím takto?*. Navyše, ak sa niektorý študent snaží vyjednať lepšiu záverečnú známku s tým, že mu „chýbajú iba 2 body“, mám silný protiargument: „Tie body sa dali ľahko získať v priebežných písomkách.“

Bežnou praxou sú opravné písomky. S nimi sa stretáva snáď každý, preto o nich nebudem písať. Inou možnosťou je „odpustená písomka“.

Príklad. Povedzme, že za prvé tri mesiace školského roka žiaci písali tri – štyri väčšie písomky z matematiky. Učiteľ plánuje zaradiť ďalšiu v decembri, kedy už je atmosféra v triedach vianočná. Žiaci začnú vyjednávať, aby učiteľ písomku zrušil. V takýchto situáciách sa mi osvedčil návrh: „Písomka bude, ale každý žiak si bude môcť pred koncom polroka vybrať zo všetkých písomiek okrem polročnej tú, z ktorej sa mu známka nebude započítavať do výslednej známky za polrok.“ Takýto návrh učiteľa je pre žiakov mimoriadne motivujúci. Tí, ktorí si uvedomovali, že s doterajšími známkami lepšiu výslednú známku než (štvorku, trojku, ...) nedokážu získať, zrazu vidia novú možnosť. Pre mňa ako učiteľa bolo skutočne fascinujúce pozorovať, ako sa chlapec, ktorý dovtedy svoju neistotu a frustráciu z hroziacej štvorky kompenzoval aroganciou a vyvolávaním konfliktov, so zápalom pustil do učenia.

Zaiste, pre učiteľa je to zdanlivo práca navyše, avšak účinok stojí za to. Žiak sa naučí látku, ktorú by inak možno vyradil. Navyše, bude sa ju učiť dobrovoľne a rád! O účinkoch na osobnosť žiaka ani nehovorím.

Na vysokých školách je iný systém vyučovania i hodnotenia než na nižších stupňoch vzdelávania, avšak aj tu je široké spektrum možností pre pozitívnu motiváciu.

Príklad. Známka A je najlepším hodnotením predmetu. Niektoré predmety sú ľahšie, matematika patrí k najťažším. Tým viac zastávam názor, že jedna chyba alebo nevedomosť by nemala rozhodnúť o tom, či študent dostane alebo nedostane výsledné hodnotenie A. Preto v prípadoch, keď rozhodujem o hodnotení predmetu sama, čiže nie som viazaná rozhodnutím tímu, nastavujem bodovanie skúškovej písomky s bonusom, ako som uviedla v príklade vyššie. Výborní študenti majú zväčša ambíciu nielen dosiahnuť počet bodov potrebný na získanie najlepšej známky A, ale chcú získať čo najvyššie percentuálne hodnotenie. Nuž a ten výborný študent, ktorý niektorú otázku na skúške nezvládol, ale ostatné zvládol skvele a aj skóre zo semestra má vysoké, má ešte stále možnosť dostať najlepšiu známku. Prípadne môže svoje ašpirácie obhájiť na ústnej skúške.

Príklad. Pri vyučovaní nepovinného predmetu sa mi osvedčilo začať semester vetou: „V tejto chvíli máte z tohto predmetu všetci nula bodov a známku E.“ Prekvapených študentov zaujíma, ako si môžu známku počas semestra zlepšiť, a tiež, akým spôsobom by ju prípadne mohli stratiť a dostať FX. Vtedy vysvetlím dôkladne premyslený systém hodnotenia: záporné body za každú neúčasť, kladné body za správne vyriešenú domácu úlohu a za aktivitu počas semestra. No a samozrejme intervaly počtu bodov pre jednotlivé známky A–E. Pri takto nastavenom systéme študenti v každom týždni semestra vedia, ako na tom práve sú, a sami rozhodujú, akú známku sa budú snažiť získať. Niežeby tak tomu nebolo pri iných spôsoboch hodnotenia, pri tomto si však študenti jasne uvedomujú, že výsledná známka je celkom v ich rukách.

Aj zlý nápad je dobrý

Pri heuristickom spôsobe vyučovania, keď je klasické vysvetľovanie nahradené tvorivým objavovaním žiakov, sa neraz stane, že na otázku učiteľa: „Ako by to mohlo byť?“, „Čo by sme teraz mohli urobiť?“ a podobne, dá niektorý žiak nesprávnu odpoveď.

Príklad. Pri objavovaní ďalších vlastností rovinných útvarov sa učiteľ pokúša nasmerovať bádanie žiakov otázkou „Čo by mohlo nastať?“. Všetci mlčia, iba jeden žiak odpovie, no jeho odpoveď očividne nie je správna. Vtedy sa niektorí spolužiaci zasmejú, aktívny žiak sa cíti trápne. V takejto situácii zohráva postoj učiteľa veľmi dôležitú úlohu. On je ten, ktorý má zareagovať napríklad takto: „Aj zlý nápad je lepší ako žiaden nápad. Zlý nápad je dobrý tým, že vďaka nemu všetci vieme, že tadiaľto cesta nevedie. Takže nám pomohol posunúť sa ďalej. A teda je dobrý.“

Pre učiteľa je zadosťučinením pozorovať, ako v triede vzniká a prehlbuje sa tvorivá atmosféra, keď žiaci nemajú zábrany vysloviť svoje nápady. Aj nesprávne. Napokon, podľa [2] je potrebných tridsať (nesprávnych) nápadov, kým odkryjeme ten správny.

LITERATÚRA

[1] http://triedny.abell.sk/dokumenty_html/DiplomPochvala.htm

[2] Roger L. Firestien: *Why Didn't I Think of That?-Prečo som na to neprišiel skôr?*, Open Windows, 1994, ISBN 80-85741-03-2

RNDr. Viera Čerňanová, PhD.
Katedra matematiky a informatiky
Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity
Priemyselná 4
SK – 918 43 Trnava
e-mail: vieracernanova@hotmail.com

MATEMATIKA V SPRACOVANÍ OBRAZU A POČÍTAČOVOM VIDENÍ

ZUZANA ČERNEKOVÁ

ABSTRAKT. *S počítačovým videním sa v dnešnej dobe stretávame už takmer všade a často si to ani neuvedomujeme. Bez matematiky by však nič z toho nikdy neexistovalo. Práca predstavuje možnosť rozširovania predstáv u žiakov, kde všade sa matematika využíva.*

Úvod

Môžeme identifikovať nižšiu a vyššiu úroveň počítačového videnia. Do nižšej úrovne patrí spracovanie obrazu tj. získanie samotného obrazu a jeho predspracovanie, niekedy aj nízko úrovňová segmentácia. Vyššiu úroveň tvorí porozumenie obrazu, kde začleňujeme sémantickú segmentáciu, popis objektov, rozpoznanie a samotné porozumenie. Pri spracovaní obrazu, ktoré je základom počítačového videnia sa často používajú jednoduché matematické výpočty ako napríklad priemer. V nasledujúcom texte ukážem niektoré príklady z oblasti spracovania obrazu kde s pomocou iba základnej matematiky dostaneme zaujímavé výsledky.

1. Filtrovanie obrazu

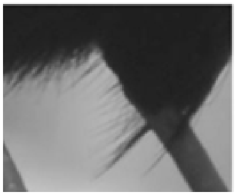
V obraze sa často nachádzajú rôzne typy šumu (najčastejšie Gaussov, uniformný, salt and peper), ktorý je potrebné pred ďalším spracovaním odstrániť. Na to sa používajú tzv. filtre, ktoré môžeme rozdeliť na lineárne a nelineárne.

Lineárne filtre

Výsledná hodnota pixla je vážený súčet okolitých pixlov. Medzi takého filtre patrí napríklad priemerovací filter (mean). Hodnota v danom pixeli sa nahradí priemerom hodnôt v jeho okolí. Najčastejšie sa používa okolie veľkosti 3x3. Takýto filter je vhodný napríklad na odstránenie Gaussovho šumu. Taktiež sa môže použiť na rozostrenie obrázka.

Okrem klasického (aritmetického) priemeru môžeme použiť aj geometrický priemer, harmonický priemer alebo kontraharmonický priemer. Kontraharmonický priemer vypočítame ako

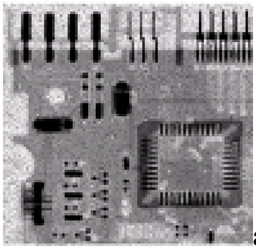
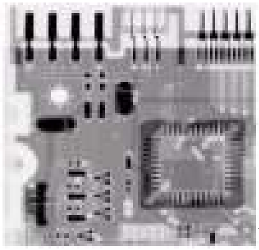
$$f(x,y) = \frac{\sum_{(s,t)\in S_{xy}} g(s,t)^{Q+1}}{\sum_{(s,t)\in S_{xy}} g(s,t)^{Q}} \qquad (1)$$

 a)  b)

Obrázok 1: a) originálny obraz

b)rozmazaný obraz pomocou priemerovacieho filtra o veľkosti 7×7*(zdroj [2])*

Príklad odstránenia pepper šumu pomocou kontraharmonického filtra je zobrazený na obrázku 2.

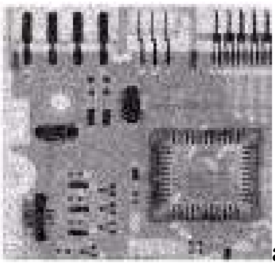
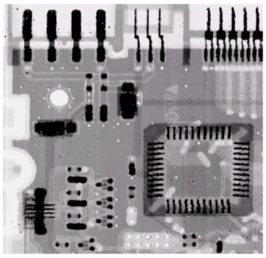
 a)  b)

Obrázok 2: a) Obraz zašumený Pepper šumom s pravdepodobnosťou 0,1

b)vyfiltrovaný obraz pomocou kontraharmonického šumu s Q=1,5.(zdroj [1])

Nelineárne filtre

Spomedzi nelineárnych filtrov je najznámejší mediánový filter, taktiež sem radíme max a min filter. Mediánový filter vyberie zo zoradenej postupnosti ten prvok, ktorý je na strednej pozícii. Je výborným nástrojom pre odstránenie impulzového šumu alebo šumu typu salt and pepper.

 a)  b)

Obrázok 3: a) originálny obraz

b)vyfiltrovaný obraz pomocou mediánového filtra (zdroj [1])

2. Detekcia hrán

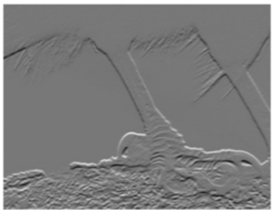
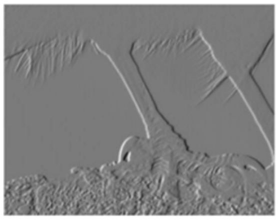
Hrany v obraze hľadáme na základe porovnania intenzít v nejakom okolí skúmaného bodu. Ak sa intenzity v danom okolí bodu príliš nelíšia, pravdepodobne tam hrana nie je, a naopak ak sa líšia, bod môže patriť hrane. Na zistenie tejto informácie používame derivácie alebo gradientné operátory. Pod gradientom funkcie $f(x, y)$ rozumieme dvojrozmerný vektor, ktorého súradnice sú parciálne diferencie funkcie f podľa x a y. Na určenie hrany potrebujeme vedieť veľkosť a smer gradientu. Na získanie gradientu používame hranové filtre. Medzi najpopulárnejšie hranové filtre patrí Sobelov filter. Konvolučná maska vertikálneho Sobelovho filtra je definovaná v tvare

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Analogicky môžeme vyjadriť konvolučnú masku horizontálneho Sobelovho filtra ako

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Na obrázku 4 môžeme vidieť horizontálny a vertikálny gradient a magnitúdu alebo veľkosť gradientu.


a)

b)

c)

d)

Obrázok 4: a) originálny obraz, b)obraz filtrovaný horizontálnym Sobelovým filtrom c)obraz filtrovaný vertikálnym Sobelovým filtrom, d) magnitúda obrazu filtrovaného Sobelovým filtrom.(zdroj [2])

Segmentácia

Hlavným cieľom segmentácie je rozdeliť obraz na časti, ktoré majú silnú koreláciu s objektmi alebo oblasťami reálneho sveta zobrazenými v obraze.


Obrázok 5: Príklady segmentácie obrazu

Pomerne jednoduchá a často využívaná metóda je segmentácia pomocou zhlukovania. Pri tejto metóde postupne vytvárame zhluky pixelov, ktoré sú si na základe nejakej metriky podobné. Veľmi známy a jednoduchý algoritmus je *K-means clustering*. Kde *K* je počet zhlukov (klastrov) na ktoré chceme pixle obrazu rozdeliť. Algoritmus pre *K-means clustering* vyzerá nasledovne.

1. *Umiestni K bodov v priestore reprezentovaného objektmi, ktoré chceme zhlukovať. Tieto body predstavujú inicializačné centroidy zhlukov.*
2. *Priraď každý objekt do zhluku podľa toho ku ktorému centroidu je najbližšie*
3. *Prepočítaj pozíciu K centroidov (priemery jednotlivých zhlukov).*
4. *Opakuj kroky 2 a 3 pokiaľ sa centroidy menia pozíciu.*

LITERATÚRA

[1] Gonzalez, R. C. and Woods, R. E. *"Digital Image Processing"* 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ. (2002)

[2] E. Šikudová, Z. Černeková, W. Benešová, Z.B. Haladová, J. Kučerová, *"Počítačové videnie: Detekcia a rozpoznávanie objektov",* Praha: Wikina, 2014, ISBN 978-80-87925-06-5, 378 strán

RNDr. Zuzana Černeková, PhD.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: cernekova@fmph.uniba.sk

GASTRONOMICKÉ POCHÚŤKY V CELOSLOVENSKÝCH TESTOVANIACH MATEMATIKY

LUCIA CSACHOVÁ

ABSTRAKT. *V súčasnosti sú rôzne zamerané kuchárske knihy či televízne programy o varení (ale i jedení) veľmi obľúbené u širokej verejnosti. V celoslovenských testovaniach matematiky sa tiež vyskytujú nepravidelne úlohy s témou varenia, pečenia či stravovania. Aj vďaka takto zameraným úlohám je možné zatraktívniť školskú matematiku či naučiť deti zásadám zdravšieho stravovania.*

Kontext reálneho života v celoslovenských testovaniach matematiky

Aplikácie matematiky môžu byť jedným zo silných impulzov vnútornej motivácie v školskej matematike. Žiaci tak majú možnosť „vidieť", že matematika je užitočná a týka sa častokrát bežného života. Tento trend sa odzrkadľuje aj v celoslovenských testovaniach matematiky, kde napríklad v T9 je polovica testových položiek s kontextom z reálneho života. Okrem „tradičných" slovných úloh na pohyb, zmesi alebo prácu, sa vyskytujú aj úlohy zamerané na finančnú gramotnosť, ale i také, v ktorých sa „pošteklia" chuťové bunky. Niektoré z nich by sme radi v príspevku predstavili.

NÚCEM poskytuje pravidelne vyhodnocovania úspešnosti riešenia, hlbšej a dlhodobej kvantitatívnej a kvalitatívnej analýze výsledkov testovania T9 z matematiky sme sa venovali napríklad v [1], [2].

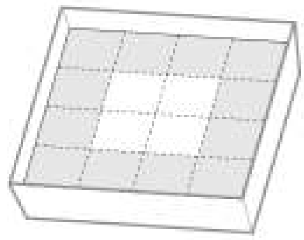
Gastronómia ako kontext pre úlohy z matematiky

Na otázku, kde sa v matematike vyskytuje „jedlo" nám väčšina učiteľov (po prvotnom údive) odpovedala, že „ako pizza" v téme Zlomky. Pizza vystupovala v T9 aj v úlohe 8 zameranej na Aritmetiku (a finančnú gramotnosť) z roku 2012 [3]: *Do pizzerie prišlo 30 futbalistov. Práve prebiehala akcia na objednávku pizze: Ak si objednáte 2 pizze, tretiu dostanete zadarmo." Futbalisti si objednali toľko pízz, aby sa každému ušla 1pizza. Za koľko pízz zaplatili, ak využili podmienky akcie?* Úspešnosť riešenia tejto úlohy bola dosť vysoká – 71,2 %.

Úlohy týkajúce sa tejto problematiky sú zadané prevažne textom. Výnimku predstavuje úloha číslo 15 z roku 2016 [5] z externej časti maturity s obrázkom v zadaní (Obr. 1), ktorej úspešnosť riešenia bola takmer 60 %[2]: *Babička upiekla koláč v štvorcovom plechu. Chcela ho rozrezať na rovnaké štvorcové kúsky. Minimálne na koľko častí ho musela rozrezať, ak chcela, aby bol počet vnútorných štvorčekov väčší ako počet okrajových štvorčekov?*

---

[2] Percento úspešnosti je trochu prekvapivé, keďže danú úlohu vedia vypočítať aj žiaci 2. stupňa základnej školy pomocou stratégií *pokus-omyl* a *experimentovanie*.



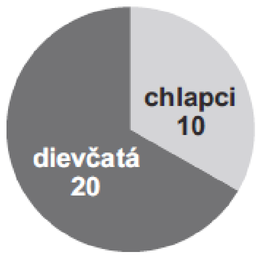
Obrázok 1: Obrázok k úlohe 15/2016 z externej časti maturity.

V roku 2017 sa v T9 vyskytli až tri úlohy k tejto téme. Riešenie jednej z nich bolo založené na využití priamej úmernosti, v zadaní dvoch z nich sa vyskytoval pomer. Uvádzame znenie úlohy číslo 10, ktorá mala veľmi nízku úspešnosť 27,5 % [6]: *V recepte na lečo sa odporúča zmiešať paradajky, papriku a cibuľu v pomere 4:3:1. Pani kuchárka už pripravila cibuľu a papriku, pričom cibule bolo o päť kilogramov menej ako papriky. Koľko kg papriky bude potrebovať podľa tohto receptu?* Túto úlohu sme zadali aj študentom primárnej pedagogiky, ich úspešnosť bola porovnateľná. Ako najväčší problém študenti uviedli, že sa nevedeli orientovať v zadaní. To dokazuje veľký problém v čítaní s porozumením naprieč celým vzdelávacím systémom.

Koláčový diagram

Okrem varenia a jedenia sa gastronómia môže vyskytovať v úlohách aj obrazne, napríklad prostredníctvom tzv. *koláčových diagramov*[3]. Tento diagram známy tiež ako *kruhový* alebo *výsekový* predstavuje vhodný nástroj na grafické zobrazovanie (nielen) štatistických údajov. Plocha kruhu pritom predstavuje celý súbor, plocha určitého výseku niektorú jeho časť. Prvý známy koláčový graf je pripisovaný W. Playfairovi z roku 1801, zaujímavé spracovanie Napoleonovho ťaženia na Moskvu z roku 1858 zase Ch. J. Minardovi.

Orientovanie sa v takomto type grafu patrí do obsahu školskej matematiky už prvého stupňa a väčšinou sú zobrazené údaje štatistického charakteru. Úloha na Obr. 2 [4] dokazuje, že to ale tak nemusí byť (úspešnosť riešenia úlohy bola nízka – len 27 %).



Obrázok 2: Úloha 17/2016 Na nástenke je kruhový diagram, na ktorom je zastúpenie počtu členov atletického oddielu podľa pohlavia. O koľko stupňov sa zväčší uhol kruhového výseku

[3] Z angl. *pie char.*

znázorňujúci počet chlapcov v kruhovom diagrame, ak do oddielu pribudnú dvaja chlapci a počet dievčat sa nezmení?

Poďakovanie: Za poskytnutie databázy výsledkov a použitie úloh z testovaní ďakujeme Národnému ústavu certifikovaných meraní.

LITERATÚRA

[1] Csachová L., Gunčaga J., Jurečková M.: Educational Research on the Mathematical Competence, in K. Patterson (ed.): *Focus on Mathematics Education Research.* New York, NOVA science publishers, 2017, p. 31-62, ISBN 978-1-53611-826-1

[2] Csachová L., Jurečková M.: Notes to the problems with figures at school mathematics. In: *Proceedings of Aplimat: 17th conference of applied mathematics 2018.* D. Szarková et al. *(eds.),* Bratislava, Slovak University of Technology 2018, p. 270-279., ISBN 978-1-5108-6248-7

[3] NÚCEM: *Test z matematiky*, *T9-2012*, Bratislava, online: www.nucem.sk/documents//26/testovanie_9_2012/testy/Mat_SJ_fA_web_2012.pdf

[4] NÚCEM: Test *z matematiky*, *T9-2016*, Bratislava, online: www.nucem.sk/documents//26/testovanie_9_2016/testy_t9_2016/T9_2016_Test_z_matematiky_v_slovenskom_jazyku.pdf

[5] NÚCEM: *Maturita 2016, externá časť,* Bratislava, online: www.nucem.sk/documents//25/maturita_2016/matematika/RT_MAT_5178_2016.pdf

[6] NÚCEM: *Test z matematiky*, *T9-2017*, Bratislava, online: www.nucem.sk/documents//26/testovanie_9_2017/testy_t9_2017/T9_2017_Test_z_matematiky_v_slovenskom_jazyku.pdf

RNDr. Lucia Csachová, PhD.
Katolícka univerzita v Ružomberku
Pedagogická fakulta
Hrabovská cesta 1
SK – 034 01 Ružomberok
e-mail: lucia.csachova@gmail.com

SPOLOČENSKÉ HRY A KRITICKÉ MYSLENIE

IVONA DEMČÁKOVÁ

ABSTRAKT. *Aj keď sa to možno nezdá, ale spoločenské hry a kritické myslenie majú veľa spoločného. V príspevku porozprávame o svojich skúsenostiach so spoločenskými hrami na hodinách matematiky a pridáme trochu myšlienok o kritickom myslení.*

Trošku teórie

Zamestnávatelia, školské dokumenty, ale aj široká verejnosť poslednú dobu oveľa častejšie poukazuje na potrebu kritického myslenia. Preto hneď na začiatok si uvedieme aké vlastnosti má kriticky mysliaci človek:

- vie vybrať dôležité informácie, určiť pravdivosť týchto informácií, vie ich spracovať a overiť dôsledky,
- má schopnosť vybrať vhodné riešenie problému,
- vie podložiť svoje tvrdenia správnymi argumentmi a dokázať ich správnosť,
- dokáže zhodnotiť reálnosť svojho riešenia a výsledku. [1]

Ďalším prejavom môže byť aj schopnosť zvoliť správnu stratégiu napríklad na výhru v spoločenskej hry. Kriticky mysliaci človek informácie nielenže prijíma, ale ich aj podrobuje analýze a overuje si ich pravosť.

Spoločenskou hrou budeme chápať všetky stolové hry nielen pre viacerých hráčov, ale aj pre jednotlivcov. Okrem komerčných hier môžeme používať aj vlastnoručne vyrobené hry, ktoré napríklad boli prezentované aj na konferencii.

Hry a Kritické myslenie

Keďže sme na hodine matiky, našou snahou je vyberať spoločenské hry, ktoré viacmenej súvisia z matematikou. Na obrázku 1 sú odfotené len niektoré z možných hier. Trh ponúka ešte oveľa viac hier, ktoré sa dajú použiť na hodinách matematiky.

Obrázok 1: Spoločenské hry

Mladší žiaci radi hrávajú hru *Heckmeck.* Žiak hádže siedmymi kockami a postupne si ukladá padnuté čísla pred seba. Nebudem rozpisovať presné pravidlá, ale dôležité v tejto hre je mať na konci hry čo najviac žetónov s červíkmi. Okrem počítania jednoduchých súčtov sa musia popasovať aj s pravdepodobnosťou, aby včas svoje hádzanie ukončili.

Žiaci všetkých vekových kategórií obľubujú hru *Ubongo*. Za časový limit je potrebné poskladať zo správnych dielikov určený obrázok. Pomocou tejto hry rozvíjame hlavne priestorovú predstavivosť. Hra umožňuje zvoliť si náročnosť úloh počtom dielikov, z ktorých sa skladá obrazec. Ak máte, chuť viete vytvoriť ešte zložitejšie obrázky.

Hra *Mathable* má podobné pravidlá ako Scrable. Doplňovaním čísel k číslam na hracej ploche je potrebné vytvoriť príklady aj s výsledkom. Povolené sú operácie plus, mínus, krát a deleno. Žiaci pri hre prepočítajú veľa príkladov. *Abaku* má podobné pravidlá a má dovolené používať viac operácií a číslice umožňujú vytvárať zložitejšie príklady.

Veľmi zaujímavé sú aj hry pre jedného hráča ako *Logic, Tangram,* rôzne hlavolamové kartičkové sady alebo spájacie resp. rozpájacie kovové hlavolamy.

Samotné hranie hier pomáha rozvíjať kritické myslenie, ale môžeme tiež so žiakmi diskutovať o stratégiách,ktoré používajú pri hraní. Napríklad pri hre Heckmeck ich necháme nahlas uvažovať o jednotlivých ťahoch a argumentovať, prečo je ich voľba najlepšou. Pri hre Ubongo sa môžeme so žiakmi pokúsiť objaviť metódu ako postupovať pri skladaní, aby sme našli riešenie za čo najkratší čas.

Pozitíva a negatíva

Ako pri každej novej a netradičnej činnosti v škole, nás samozrejme zaujímajú pozitívne stránky novej aktivity. Žiakov hranie spoločenských hier baví v každom veku a aj na každej intelektuálnej úrovni. Hry, ktoré sme uviedli, často poskytujú možnosť zvoliť si rôznu úroveň náročnosti tak, aby to vyhovovalo všetkým v skupine. Ak si vyberieme vhodné hry, môžeme jednoduchou formou rozvíjať nielen kritické myslenie, ale aj logické myslenie, priestorové videnie, či trénovať rýchlosť reakcií.

Ďalším dôležitým pozitívnym aspektom je, že pomocou hier, ktoré sa hrajú v skupine, rozvíjame kooperáciu alebo spoluprácu. Žiaci musia na riešení spolupracovať, tolerovať sa navzájom, stíšiť sa a počúvať iných a často sa naučiť zvládať prehru a svoje emócie. Pre nás najdôležitejším pozitívom celej tejto činnosti je, že žiaci sa učia matematiku a učia sa ju hravou formou.

Spomenieme aj dve negatíva: treba nájsť hry, ktoré sa dajú stihnúť dohrať na vyučovacej hodine a učiteľ musí trochu investovať, aby si vytvoril zásobu hier. Napriek tomu nebojte sa zapojiť spoločenské hry do vyučovacieho procesu kedykoľvek počas roka, žiaci sa vám za to poďakujú.

LITERATÚRA

[1] Demčáková I.: *Ako je to s rozvíjaním kritického myslenia na hodinách matematiky?* In Zborník príspevkov z konferencie Dva dni s didaktikou matematiky 2016, Bratislava, 2016, ISBN 978 – 80 – 8147 – 075 – 2

Mgr. Ivona Demčáková
FMFI UK, Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: ivona.demcakova@gmail.com

ROZŠÍRENÁ REALITA V TRIEDE

MONIKA DILLINGEROVÁ

ABSTRAKT. *Tabletové triedy otvárajú nové možnosti výuky. Aj učitelia sa musia oboznamovať s novými vo vyučovaní použiteľnými technológiami. V článku rozoberáme, čo rozumieme pod pojmom rozšírená realita. Opíšeme prácu so softvérom Augmented polyhedrons. Naša aktivita je uskutočniteľná v deviatej triede ZŠ, jej odpovedajúcom ročníku osemročného gymnázia no i v ktoromkoľvek ročníku strednej školy.*

Rozšírená realita

Pojem rozšírená realita vychádza z dvoch anglických ekvivalentov – Augmented reality a Mixed reality. Ide o akýsi medzikrok medzi naším reálnym vnímaním okolia a virtuálnou realitou, kde sa pohybujeme iba vo virtuálnom svete. Pre rozšírenú realitu je typické, že snímame kamerou telefónu, tabletu a pod. obraz reálneho sveta a softvér do tohto obrazu dokresľuje cudzie objekty. Objekty môžu byť umiestnené na základe GPS súradníc, rôznych značiek, nazývaných markery a pod. Mohli by sme teda tvrdiť, že zariadenie do reálneho sveta pridáva virtuálny objekt. Tento virtuálny objekt môžeme pohybom snímacieho zariadenia pozorovať z rôznych strán, pod rôznymi uhlami. Objekt je trojdimenzionálny a správa sa, ako keby tam naozaj bol[4]. Vhodným a známym príkladom je hra Pokémon Go. Konkrétne táto pracuje s GPS súradnicami a vyhodnotením plôch nasnímaných kamerou. GPS súradnice zariadeniu definujú, kde približne má byť objekt umiestnený. Kontrola obrazu reality potom pomáha, aby sa pokémon neobjavil v stene, ale pred ňou. Jeho pozícia musí byť realistická, čiže nebude visieť vo vzduchu, ale softvér ho umiestni na reálne existujúcu podložku – trávu, podlahu, stôl a pod.

Obrázok 1: Pokémon go [2]

Iná možnosť je používanie tzv. markerov. Ako marker môžu slúžiť rôzne obrazce vytlačené na papieri, kartičkách a pod. Môžeme si to prirovnať ku QR kódom, ktoré sa nájdu už bezmála všade. Kamera verne zobrazuje okolie a na miesto markeru dokreslí

[4] Spracované podľa [1]

objekt. Presne tento systém používa aj nami zvolená aplikácia Augmented polyhedrons. Na obrázku č.2 jasne vidieť markery s číslami uprostred i samotné zariadenie a v ňom obraz, ktorý vytvára spojenie fotoaparátu a aplikácie. Preklápaním a presúvaním zariadenia meníme uhol pohľadu na telesá a môžeme napríklad zisťovať ich vlastnosti.

Obrázok 2: Augmented polyhedrons – Mirage [3]

Aplikácia Augmented polyhedrons

Samotná aplikácia je dostupná pre Android aj iOS. Je bezplatná a k jej spusteniu okrem nainštalovania potrebuje užívateľ ešte vytlačené markery. Súbor markerov nájde na stránkach firmy Mirage [4]. Po stiahnutí a vytlačení získate 12 markerov, za ktorými sa skrývajú rôzne telesá.

Na základe výskumu z roku 2017/18 (bude publikovaný v samostatnej kapitole pripravovanej medzinárodnej monografie) sme pripravili aktivity pre žiakov deviateho ročníka ZŠ, odpovedajúceho a vyšších ročníkov OG. Samozrejme je možné uvedeným postupom pracovať aj so žiakmi SŠ.

Žiakov je potrebné rozdeliť do skupín po troch až štyroch. Pre každú skupinu majte pripravené markery, zariadenie s nainštalovanou aplikáciou, čisté papiere, ceruzku alebo pero a meradlá.

Na úvod sa žiak má oboznámiť s aplikáciou samotnou. Na tento účel slúži prvá úloha:

1. Ktoré telesá sa skrývajú pod jednotlivými číslami na markeroch?
   Úloha má dve úrovne. V prvej úrovni dostanú žiaci základné telesá, ktoré dobre poznajú, v druhej potom hranoly s nepravidelným mnohouholníkom v podstave, guľu, kužeľ a pod.

V druhej úlohe potom žiak podľa vlastného výberu pracuje s dvomi telesami, jedným z jednoduchšej a jedným zo zložitejšej skupiny.

2. Vyberte si jedno teleso zo skupiny 1, 2, 8 a jedno teleso zo skupiny 4, 6, 10.
   Pre každé z nich sa pokúste odpovedať na nasledujúce otázky:
   a. Koľko má stien, hrán a vrcholov?
   b. Vedeli by ste zostrojiť jeho sieť?

c. Je možné nájsť viac ako jednu sieť?
d. Dokážete zistiť jeho povrch a objem?
e. Aké údaje potrebujete na presné určenie jeho povrchu a objemu?
f. Viete ich s vašimi pomôckami získať?
g. Viete objaviť a uviesť ďalšie vlastnosti vášho telesa?

Na aktivitu je dôležité ponechať dostatočný čas. Učiteľ je v roli pomocníka, ktorý odpovedá na otázky protiotázkou, prípadne priamo tvorí doplňujúce otázky a podnecuje skúmanie žiakov.

V rámci workshopu nás zaujímajú niektoré aspekty výberu a práce s telesami:

1. Ktoré telesá ste si vybrali?
2. Čo ste zistili?
3. Ktoré otázky pre vás predstavovali najväčšiu výzvu?
4. Viete si predstaviť pokračovanie?

V rámci vlastného výskumu s budúcimi učiteľmi sme pripravili aj pokračovanie aktivity na ďalšiu vyučovaciu hodinu. V rámci nej majú jednotlivé skupiny pracovať s jedným telesom zo zložitejšej skupiny. Zodpovedať čo možno najobšírnejšie otázky z úlohy 2 a vytvoriť z nich krátku prezentáciu (cca 6 minút). Mala by obsahovať odpovede na všetky otázky, prípadne dodatkové informácie o procese hľadania odpovedí, či doplňujúce informácie o telese. V prezentácii je možné použiť krátke video zo skúmania, informácie z internetu.

Záver

Prvotný výskum, ktorý tvoril základ pre workshop bol kompletne nahrávaný a následne vyhodnotený. Počas výskumu sa ukázali okrem iných veľmi dôležité faktory ovplyvňujúce progres skupín. Bola to obťažnosť, resp. nemožnosť, získať presné výsledky merania dĺžok hrán. Tento jav sa spája s dvomi faktormi. Prvým je otázka ako a kde prikladať meradlo, druhým je problém zoomovania (čím bližšie je zariadenie, tým väčší je zobrazený predmet, tým lepšie sú rozoznateľné dieliky na meradlách). Rozptýlenie ponúkla „nedokonalosť" aplikácie, keď študenti zistili, že vedia teleso prevrátiť, zhodiť. Čo bol však zásadný faktor, bolo, že i v skupinách, ktoré sa navonok tvária, že ich práca nezaujíma, prichádza k okamihom silnej vnútornej motivácie. Ich celkové vystupovanie sa po zhliadnutí záznamu javí ako pozitívne.

Poďakovanie

Príspevok bol napísaný s podporou grantu KEGA 012UK-4/2018 "Koncepcia konštrucionalizmu a rozšírená realita v oblasti prírodných a technických vied základného vzdelávania (CEPENSAR)".

LITERATÚRA

[1] Schmalstieg D., Höllerer T.: *Augmented Reality, Principles and Practice*, Boston : Addison-Wesley, 2016, ISBN-13: 978-0-321-88357-5, ISBN-10: 0-321-88357-8

[2] https://www.sector.sk/novinka/120403/pokemon-go-je-uz-oficialne-dostupny-na-slovensku-co-to-vlastne-je.htm online, cit 1.11.2018

[3] https://apkpure.com/augmented-polyhedrons-mirage/com.miragestudio.polygons online, cit 1.11.2018

[4] http://mirage.ticedu.fr/wp-content/uploads/2014/07/00-marqueurs-universel.pdf online, cit 1.11.2018

RNDr. Monika Dillingerová, PhD.
Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: dillingerova@fmph.uniba.sk

PRACOVNÉ ZOŠITY Z MATEMATIKY PRE GYMNÁZIÁ A STREDNÉ ŠKOLY

MÁRIA DOMÁNYOVÁ, MARTA MLYNARČÍKOVÁ

ABSTRAKT: *V príspevku autorky predstavujú najnovší produkt vydavateľstva LiberaTerra, Pracovné zošity z matematiky pre gymnáziá a stredné školy (PZ). Autorky zošitov č.2 a č.3 objasňujú zámery, s ktorými boli pracovné zošity vytvorené, pričom zdôrazňujú výhody ich využívania vo vyučovacom procese, ako aj súlad s iŠVP a CP na maturitné skúšky. Každá z autoriek predstavuje svoj PZ aj z hľadiska výberu úloh, s ukážkami konkrétnych príkladov.*

RNDr. Marta Mlynarčíková

Novinka vydavateľstva LiberaTerra, Pracovné zošity z matematiky pre gymnáziá a stredné školy, má ambíciu zaplniť medzeru na aktuálnom učebnicovom trhu. Jej cieľom je pomôcť vyučujúcim a ich študentom v plnení iŠVP, s presahom aj na Cieľové požiadavky na maturitné skúšky. Obsah stredoškolského učiva z matematiky je sústredený do troch pracovných zošitov. PZ 1 zostavila Mgr. Miroslava Konrádová, vyšiel v auguste 2017 a obsahuje učivo týchto celkov: **Čísla a operácie s nimi, Mocniny a odmocniny, Číselné sústavy, Algebrické výrazy, Výroková logika a dôkazy, Rovnice a nerovnice, Planimetria, Množiny**. Autorkou PZ 2 je RNDr. Marta Mlynarčíková, autorkou PZ 3 je RNDr. Mária Dományová. PZ 2 aj PZ 3 vyšli v auguste 2018. Čísla PZ nekorešpondujú presne s ročníkmi, čo ani nie je principiálne možné, keďže školy si jednotlivé témy zaraďujú do príslušných ročníkov podľa svojich potrieb. Dobrou voľbou sa ukazuje zakúpenie sady všetkých troch PZ prvákom, pričom zošity môžu využívať počas celého stredoškolského štúdia. Pracovné zošity možno zakúpiť jednotlivo alebo celé sady v e-shope vydavateľstva www.liberaterra.sk/kategoria/g-a-ss/.

Vydavateľstvo Libera Terra je známym a úspešným vydavateľstvom pracovných zošitov z matematiky pre základné školy. Používanie pracovných zošitov na gymnáziách a stredných školách doteraz nebolo obvyklé; v jeho prospech však svedčia viaceré dôvody. Jedným z nich je skutočnosť, že žiaci sú na používanie PZ zo základných škôl zvyknutí, čo potvrdzujú zistenia stredoškolských učiteľov matematiky. Veľmi výrazným benefitom pracovných zošitov je úspora času študentov, a to ako na hodine, tak aj pri vypracovávaní domácich úloh. PZ umožňujú aj efektívnu deľbu zamestnaní na vyučovacej hodine, kedy môžu študenti pracovať každý svojím individuálnym tempom. Zanedbateľnou nie je ani skutočnosť, že samotný učiteľ sa nezdržiava pri zadávaní textov príkladov, najmä pri slovných úlohách. Obsah PZ je v súlade s iŠVP a pokrýva v podstate všetko základné učivo. Úlohy nad rámec iŠVP, obsiahnuté v Cieľových požiadavkách na maturitné skúšky, sú označené piktogramom. Náročnejšie úlohy sú označené hviezdičkou. PZ sú zostavené tak, aby podporovali metódu R.A.U Bližšie o tejto metóde sa možno dočítať na stránke www.skolarau.sk.

Obsah PZ 2:

- Kombinatorika
- Pravdepodobnosť
- Funkcie a ich vlastnosti

- Lineárna a kvadratická funkcia
- Mocninové funkcie
- Exponenciálna a logaritmická funkcia
- Stereometria I (polohová)
- Skontrolujte sa

Každá z tém začína teoretickým prehľadom, ktorý je volený tak, aby umožňoval aj prípadnú samostatnú prácu študentov. Z hľadiska formy sú tu použité tzv. pojmové mapy, ktoré prispievajú k prehľadnosti a názornosti. Starostlivý výber úloh pokrýva v maximálnej miere požiadavky na vedomosti a zručnosti študentov podľa iŠVP. Pre učiteľov budú určite cenné aj úlohy, ktoré boli v doterajšej učebnicovej literatúre „nedostatkovým tovarom“, napríklad úlohy na geometrickú pravdepodobnosť. Úlohy sú radené od jednoduchších, ilustrujúcich základné pojmy, až k aplikačným úlohám, vhodne načrtávajúcim prepojenie teoretických poznatkov s ich využitím v praktickom živote. Ukážky konkrétnych úloh i prehľadov základných pojmov sú v prílohe 1.

RNDr. Mária Dományová

Pracovné zošity z matematiky pre gymnáziá a stredné školy môže učiteľ využívať vo vyučovacom procese najrozmanitejším spôsobom – frontálne, pri výklade, precvičovaní či opakovaní učiva, ale aj skupinovou formou či využívajúc individuálny prístup k študentom. Práve diferencované formy (skupinová, individuálna) umožňujú umocniť výhody, ktoré z využívania PZ plynú. Viac o metóde R.A.U (Riadeného Aktívneho Učenia), ako aj o možnostiach menej tradičných foriem výučby (oproti „klasickému“ prístupu) sa možno dočítať na už zmienenej stránke www.skolarau.sk. Úlohy v PZ sú volené tak, aby umožňovali prirodzeným spôsobom implementovať do vyučovacieho procesu hlavné myšlienky metódy R.A.U.

Obsah PZ 3:

- Zhodnosť a podobnosť
- Zhodné a podobné zobrazenia
- Goniometria
- Trigonometria všeobecného trojuholníka
- Metrické vzťahy v priestore
- Objemy a povrchy telies
- Analytická geometria
- Štatistika
- Postupnosti
- Finančná matematika
- Skontrolujte sa

Jednotlivé témy PZ sú podrobne a didakticky precízne spracované. Pozornosť je venovaná aj pojmom a vzťahom, ktoré v súčasnej učebnicovej literatúre absentujú (pričom sú ale súčasťou iŠVP) – príkladom je priama a nepriama zhodnosť, ale aj iné. Dôsledná nadväznosť na iŠVP a v ňom proklamované zásady sa premietla do výberu úloh, ktoré umožňujú študentom objavovať jednoduché vzťahy a súvislosti všade tam, kde je to len trochu možné a vhodné. Z hľadiska metódy R.A.U ide o prioritu osobnostného rozvoja študenta pred jednoduchou sumou vedomostí, ktoré by mal počas štúdia obsiahnuť.

Názornosť je podporovaná návodnými obrázkami i samotnou voľbou úloh. Každá téma obsahuje aj aplikačné úlohy, ktoré predstavujú spojenie teórie s praxou a z formálneho hľadiska prispievajú k rozvoju čitateľskej a matematickej gramotnosti študentov. Teoretické prehľady k jednotlivým témam, ale aj príklady, ktoré vhodne ilustrujú preberané pojmy a vzťahy, môžu byť veľmi užitočnou pomôckou aj pre maturujúcich študentov.

Úlohy zo štatistiky s veľkým množstvom údajov a s čiastočne „predvyplnenými" tabuľkami umožňujú učiteľom aktívne zapojiť do riešenia rôzne skupinky študentov pri napĺňaní zásad Riadeného Aktívneho Učenia „Učiteľ usmerňuje a moderuje; žiak dostáva samostatnosť, dôveru a zodpovednosť".

Zaradenie originálnych úloh, obsahovo blízkych záujmovým sféram študentov a nenásilne ich nabádajúcich k logickému mysleniu, pomáha zase napĺňať zásadu R.A.U „Učiteľ dáva dobré otázky; žiak je aktívny samostatne i v skupinách".

Viacero úloh, vrátane „úloh bez slov" na vnútorných stranách obálky PZ 3 (s výzvami „skúmaj..." a „objavuj...") dáva učiteľovi množstvo námetov pre naplnenie zásad „Učiteľ inšpiruje a motivuje; žiak diskutuje".

V témach Štatistika a Finančná matematika je cielene použitá „korešpondencia" s aktuálne platnými učebnicami doc. Kubáčka, keďže ide o obsahovo „novonaplnené" a v súčasnosti vysokoaktuálne a preferované témy.

Pracovné zošity č.2 a č.3 svojou líniou nadväzujú na zošit č.1, sú písané sviežim štýlom, krásne ilustrované a príjemne graficky vyhotovené. Zostáva iba želať si, aby ich potenciál našiel svoje uplatnenie pri používaní na stredných školách a gymnáziách, kde sa môžu stať veľmi príjemnou a užitočnou vyučovacou pomôckou.

Ukážky konkrétnych úloh i prehľadov základných pojmov sú v prílohe 2.

LITERATÚRA

[1] Konrádová, M.: *Matematika pre gymnáziá a stredné školy, pracovný zošit 1*, LiberaTerra, 2017, ISBN 978-80-89792-49-8

[2] Mlynarčíková, M.: *Matematika pre gymnáziá a stredné školy, pracovný zošit 2*, LiberaTerra, 2018, ISBN 978-80-89792-55-9

[3] Dományová, M.: *Matematika pre gymnáziá a stredné školy, pracovný zošit 3*, LiberaTerra, 2018, ISBN 978-80-89792-56-6

[4] *Škola R.A.U.*, dostupné na: www.skolarau.sk

RNDr. Mária Dományová
Škola: dôchodkyňa, predtým GPH
Masarykova 1
07101 Michalovce
Email: domanyova@gmail.com

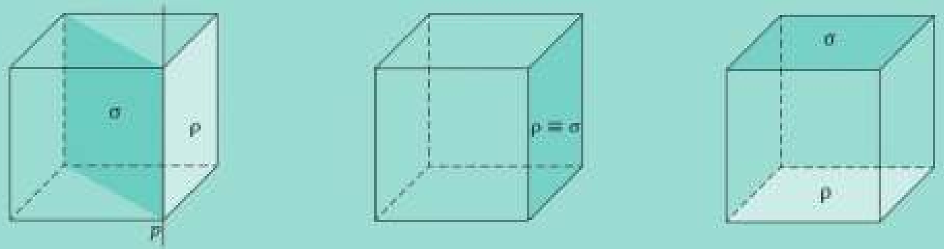
RNDr. Marta Mlynarčíková
Škola: Gymnázium P. O. Hviezdoslava
Hviezdoslavova 20
06014 Kežmarok
Email: mmlynarcikova@gmail.com

PRÍLOHY

Príloha 1: Ukážky z PZ 2

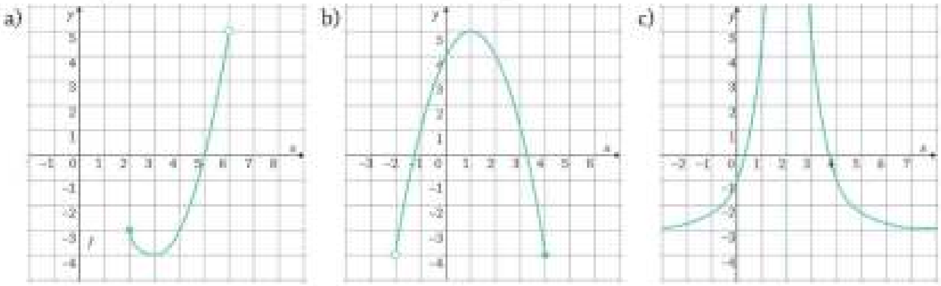
Vzájomná poloha dvoch rovín v priestore

$\rho \cap \sigma = p, \rho \times \delta$ | $\rho \cap \sigma = \rho, \rho \equiv \delta$ | $\rho \cap \sigma = \emptyset, \rho \parallel \delta$



ρ, σ sú **rôznobežné** | ρ, σ sú **totožné** (špeciálny prípad rovnobežnosti) | ρ, σ sú **rovnobežné**

1. Určte $D(f)$, $H(f)$, intervaly monotónnosti funkcie (kde je rastúca alebo klesajúca), body, v ktorých má extrémy (maximum alebo minimum), a určte, či je funkcia ohraničená zdola alebo zhora.



4. Blaise Pascal (1623 – 1662) usporiadal kombinačné čísla do schémy, ktorá sa podľa neho volá Pascalov trojuholník. Do oboch obrázkov doplňte ďalšie dva riadky Pascalovho trojuholníka.

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Príloha 2: Ukážky z PZ 3

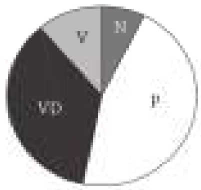
Zložené úrokovanie

Ak sa na konci úrokovacieho obdobia úroky pripočítajú k pôvodnej sume (*istine*) a v ďalšom období sa úrok vypočíta z tejto navýšenej sumy, hovoríme o **zloženom úrokovaní**.

Ak je úroková miera p % p. a., tak suma S po n rokoch vzrastie na $\boldsymbol{S \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$.

V prípade d-percentného zdanenia úrokov bude výsledná suma $\boldsymbol{S \cdot \left(1 + \frac{p}{100} \cdot \left(1 - \frac{d}{100}\right)\right)^n}$.

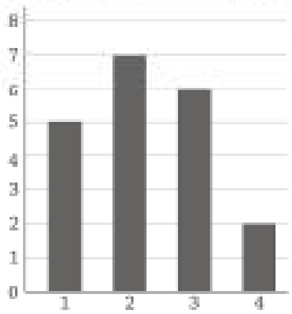
2. Na kruhovom diagrame je znázornené, koľko percent členov školského športového družstva prospelo na konci školského roka s vyznamenaním, koľko prospelo veľmi dobre, koľko prospelo a koľko neprospelo. Približne koľko percent členov družstva prospelo s vyznamenaním? Vyberte z ponúknutých možností.



V	prospelo s vyznamenaním
VD	prospelo veľmi dobre
P	prospelo
N	neprospelo

(A) 25 % (B) 34 % (C) 13 % (D) 40 % (E) 7 %

3. V televíznej relácii Nákupné maniačky súťažia štyri účastníčky. Stĺpcový diagram znázorňuje počty bodov, ktoré udelil každej z nich módny stylista. Výsledné poradie určuje súčet bodov od stylistu a od spolusúťažiacich. Od súperiek boli súťažiacim udelené bodové súčty 13, 16, 21 a 24. Ktorý bodový súčet získala od súperiek súťažiaca č. 3, ak napokon zvíťazila?



MAKTIVITY

MARTIN DOVIČÁK

ABSTRAKT. *Activity je spoločenská hra, ktorá je obľúbenou spoločenskou hrou pri stretnutiach priateľov alebo rodiny. Súčasne je hlavnou inšpiráciou pri tvorbe hry Mactivity, kde má učiteľ jedinečnú možnosť spoznať reprezentáciu vnímania žiaka matematických pojmov. Zábavná aktivita v skupinách.*

Aktívne metódy vo vyučovaní matematiky

Autor ako začínajúci učiteľ sa stretával v pedagogickej praxi so žiakmi, pre ktorých bola matematika strašiakom. Implementáciou aktívnych metód do vyučovacieho procesu autor pozoroval zapájanie sa žiakov do ich neobľubeného predmetu. Je zrejmé, že nie každý žak má rád matematiku. Ale myslíme si, že každý žiak by mal mať priestor na matematike rozmýšľať.

Aktívne metódy hodnotíme ako prínos pre pedagogickú prax, kedže jedným z ich cieľov je aktivizácia žiaka na vyučovacej hodine, po ktorej túži nejeden učiteľ. Zjednotenie definícií od všetkých autorov nie je jednoduché. M. Prince (2004, str. 223) definuje aktívne učenie ako ľubovoľnú učebnú metódu, ktorá zapája študentov do procesu učenia. Stručne povedané, aktívne učenie vyžaduje, aby študenti vykonávali zmysluplné vzdelávacie aktivity a premýšľali o tom, čo robia. Maňák (1977, str.133) sa pri aktivizujúcich metódach opiera o vnútornú motiváciu, ktorá vedie žiakov k riešeniu problémov. Mnohí autori vsádzajú ich pohľad na aktívne učenie do rámca zaoberajúceho sa podstatou uskutočňujúcej sa intelektuálnej aktivity, najčastejšie umiestnenej v rámci konštruktivistického modelu matematického učenia. (Kyriacou 1992, str. 312).

Autor sa inšpiroval spoločenskou hrou - activity, pri ktorej sa do hry zapájajú všetci hráči. Daná hra je obľubenou spoločenskou hrou pri rodinných alebo priateľských stretnutiach. Na základe atraktívnosti hry sa ju snažil autor implentovať do vyučovacieho procesu na matematike pod názvom Maktivity.

Maktivity

<u>Pravidlá:</u>

Počet hráčov: 3 - 32
Čo potrebujeme: časovač (stopky), pero a papier.
<u>Začiatok hry:</u>

Študentov rozdelíme do skupín (2-ice, 3-ice alebo 4-ice)

Učiteľ ma na svojom stole hracie karty s pojmami, ktoré sú k tematickej látke(hracie karty pripravil učiteľ alebo žiaci). Hracia karta obsahuje matematický pojem súvisiaci s aktuálnou látkou, pri ktorom je poznačený spôsob opisovania (písanie-P, rozprávanie-R, ukazovanie-U alebo ich kombinácia-K (napr. R+U) resp. otáznik-"?", ktorý predstavuje voľný výber vyjadrovacích spôsobov- vyberie si žiak).

Písanie - žiak, môže použiť len tabuľu s písacou potrebou (nerozpráva negestikuluje), Rozprávanie - žiak, môže len rozrpávať (nemôže použiť základ hľadaného slova),

Ukazovanie - žiak len použitím pantomími (svojím telom) sa snaží ukázať dané slovo (žiak nesmie používať predmety ani na ne ukazovať).

Priebeh hry:

Učiteľ losom alebo kockou určí, ktoré družstvo záčína. Družstvo, ktoré začína, vyberie jedného reprezentanta, ktorý sa pokúsi vybraným spôsobom opísať vybraný pojem. Reprezentant si vyberie jednu hraciu kartu, na ktorej ma napísané, čo bude opisovať a vedľa tohto pojmu ako ho bude opisovať.

Ukážka pojmu a bodovanie:

Trojboký hranol	Ukazovanie

Reprezentant má presne 1 minútu, ktorú stopuje učiteľ, na to aby pantomímou ukázal trojboký hranol. Počas tejto minúty háda slovne len družstvo, do ktorého patrí daný reprezentant. Počas tejto minúty súperiace tímy, môžu napísať odpoveď na papier. Ak reprezentantov tím neuhádne tento pojem. Učiteľ pozrie odpovede súperiacich tímov. Tím, ktorý má správnu odpoveď získava jeden bod. Reprezentantov tím v prípade správnej odpovede do 1 minúty získa 2 body.

V prípade ak je pojem červenou farbou hádať môžu všetky tímy súčasne. Svoje odpovede zapisujú na papier. Prvý tím so správnou odpoveďou získava 1 bod.

Koniec hry: Tím, ktorý získa ako prvý 5 bodov vyhráva a hra končí.

Rola učiteľa

Učiteľ vystupuje ako moderátor. Učiteľ môže podľa vlastného uváženia vyberať žiakom spôsob akým budú opisovať dané pojmy. Učiteľ spoznáva reprezentáciu vnímania žiaka a na základe tohto poznania môže žiakom vyberať potrebné spôsoby opisovania pojmov.

LITERATÚRA

[1] KYRIACOU, C.: Active Learning in Secondary School Mathematics.1992, British Education Research Journal 8.

[2] MAŇÁK, J.: Výukové metody,2003, Brno.

[3] PRINCE, M.: Does Active Learning Work?, 2004, A Review of the Research, Bucknell University. http://www4.ncsu.edu/unity/lockers/users/f/felder/public/Papers/Prince_AL.pdf

Mgr. Martin Dovičák, PhD.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského
Mlynská dolina F1
842 48 Bratislava
e-mail: martin.dovicak@fmph.uniba.sk

MATEMATICKÁ MEGA SHOW ĽUBOMÍRA DRUŽBACKÉHO

ĽUBOMÍR DRUŽBACKÝ

ABSTRAKT. *Žijeme v dobe zábavy. Všetci sa chcú baviť: mladí, dospelí, starí a samozrejme aj deti. Popri jednoduchej, naivnej či hlúpej zábave, existuje aj niekoľko zábavno-náučných programov, ktoré sú vo všeobecnej obľube divákov nielen na Slovensku. A čo matematika? Urobte z vyučovania matematiky show.*

Príchod do triedy

Príchod do triedy je možno pre vás tak samozrejmá vec... A možno si uvedomujete, že prísť do triedy, to nie je len tak.

Stretol som pani učiteľku, ktorá mi rozprávala o tom, že práve ten príchod do triedy je mimoriadne dôležitá vec. Že ak učiteľ vstúpi do triedy, tak si to žiaci musia všimnúť. Musia stíchnuť a vzdať úctu jeho autorite. Zaiste sa nájdu triedy a školy, kde vám nik nevzdá úctu a nebude rešpektovať vašu autoritu, aj napriek tomu, že si to zaslúžite, aj napriek tomu, že to budete od nich vyžadovať. V takom prípade mám len jednu radu: Odíďte z takej školy. Pokiaľ máte dostatočnú sebaúctu, tak to urobíte.

Počul som o učiteľovi, ktorý sa pred dverami zamračil a potom veľmi vážne a s veľký odstupom vošiel do triedy. Ináč bol celkom fajn chlap, ale na hodine sa všetci žiaci báli jeho zamračenej tváre a tak nikto nevyrušoval a pre istotu sa radšej nikto ani nič nepýtal. Ale niekedy sa žiaci potrebujú niečo opýtať…

Iní idú na hodinu s nechuťou, ďalší so strachom, so zovretým žalúdkom, čo to dnes zase bude...

A ako to robíte vy?

Urobte zo svojho príchodu do triedy udalosť. Napr. mne moji žiaci radi zatlieskajú. Nie preto, že to od nich vyžadujem. Ale tešia sa na hodinu so mnou. Keď vstupujem do triedy a vítajú ma mohutným potleskom, to je znak, že začína veľká Matematická MEGA SHOW Ľubomíra Družbackého.

Ako sa dá zaujímavo vyvolať žiak k tabuli

Aj tu vedia učitelia vyrobiť poriadne dusnú atmosféru. Dlhým listovaním v klasáku a zvažovaním koho si vytiahnu. Dávajú žiakom pocítiť svoju silnú autoritu, a súčasne tým ponižujú žiakov, hovoria im: „Pozrite akí ste maličkí, ako sa bojíte.“

To si snáď všetci pamätáme aj zo svojich žiackych, či študentských čias. Ale mali sme to radi? Ak nie, tak to nerobme ďalšej a ďalšej generácii.

Skúste urobiť presný opak. Skúste vyvolať žiaka tak, že mu dáte najavo ako si ho vážite, že vyzdvihnete jeho dôstojnosť. Ako to urobiť? Predstavte si, že moderujete veľký koncert, stojíte na javisku, pred vami je aspoň 10 000 divákov a vy chcete ohlásiť, že práve príde na javisko hviezda dnešného večera Eric Clapton alebo Taylor Swift. Stačí vymeniť meno a je to. Začnite mu spolu so žiakmi tlieskať a máte úžasnú atmosféru MEGA SHOW.

Presne takto to nejako začalo. A toto je spôsob, ktorým dokážem zaviesť MEGA SHOW do ktorejkoľvek triedy, kam idem učiť.

Namiesto skúšania robte show

Na matematike asi často vyvolávate žiakov k tabuli, aby prišli niečo vypočítať. Neviem, či aj ústne skúšate žiakov, alebo im dávate len písomné testy a písomky. Ja sám som nerád žiakov skúšal. A vďaka tomu som vymyslel svoju MEGA SHOW.

Vaše životné výzvy sú tam kde je váš talent, ktorý je zjavný, ale vaše výzvy sú aj v oblastiach, v ktorých sa trápite, v ktorých zažívate neúspechy. Aj so mnou to bolo v tomto prípade tak. Neznášal som skúšať žiakov a vzápätí ich po niekoľkých otázkach hodnotiť. Tak som vymyslel matematickú MEGA SHOW, kde si žiaci môžu zasúťažiť vo vedomostnej show a vyhrať nejakú peknú známku.

Nechajte žiakov prejaviť svoju kreativitu

Kreatívna atmosféra podporuje kreativitu. Možno žiaci prídu so svojimi nápadmi ako urobiť hodinu zaujímavou. Dovoľte im to. Budete prekvapení, čo všetko sa vo vašich žiakoch skrýva, a vy o tom neviete.

Keďže točíme našu MEGA SHOW na kameru, vždy je veľkou výzvou pre žiakov natáčanie. Kto bude stáť za kamerou dnes? Aby natáčanie bolo čo najautentickejšie, moji žiaci vymysleli, že chcú byť zvukári, osvetľovači, moderátori. Neskôr prišli s tým, že si chcú natočiť krátku reklamu. Sami počas hodiny vymysleli námet a natočili to. Celé to netrvalo ani 30 sekúnd a pokračovali sme v matematike. Ak im venujete tých 30 sekúnd, hodina bude zaujímavejšia a uvidíte, že stihnete možno viac ako počas normálnej hodiny. Odpadne totiž zbytočné upozorňovanie, naliehanie na robenie poznámok a pod.

„Musíme niečím ozvláštniť hodinu, pán učiteľ“

Možno často máte pocit, že koľko sa na svojej hodine narozprávate, navysvetľujete, ako sa žiakom rozdávate, že ste na roztrhanie... Ak by ste však nabrali odvahu a natočili si svoju hodinu, možno už počas natáčania by ste si začali uvedomovať, že ten materiál nie je a nebude divácky veľmi zaujímavý. Dokonca by ste možno prišli na to, že vaša hodina je nudná. Toto veľmi citlivo vnímajú moji žiaci, ale aj vaši žiaci. Ak ich budete počúvať, môžu vás posunúť výrazne dopredu. Iste, verím, že vaši žiaci nie sú na hodinách matematiky iba divákmi, že sú zapojení do vzdelávacieho procesu, že sú aktérmi. Predsa však aj aktéri sa budú radšej podieľať na niečom zaujímavom ako na niečom nudnom.

Keď moji žiaci počas natáčania začali vnímať, že to začína byť akési príliš monotónne a show stráca na svojej zaujímavosti, povedali mi túto nádhernú vetu: „Musíme niečím ozvláštniť hodinu, pán učiteľ.“ Vo vrecku som mal karty. Začal som improvizovať. Vybral som z balíčka kráľa a kráľovnú. A hovorím im: „Áno. Máte pravdu. Tak teda, už boli pri tabuli dvaja chlapci a mohli by nám už prísť aj nejaké dievčatá. Chlapci budú teda králi – Kings a dievčatá budú kráľovné – Qeens. Takže budeme teraz losovať a čakáme, že už by nám mohli prísť aj nejaké dievčatá.“ Karty som zamiešal a nechal jednu žiačku, aby vytiahla jednu kartu. Vytiahla kráľa. To však nehralo do karát mne a tak som sa zháčil a vyhlásil som: „Aj ja jaj, takže králi nepôjdu!“ Všetci to zobrali ako vydarený vtip a ja som hodinu ozvláštnil tým, že som na javisko, teda pred tabuľu vyvolal jedno dievča.

Myslím, že jedna z najdôležitejších vecí v živote človeka je humor. Veľké využitie má aj na hodinách matematiky. Rozvíja logiku, ale dobrý humor rozvíja aj medziľudské vzťahy. Existuje aj zlý humor, urážlivý, ktorý znevažuje druhých. Preto je dôležité sa tejto oblasti venovať a učiť sa dobrosrdečnému humoru, ktorý každého rozosmeje a pri ktorom nik nevyroní slzu. Dobrý humor vám pomôže aj v neľahkých chvíľach zostať nad vecou.

Skupinové učenie

Skupinové učenie je dnes veľmi preferované. Povedal by som, že je to taká topka v dnešnom pedagogickom systéme. Alebo by aspoň chcela byť. Možno sa mnohí učitelia skupinovému učeniu bránia, prípadne keď ho vyskúšali, tak boli z neho sklamaní. Aj keď nechcem na tomto mieste podať nejaký komplexný návod na skupinové učenie, rád by som učiteľov povzbudil ku skupinovému učeniu a uviedol zopár postrehov z praxe.

Predovšetkým budem úprimný a poviem, že sám som pred niekoľkými rokmi hovoril, že sa to nedá. Chápem všetkých, ktorí s tým ešte nie sú stotožnení. Je to proces, tak u žiakov ako aj u učiteľa. Skupinové učenie nie je niečo, čo by ste mohli v triede zaviesť len tak, lebo dnes ráno vás to napadlo. Preto povzbudzujem všetkých tých, ktorí si to už vyskúšali a majú z toho zmiešané, či dokonca negatívne zážitky. Skúšajte to ďalej, hľadajte spôsob, ktorý by vyhovoval vám aj vašej triede.

1. Prekonajte strach. Napr. vo mne bol strach, že to mnohí budú mať v zošitoch, či pracovných zošitoch zle a ja to budem musieť znova všetko vysvetľovať a nebude na to čas.

2. Dôverujte svojim žiakom. Možno ste učiteľ alebo učiteľka, ktorý/á rada vysvetľuje, neustále radí, chce tých žiakov posunúť dopredu … a to hneď. Ale matematika je práve o riešení, o hľadaní riešenia, o uvažovaní. Možno ani netušíte, ale vaši žiaci, by na obrovské množstvo problémov prišli aj sami, bez vašej pomoci. Možno sa budú musieť zamyslieť, ale práve o to tu ide. Dajte im na to čas. Možno na to neprídu hneď, ale vyskúšajte to.

3. Rozdelenie skupín. O tom ako rozdeliť žiakov do skupín asi nájdete množstvo rád v odbornej literatúre. Vedľajší pozitívny účinok skupinového učenia by mala byť výchova ku kooperatívnemu sa správaniu. V praxi je to obrovská dilema a keďže ja mám radšej prax ako teóriu, poviem o tom ako to robím ja a prečo. Ja vlastne nerozdeľujem žiakov do skupín. Poviem: „Rozdeľte sa do skupín." A oni sa rozdelia podľa svojho vkusu, podľa priateľstiev. Možno to niektorí pedagógovia považujú za zlé, za nesprávne. Ale z môjho pozorovania života viem, že priateľstvo sa nedá nanútiť. Keďže sa žiaci rozdelia sami, neriešim problémy typu: „Ja s tým nebudem sedieť." „Ja s tým nebudem spolupracovať." A teda žiaci sa hneď po rozdelení do skupín venujú matematike. Jedna podmienka, ktorú si dávam, je aby skupinka bola maximálne štvorčlenná. Na druhej strane, keďže sa žiaci rozdelia podľa svojich sympatií, často sa stane, že niektorí ostanú sedieť aj sami. Čo s tým? Ak by ste si urobili sociogram, tak pochybujem, žeby sa vám v ňom žiaci rozdelili do štvorčlenných skupiniek. Ja nemusím robiť sociogram, pretože stačí keď poviem: „Rozdeľte sa do skupín", a mám sociogram v 3D podobe pred sebou. Samozrejme, že sú tam väčšie skupinky, menšie skupinky aj outsaidri. Ak niekto zostane sám, idem za ním a pozývam ho, aby sa pripojil k niektorej skupinke. Niekedy pozvanie príjme, niekedy nie. Môžete mu ponúknuť inú skupinku. Môžete dať návrh niektorej skupinke, či by neprijali toho alebo toho žiaka. Ale všetko je to proces. Možno sa vám po niekoľkých mesiacoch

podarí niektorého žiaka začleniť. Ale význam to bude mať len vtedy, ak to bude založené na slobodnej voľbe. Ani priateľstvo, ani efektívnu spoluprácu nemôžete nanútiť.

4. Delegujte svoju zodpovednosť na šikovných žiakov, oni to vysvetlia tým slabším. A vy nebudete na tú triedu sám/a. Stanovte si svoje pravidlá. Napr. super pravidlo je, že skupinka nejde ďalej, dokiaľ tomu nerozumie najslabší žiak v skupine. Najslabší žiak je teda dôležitý. Je akoby kontrola nad celým vyučovacím procesom. Šikovných žiakov nebrzdí, naopak núti ich, aby dokázali o probléme hovoriť, aby ho vedeli vysvetliť, aby ho lepšie pochopili a zapamätali si jeho riešenie. Ak vidíte, že niektorý zo žiakov to nevie pochopiť a skupinku naozaj brzdí, tak ste tam vy a môžete mu to vysvetliť vy.

5. Budete musieť tolerovať zvýšenú hladinu hluku. To je pre učiteľa asi to najťažšie. Samozrejme snažte sa hladinu hluku regulovať, aby ste boli aj vy v psychickej pohode. Ak sa to nebude dariť ukončite skupinové vyučovanie aj počas hodiny. Ak vás bude skupinové učenie príliš vyčerpávať, dajte si od neho pauzu. Musíte pozerať na seba a byť v pohode. Vždy bude dostatok času a priestoru to vyskúšať znova.

6. Načúvajte hlasu triedy. Počas natáčania jednej MEGA SHOW, kedy žiaci pracovali v skupinkách som dostal otázku: „Pán učiteľ, a bude tu ešte niečo zaujímavejšie ako skupinky?“

Vymyslite si svoju hru a jej pravidlá

Jeden z mojich obľúbených projektov, ktoré dávam svojim žiakom je: *Vymyslite svoju pravdepodobnostnú hru*. Spoločenské hry sú momentálne in. Mnohé z nich sú založené na pravdepodobnosti. Náhoda vzbudzuje napätie, záujem, prináša rôzne zvraty. A tak som tie najnudnejšie veci na vyučovaní začal ozvláštňovať náhodou.

Ak potrebujete prepočítať niekoľko cvičných úloh, môžete otvoriť učebnicu alebo pracovný zošit a počítať jednu úlohu za druhou. Ale nie každého to baví, resp. nie každého to baví dlhodobo. Ale ako to urobiť ináč?

Prišiel som do triedy a hovorím svojim žiakom: „Mám tu balíček zvláštnych kariet, na ktorých je napísaný váš osud.“ Trieda zamrela prekvapením: „Óóó.“ To preto, lebo si rozumieme a oni na moje nápady reagujú s nadšením a nikdy nie cynicky. Vzájomne si nahrávame pred tabuľou ako Voskovec a Werich na javisku, rozumieme si, vážime si jeden druhého: ja ich a oni mňa. „Okrem toho, mám tu ešte dve špeciálne karty: kráľa a kráľovnú. Na tých nie je váš osud a kto si vytiahne kráľa alebo kráľovnú, ten môže vyvolať niekoho iného.“

Žiakov k tabuli vyberalo koleso šťastia a potom si mohli vybrať jednu z kariet, na ktorých bol napísaný ich osud. Raz to boli úlohy na sčítavanie zlomkov, inokedy úlohy na grafické sčítanie dvoch uhlov, či na rozdelenie uhla na dve polovice, na inej hodine zase bolo na kartách napísané zadania typu: „nájdi 5 násobkov 14-tky“, „nájdi všetky delitele čísla 36“ a pod.

Prekvapte ich

Asi všetci máme radi milé prekvapenia. Rozbaľovanie darčekov. Nečakané stretnutia s blízkymi, či priateľmi. Keď na javisko príde nečakaný hosť. A možno príde aj kúzelník.

Ozaj kúzelníka milujú všetky deti a dobrých kúzelníkov milujú aj dospelí. Toto všetko milujú aj vaši žiaci. Tak im to doprajte.

Rád svojim žiakom niečo vykúzlim. Kúzlenie spočíva v *šikovnosti* a potom z veľkej časti z *umenia komunikácie*. Nemyslím si, že som v kúzlení nejako obzvlášť šikovný. Kúzelnícka šikovnosť vyžaduje tvrdý tréning a na ten ako učitelia si len málokto z nás nájde čas. Ale učenie a kúzlenie majú jednu vec spoločnú, obidva sú umením komunikácie. Pomocou slov môžete vytvoriť predstavu únikovej miestnosti a žiaci sa zrazu môžu pred tabuľou cítiť ako v tmavej miestnosti plnej nástrah a nebezpečenstiev v pevnosti Boyard, z ktorej sa usilujú dostať. Pomocou slov môžete vzbudiť u žiakov rôzne túžby, predstavy a potom ich prekvapíte, možno niečím úplne iným, čo nečakajú.

Jedna z mojich obľúbených hodín je vyučovanie mierky mapy. Z čarovného kufríka im vykúzlim rôzne modely stíhačiek, vrtuľník, bager, tigra, slona. Opýtam sa ich, na to, ako som to dokázal. Žiaci postupne prídu na to, že som tie predmety zmenšil. Potom im ich rozdám do skupiniek, prezradím im v akej mierke sú zmenšené a oni musia meraním zistiť ich skutočné rozmery. Potom sa ešte snažíme odhadom zistiť, či by takáto stíhačka alebo bager v skutočnej veľkosti vošla/vošiel do našej triedy. Keď zazvonilo oznámil som im smutnú správu: „Naša MEGA SHOW sa bohužiaľ končí.“ A dostal som odpoveď: „Bola úžasná.“

Nechajte sa fascinovať pamäťou

Väčšinou úsilie autorov učebníc matematiky, profesorov matematiky a matematikov vôbec sa sústreďuje na to, aby sa matematika učila logicky, aby ju deti pochopili, aby jej rozumeli. To všetko je úplne samozrejmé, pretože my matematici sme sa sami radi učili práve takto. Potrebovali sme problém pochopiť, potrebovali sme nachádzať a nájsť logické súvislosti. A to je správne. Ale nepripadá mi to dôležité pripomínať učiteľom matematiky. Problém je však v tom, že my učitelia matematiky sme rezignovali na pamäť. V iných oblastiach je kapacita pamäte využívaná asi viac a možno aj preto vnímame matematiku ako tú, ktorá by mala vyvážiť memorovanie na iných predmetoch práve logickým uvažovaním. Predsa len: „Nechajte sa fascinovať pamäťou. Pamäť je úžasná.“ Koniec-koncov, aj keď sa to neučí na školách, práve v matematike sa vyvinula najprepracovanejšia technika memorovania: memorovanie čísla π.

Mám osobnú skúsenosť s tým, a určite nie som jediný, že žiaci sa odmietajú čokoľvek naučiť poctivo naspamäť, zapamätať si niečo dlhodobo. Vidíme to už u tých najmladších, ktorí prídu na druhý stupeň a nevedia malú násobilku. Veď načo, keď si to viem vypočítať na kalkulačke? A vo vyšších ročníkoch už človek rezignuje: „No tak nech si to teda vypočítajú na tej kalkulačke.“ Ale to sa premieta do učenia všeobecne: „Načo sa to budem učiť, veď si to nájdem na internete.“ A naozaj, na internete sa dajú nájsť riešenia tých najťažších matematických problémov, dá sa tam nájsť história nielen matematiky, na internete sa dajú nájsť podrobné rozdelenia aj podrobné opisy z tých najrozmanitejších oblastí. Avšak takto sa redukuje a deformuje osobnosť každého žiaka. Rozdiel medzi tým šikovným, ktorý na to mal a možno ešte stále má a medzi tým slabým, ktorý na to fakt nemá je minimálna. Lebo ten šikovný sa to odmietal a odmieta naučiť. Rozdiel je snáď len v tom, že ten šikovný si to vie na internete trošku šikovnejšie vyhľadať. To je všetko. Bez internetu sú na tom skoro rovnako. Tento trend vidíme napr. aj v doterajšom Testovaní, kedy sa od žiakov nevyžaduje vedieť vzorce naspamäť. Veď načo? V bežnom živote si ich nájdu na internete a na Testovaní im ich napíšeme na poslednú stranu, aby teda neboli stratení.

Ja od svojich žiakov vyžadujem, aby tie vzorce vedeli naspamäť. Najprv sa teda zo všetkých síl snažím, aby im rozumeli. Ale potom chcem, aby sa ich naučili naspamäť. A mohli by to urobiť doma. Lenže logika súčasného sveta im hovorí: „Načo to budeš robiť. Je to úplne zbytočné.“ A tak je dobre ich k tomu povzbudiť, najlepšie zábavnou formou.

Ponúknem žiakom účasť v takejto hre. Hra je určená pre dvoch, prípadne troch alebo aj štyroch hráčov. Na jednoduchých papierových kartičkách mám z jednej strany napísaný názov vzorca a z druhej strany samotný vzorec. Dobre je jednu a druhú stranu odlíšiť farebne; inou farbou pera. Poukladám kartičky na stôl podobne ako pri pexese; na hornej strane je názov vzorca.

Prvý level spočíva v tom, že hráči striedavo ťahajú ľubovoľnú kartičku. Teda snažia si vyberať tie, na ktoré poznajú odpoveď. Ak odpovedajú správne, získavajú túto kartičku. Pokiaľ hráč nevie odpovedať, otočí kartičku, prečíta si správnu odpoveď, snaží sa ju zapamätať, ale kartička pripadne spoluhráčovi. Pokiaľ sa vám toto kritérium bude zdať nespravodlivé, pretože súper tiež nepozná správnu odpoveď; dajte kartičku bokom. Na konci hry sa spočítajú získané kartičky, ktoré určujú víťaza. Samozrejme, vy si môžete urobiť hodnotiacu stupnicu a odmeniť ich peknou známkou.

Druhý level spočíva v tom, že súper vyberá kartičku svojmu protihráčovi, ktorú musí správne zodpovedať. Za krátku chvíľu sa tých desať až pätnásť vzorcov, ktoré od nich vyžadujete, naučia aj tí najslabší. A ešte to bude pre nich zaujímavé.

„Pán učiteľ, poďme von!“

V niektorých oblastiach Slovenska býva v máji a v júni naozaj veľmi teplo. Niektoré školy dokonca mávajú kvôli vysokým teplotám skrátené vyučovanie. A naozaj vydržať v neklimatizovanej triede šesť hodín pri vonkajších teplotách nad 30°C nie je jednoduché.

Avšak učiť matematiku vonku nie je samozrejmosť. Existuje pekná úloha, ktorú som robil so žiakmi vonku a to je meranie výšky budovy, príp. výšky stromu pomocou tieňa. Ale čo iné hodiny matematiky?

Na návrh svojich žiakov: „Pán učiteľ, poďme von!“ Som vymyslel hodinu, na ktorej žiaci mali zostrojiť trojuholník na asfaltovom basketbalovom ihrisku. Ako pomôcky sme využili školské kriedy, najmä tie farebné a pravítka a kružidlá na tabuľu. Žiaci pracovali v skupinkách. Najprv som každej skupinke kriedou napísal na asfaltové ihrisko zadanie a potom už pracovali sami. Najprv si urobili rozbor, náčrt, samotnú konštrukciu a postup konštrukcie.

Rysovanie na chodník alebo na asfaltové ihrisko je výborná vec a dá sa realizovať takmer s každou triedou. Vo vyšších ročníkoch môžete narysovať aj zložitejšie geometrické útvary, rozety, či nejaké logo založené na geometrickom obrazci.

Pouvažujte nad tým počas roka, čo všetko by sa dalo odučiť v tieni stromov, na školskom ihrisku, prípadne na iných priestranstvách v blízkom okolí vašej školy. Keď prídu horúčavy určite sa vám to zíde.

Obrázok 1: V tieni stromov bolo fakt príjemne

Mgr. Ľubomír Družbacký
ZŠ Nová Dedinka
Hlavná 45
SK – 900 29 Nová Dedinka
e-mail: lubo.dr@gmail.com

MATEMATIKA V KONTEXTE

JOZEF HVORECKÝ

ABSTRAKT. *V povedomí verejnosti vládne presvedčenie, že „matematika = výpočty". V článku ukazujeme, že výpočty tvoria iba časť matematiky. Poznať vzorce nestačí. Dôležité je aj vedieť, kedy, ako a či vôbec daný vzorec aplikovať. Článok obsahuje rad úloh, pomocou ktorých sa dá priblížiť reálnejší pohľad na matematiku a jej úlohu vo svete.*

Úvod

Matematika nepatrí medzi obľúbené predmety. Laický, ale vhodne formulovaný názor na príčiny tohto – verejnosťou akceptovaného názoru – uvádza Ivaška [1]. Z hľadiska „marketingu" matematiky nedostatok spočíva aj v matematikoch, ktorí nevenujú jej popularizácii dostatočnú pozornosť [2]. Veľa „celebrít" či dokonca odborníkov z humanitných odborov priznáva, že s ňou mali na škole ťažkosti a nehanbia sa za tento nedostatok svojho vzdelania [3]. Opačný – pozitívny – postoj k vzdelaniu sa síce vyskytuje aj medzi celebritami [4], je však zriedkavý. V článku sa zameriavame na problém vytvárania kladného vzťahu k matematike, na vysvetlenie jej úlohy v reálnom živote, ako aj na objasňovanie hraníc jej pôsobenia.

Cieľom článku je prostredníctvom vhodne volených a ľahko zrozumiteľných úloh ukázať, že:

- Matematika je silný, ale nie všemocný nástroj.
- Prítomnosť čísel v texte neindikuje potrebu počítať.

- Z praktického hľadiska môže byť nepresný výsledok užitočnejší ako presný.
- Zaujímavé matematické úlohy sa dajú využiť na rozvoj nematematických vedomostí a zručností.

V úvahách vychádzame z poznatkov znalostného manažmentu, moderného prístupu k manažmentu. Vychádza z poznania, že úspechy jednotlivcov aj tímov sa opierajú nielen o ich explicitné poznatky (vzorce, návody, zákony a ďalšie viac či menej presne formulované výroky, ktorými sa riadime pri riešení), ale aj o ich tacitné poznatky (porozumenie súvislostí medzi poznatkami, analýza ich aplikovateľnosti v daných podmienkach, posúdenie zmysluplnosti vzhľadom na daný problém, ale aj o všeobecnejšie platné zásady, akými sú systém spoločensky akceptovaných hodnôt, schopnosť sociálnej komunikácie, vzťahy jednotlivcov v skupine riešiteľov atď.)

Dosiahnutie úspechu vo vzdelávaní musí rešpektovať obidve tváre poznania – explicitnú aj tacitnú – a vhodne ich akcentovať. Prostredníctvom série úloh ukážeme, ako sa dá obohatiť vyučovanie matematiky tak, aby túto úlohu spĺňalo.

Zdanlivo nezmyselné riešenie

Rozdiel medzi riešením založeným na explicitných poznatkoch ilustrujeme na študentskej úvahe, ktorú uvádza Greer [5]. Úloha znela: "*Na pastvine je 125 oviec a 5 psov. Aký starý je pastier?*" Úloha je samozrejme neriešiteľná. Počet oviec a psov nesúvisia s vekom pastiera. To znamená, že údaje potrebné k vyriešeniu nemáme. Napriek tomu študent pokračoval: "*125+5=130... to je príliš veľa, aj 125–5 je ešte veľa... ale ... 125/5=25 ... to vyzerá rozumnejšie... Myslím, že pastier má 25 rokov.*"

Zamyslime sa nad jeho riešením z pohľadu znalostného manažmentu. Študent preukázal explicitné znalosti: poznal aritmetické operácie a vedel ich realizovať. Tacitné znalosti mu vraveli, že vek by sa mal pohybovať v „rozumnom" intervale, povedzme 15 až 70 rokov. Skúsenosť z predchádzajúcich lekcií mu napovedala, že manipuláciou s číslami sa dá dopracovať k výsledku. Zároveň vedel, že na hodinách matematiky je dôležité, aby nejaké riešenie našiel. Tento pocit (potreba nájsť riešenie) prehlušil skutočnosť, že nemá adekvátne dáta. Jednoducho si ich „vyrobil" zo znenia úlohy. Inak povedané, potreba konať zvíťazila nad racionálnosťou.

Výsledok študenta je v rozpore s racionalitou. Nie je však absurdný (úplne iracionálny), je len nie-úplne-racionálny. Tacitný poznatok „v slovných úlohách sa riešenie počíta z uvedených údajov" odstránil prekážku riešenia „vstupné údaje musia byť rovnakého typu ako výstupné". Nie-úplne-racionálne správanie psychológovia už dávnejšie pozorovali aj u oveľa kvalifikovanejších jedincov, dokonca aj v situáciách s vážnymi dôsledkami, napríklad u manažérov [6]. Riešenie teda nie je alogické v pravom zmysle slova, je skôr výsledkom racionálne úvahy postavenej na nevhodných predpokladoch.

Z pedagogického hľadiska je dôsledkom faktu, že žiaci sa s podobnými úlohami nestretávajú a preto sa v ich podvedomí vytvorí tacitná znalosť „*Každá úloha, ktorú učiteľ zadá, má riešenie.*" Nelogická činnosť je iba bezprostredným (a vlastne „logickým") vyústením tohto presvedčenia.

Cestou k minimalizovaniu takých nedorozumení je hľadanie, vytváranie a využívanie neštandardných úloh, ktoré budú nútiť žiakov zamyslieť sa nad textom a položiť si otázku, či má vôbec zmysel hľadať jej riešenie prostredníctvom výpočtov. Skôr, ako sa žiak pustí do riešenia, mala by mu mysľou prebehnúť otázka: *Dá sa to vôbec riešiť výpočtom?* Kontrast vidieť na nasledujúcich „trojčlenkách“:

- *Jeden kôň váži 700 kg. Koľko váži 10 koní?*
- *Jeden kôň beží rýchlosťou 20 km/hod. Akou rýchlosťou beží 10 koní?*
- *Jeden kôň je bielej farby. Akej farby je 10 koní?*

Namiesto „riešenia“ je užitočnejšie diskutovať, v ktorých z nich sa aritmetické operácie (v danom prípade násobenie) dajú použiť a prečo áno alebo prečo nie. Žiakov baví vymýšľať podobné úlohy, čo sa dá využiť na hlbšie pochopenie pojmov riešiteľnosť a vypočítateľnosť. Hoci ide o náročné filozofické koncepty, na základnej intuitívnej úrovni sú potrebné v každom veku. Na ilustráciu uvádzame podobnú sériu:

Máme doma tri mačky.

- *Jedna mačka chytí za deň tri myši. Koľko myší chytia za deň všetky mačky?*
- *Jedna mačka vylezie na vrchol stromu za dve minúty. Ako rýchlo vylezú na strom tri mačky?*
- *Najstaršia mačka sa volá Cilka. Ako sa volajú všetky mačky?*

Nepresná hodnota je užitočnejšia ako presná

Ďalším častým nedorozumením je presvedčenie, že matematika nás mám naučiť presnosti, lebo tá sa cení nadovšetko. Ani to nie je pravda. Položme si nasledujúce otázky:

- *Koľko máš rokov?*
- *Koľko máš mesiacov?*
- *Koľko máš týždňov?*
- *Koľko máš dní?*

Odpoveď na prvú otázku dá – z hľadiska určenia veku spytovaného – najmenej presnú hodnotu, posledná najpresnejšiu. Napriek tomu používame najčastejšie prvú, ďalšie iba pri novorodencoch a batoľatách. Prečo?

V reálnom živote – na rozdiel od matematiky – nie je vždy dôležité pracovať s presnými hodnotami. Je užitočnejšie vedieť, že niekto má niečo vyše 38 rokov ako to, že má presne 14 068 dní. Vek v rokoch sa ľahšie pamätá, zriedkavejšie sa mení a dotyčného zaraďuje aj generačne. V sociálnej komunikácii ľudia uprednostňujú tieto funkcie, ktoré počty týždňov, mesiacov a dní nespĺňajú.

V reálnom živote používame nepresné (približné) údaje často preto, lebo presné sa zistiť nedajú. *Aký je počet obyvateľov Slovenska?* Zistiť to presne je v podstate vylúčené. Počas rátania takmer s istotou niekto zomrie, niekto sa narodí, ďalší na natrvalo odsťahuje a tak ďalej. Približný údaj (päť a pol milióna) je na bežné účely oveľa vhodnejší. V praxi sa pravidelne využívajú mierne zastarané údaje, napríklad z predchádzajúceho sčítania obyvateľstva.

Podobne je to z údajmi z oblasti štatistiky. Hoci agentúry na prieskum verejnej mienky zverejňujú prieskumy volebných preferencií s presnosťou na jedno desatinné miesto, netreba im príliš dôverovať. Neodstrániteľná chyba, ktorej sa v dôsledku výberu vzorky dopúšťajú, je okolo 3%. Uvádzanie desatinných miest je preto skôr snahou agentúry pôsobiť „informovane“ a „vedecky“ než reálnym odrazom názorov voličov. (A to neberieme do úvahy, že respondenti v prieskumoch občas klamú.)

Práve vďaka tacitným poznatkom – po uvedomení si nepresnosti údajov a orientačného charakteru výsledku – sa dokážeme pomocou informácie orientovať a získať dostatočne dobrý obraz daného stavu. Odhady je vhodné precvičovať aj so žiakmi. Možno začať jednoduchými úlohami, ktoré ich nútia vnímať kontext, do ktorého je úloha vložená:

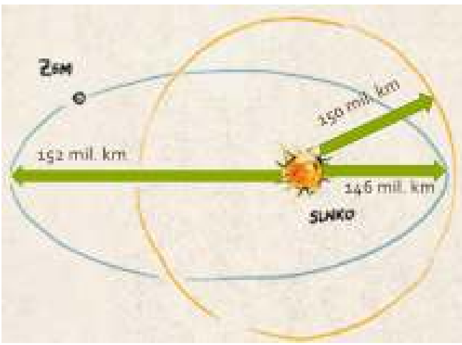
- *V ktorom meste chodí viac žiakov do základnej školy – v Košiciach alebo v Poprade?*
- *Ktorými vlakmi sa denne odvezie viac cestujúcich – rýchlikmi alebo osobnými?*
- *Zostaň bez pohybu tam, kde si. Odhadni, koľko okien má tvoja škola.*
- *Koľko (približne) žiakov má tvoja škola? Ako si uvažoval, kým si prišiel k výsledku?*

Názornosť

Mnohé časti učiva žiakom pripadajú nadbytočné, príliš abstraktné a v praxi neuplatniteľné. Ktokoľvek si vie predstaviť, že hľadanie priesečníkov kružnice a elipsy je ťažká úloha, pričom jej budúce využitie je otázne. Poukázanie na konkrétny príklad, kde sa tento problém vyskytuje v našom okolí, môže jednak zlepšiť pochopenie problému, jednak ukázať, že aj takýto – z terminologického hľadiska extrémne náročný problém – sa dá riešiť jednoduchou úvahou bez zložitých rovníc.

- *Zem je najbližšie k Slnku v januári. Vtedy je od neho vzdialená 146 miliónov km. Najďalej od Slnka je v júli. Vzdialenosť medzi nimi je 152 mil. km. Existuje deň v roku, keď je Zem od Slnka vzdialená presne 150 miliónov km?*

S použitím poznatkov z fyziky načrtneme situáciu (viď obr. 1), pričom treba vysvetliť, ako vznikla elipsa a ako kružnica. Tým jednak posilníme medzipredmetové vzťahy, jednak ponúkneme návod na riešenie.



Obr. 1 Dráha Zeme okolo Slnka [7]

Z obrázku je jasné, že riešenie existuje. Praktický pohľad na problém môžeme posilniť doplňujúcimi otázkami:

- *Je v roku viac takých dní? Koľko?*

- *Viete odhadnúť, kedy asi nastávajú?*

Podľa vyspelosti žiakov je možné buď na tomto mieste skončiť alebo pokračovať v riešení analytickými nástrojmi. V prvom prípade stačí povedať, že tento problém dnes vedia astronómovia vyriešiť rýchlo a efektívne vďaka počítačom – a tým vytvoriť väzbu na tretí predmet, informatiku.

Logické úvahy

Matematika nie je iba o výpočtoch, je aj o priestorových predstavách. Predchádzajúca úloha sa dá rozvinúť do pokračovania, ktoré posilní priestorovú predstavivosť žiakov:

- *Existuje hviezda, od ktorej je Zem vždy rovnako ďaleko?*

Jednoduchá odpoveď je záporná. Slnko je hviezda. Zo zadania vyplýva, že vzdialenosť Zeme od nej sa mení.

Zložitejšia odpoveď pripúšťa existenciu takej hviezdy za týchto predpokladov: Hviezda sa pohybuje okolo ohniska v rovine rovnobežnej so Zemou po elipse. Ohnisko elipsy sa nachádza na kolmici k ekliptike a to tak, že hviezda sa vždy nachádza presne nad (resp. presne pod) Zemou. Teoreticky takýchto hviezd môže byť nekonečne veľa, pričom roviny, v ktorých hviezdy obiehajú (napríklad každá z nich ako jeden z partnerov v dvojhviezde) budú rovnobežné.

Najzložitejšia odpoveď je opäť záporná. Predchádzajúca odpoveď predpokladá stabilnú situáciu. Lenže do hry vstupujú pohyby ďalších vesmírnych telies. Vesmír sa rozpína. Slnečná sústava pohybuje sa voči stredu Mliečnej dráhy. Veľké planéty ako Jupiter a Saturn (ale napríklad aj Mesiac) spôsobujú, že dráha Zeme nie je dokonale eliptická. V dvojhviezde by rovnakú úlohu hral jej partner. Takže aj keby sme zanedbali rozpínanie vesmíru a pohyb Slnečnej sústavy v galaxii, vzhľadom na to, že Jupiter a Saturn pôsobia z „vonkajšej" strany elipsy, kým hviezdny partner z „vnútornej" synchronizácia pohybov je vylúčená. Vždy budú vznikať určité odchýlky.

Uvedená úloha a jej riešenia sa môžu zdať zbytočne prekomplikované. Ich úlohou však nie je rozvíjať výpočtové schopnosti, ale geometrické predstavy a predstavy o vesmíre a trochu sa hrať hru „čo by bolo, keby..." Navyše dovoľuje návrat k rovnakej úlohe podľa vyspelosti žiakov, resp. študentov.

Skrytý zmysel výpočtov

Do výučby sa dajú začleniť aj také úlohy, ktoré odhaľujú aj iné faktory – či už matematické alebo sociálne. Takou netradičnou úlohou môže byť:

- *Na niektorých benzínových pumpách sa ceny uvádzajú s tromi desatinnými miestami, teda aj so desatinami eurocentov. Desatinami centu sa platiť nedá. Prečo to teda obchodníci robia?*

Cieľom diskusie je naučiť žiakov vnímať informáciu ako celok a pochopiť, že všetky jej zložky hrajú určitú úlohu. V určitom zmysle je to aj prevencia pred ignorovaním „maličkých písmen pod čiarou" v zmluvách.

Žiakov treba viesť aj k tomu, aby si všímali aj ďalšie uplatnenie čísel (či vzorcov) v okolí:

- *S akým najväčším číslom si sa stretol vo svojom okolí? V akom výpočte alebo situácii sa vyskytovalo?*

V závislosti na preberanej látke môže mať úloha viacero variant (najmenšie číslo, najzložitejší zlomok, číslo s najväčším počtom desatinných miest a pod.)

V aritmetických operáciách sa uplatňujú zákonitosti, ktoré sa bežne nevyučujú. Trochu zamyslenia nad nimi poskytujú úlohy podobné nasledujúcim:

- *Ktorou cifrou končí súčin 540 237 744 a 8 952 011 463? Prečo?*
- *Ktorou cifrou začína podiel 8 952 011 463 a 540 237 744? Prečo?*

Netreba vykonať dané výpočty. Stačí využiť vedomosti na úrovni malej násobilky.

Úlohy, ktoré vyzerajú na pohľad absurdne sa dajú využiť aj na získavanie komunikačných a organizačných zručností:

- *Predpokladajme, že do výšky vyskočíš asi 1,5 m. Koľko spolužiakov potrebuješ na to, aby ste preskočili Eiffelovku?*

Je to jedna z úloh, v ktorých dochádza k rozporu medzi ich formálnou riešiteľnosťou a praktickou neuskutočniteľnosťou. Je absurdná a tacitné poznatky nám hneď naznačia, že aj v realite neriešiteľná. Napriek tomu sa dá v škole využiť na rozvoj sociálnych zručností a budovanie kolektívneho ducha. Uplatniť sa môžu aj tí, ktorým matematika príliš nejde. Vďaka zaradeniu v komunite neutrpí ich sebadôvera:

- *Zorganizujte s kamarátmi súťaž „Preskočíme Eiffelovku“. Vymyslite spolu ich pravidlá, určite miesto a čas konania pretekov, rozdeľte si úlohy. Vyzvite na súťaž ostatné triedy.*

Možné východisko

Matematika počas tisícročí svojej existencie zhromaždila obrovské množstvo explicitných poznatkov. Ako príklad uveďme viac ako tisícstranovú knihu [8], ktorá je ich prehľadom v technických vedách. Na druhej strane ten, kto ich chce využiť, musí mať kvantum tacitných poznatkov. Vďaka nim usúdi, ktorý z desiatok tisícov vzorcov práve potrebuje, ktorými vstupnými údajmi nahradí parametre, ktoré sú v ňom uvedené, ako bude môcť interpretovať výsledok atď. Sústava potrebných tacitných poznatkov nie je v knihe uvedená. Je to pochopiteľné, lebo jej autori si nedokážu predstaviť všetky možné aplikácie, ktoré k danému vzorcu povedú.

Úlohou matematiky ako vednej disciplíny je predovšetkým nájsť riešenia a odôvodniť ich správnosť. Problémy, ktorých riešenia matematici nájdu, sú k dispozícii aj všetkým ostatným vedcom bez ohľadu na konkrétnu vednú oblasť. Treba však dodať, že aj explicitné matematické poznatky vznikajú vďaka tacitným. Sú nimi skúsenosti z predchádzajúcich riešení, schopnosť „vycítiť“ postup, ktorý pravdepodobne povedie k riešeniu, ale aj schopnosť spoznať, kedy sa riešiteľ ocitol v slepej uličke. Rozvoj (lokálne orientovaných) tacitných poznatkov je preto aj v matematike predpokladom dlhodobého úspechu.

Vyučovanie matematiky by malo byť postavené na príbehoch. Príbehy sú historicky najstaršou formou odovzdávania poznatkov – a práve dej je nositeľom explicitných aj tacitných poznatkov zároveň. Pretože príbeh môže nadobudnúť veľa foriem (poviedka, rozprávka, divadelná hra, filmový scenár a pod.), netreba ich vždy podávať ako text. Môžu mať aj podobu spoločenskej aktivity (napríklad ako zdolanie Eiffelovej veže sériou skokov do diaľky). Tak, ako podobné príbehy prežívame individuálne, individuálne sa rozvíjajú aj naše tacitné vedomosti.

Napriek ich rozmanitosti a neopísateľnosti (veď sa nachádzajú iba v našich hlavách) je ich postavenie nenahraditeľné. V dobe internetu nie je totiž ťažké nájsť explicitné poznatky. Lenže tie bez tacitných poznatkov nemajú zmysel. Preto ich treba počas vyučovania ponúkať. Žiakov znechucuje učiť sa nudnou formou poznatky, ktorých úloha a zmysel im nie sú jasné. Memorovanie a mechanické opakovanie osvedčených postupov by nemalo predstavovať jadro výučby. (To neznamená, že isté explicitné poznatky nemajú nadobudnúť aj memorovaním, napríklad malú násobilku.) Výsledkom drilovania vzorcov a automatizovaním výpočtov môže byť iba deformované vnímanie matematiky, vedúce k výpočtu veku pastiera z počtu jeho oviec a psov. Podobná chyba nesmie viesť k trestu v podobe zlej známky alebo k výsmechu. Má sa stať príležitosťou upozorniť na chybu v logike premýšľania. Povedzme tak, že jej text konvertujeme úlohu tak, aby sa preukázala absurdnosť zvoleného postupu: „*Predstav si, že niektorej sučke sa narodí šesť šteniat. Aký starý bude pastier teraz?*“

Pri správnom vedení zo strany učiteľa si žiaci sami začnú uvedomovať, že výpočty nie sú to, čo určuje vzťahy medzi objektmi reálneho sveta. Číslo je údaj, ktorý je dôležitý v istých súvislostiach, ale nepoužiteľný v iných. Väčšina súčasných učebníc matematike sa tejto problematike nevenuje – ak áno, tak v nedostatočnej miere. Autora článku tieto pohnútky viedli k napísaniu „polоučebnice“ [7]. Od typickej učebnice fyziky či matematiky sa líši najmä tým, že okrem odborného obsahu má aj dej. Cieľom tohto obohatenia je posilnenie motivácie, vznik väzieb medzi textom a žiakom. Formálna stránka (vzorce, poučky) je redukovaná na úkor vysvetľovania súvislostí medzi javmi. Veľa priestoru je venovaného úvahám: *Koľko je desaťmiliónina dĺžky rovníka? Koľko potrebuješ na prejdenie tejto vzdialenosti: minútu, hodinu, deň?* Pri napĺňaní poznávacích funkcií sú neštandardné a netypické úlohy rovnako užitočné ako tie tradičné („správne formulované“).

Dejovou niťou knihy je vznik a vývoj vesmíru od veľkého tresku po dnešok. Látku vysvetľujeme prostredníctvom sokratovského dialógu medzi autorom a „meňavcom“ – tvorom, ktorý existuje od veľkého tresku a celý vývoj vesmíru videl – iba nerozumie, prečo sa zmeny diali práve tým spôsobom, ktorým sa diali. Vďaka dialógu je možné z hlavnej dejovej línie odskakovať k iným vedným oblastiam tak, ako pri bežných rozhovoroch. Najčastejšie sú preskoky medzi fyzikou a slovenčinou, odbočuje sa aj k ďalším disciplínam, najmä do matematiky.

Odskoky slúžia predovšetkým na odľahčenie „učiva“ vo chvíli, keď hrozí, že predlžovanie danej látky by mohlo utlmiť záujem čitateľa svojou monotónnosťou. Odbočenie však popri zábavnej funkcii ukazuje problém z odlišného uhla, čím napĺňa Komenského ideu „škola hrou“.

Záver

Každé úspešné vyriešenie problému je príbehom vhodnej kombinácie tacitných a explicitných poznatkov – so štipkou šťastia navrch. Ak žiaci nezískajú tacitné vedomosti, memorovanie explicitných je zbytočné. Preto úlohy, ktoré riešia počas vyučovania matematiky majú byť také aj onaké: správne a nesprávne riešené, majúce zmysel aj absurdné. Je úlohou učiteľa hľadať správny okamih, kedy ktorú použiť.

Neznamená to, že úloh každého typu má byť rovnaký počet. Tradičných úloh musí byť najviac – najmä preto, lebo vytvárajú základ, bez ktorého sa nedá posúdiť nesprávne riešenie, či absurdnosť a nezmyselnosť tých ostatných. Ma druhej strane, učiteľ sa nesmie báť použiť „deformované, deštruktívne“ vo vhodnej chvíli. Žiakov nimi dokáže prebrať z apatie a ukázať im, že matematika nie je iba suchopárna veda. Je to aj oblasť žijúca vlastným, veľmi zaujímavým životom.

LITERATÚRA

[1] Ivaška, M.: *Sedem dôvodov, prečo žiaci nevedia matematiku*. Blog SME, 19. 3. 2011. Dostupné na internete: https://ivaska.blog.sme.sk/c/259936/Sedem-dovodov-preco-ziaci-nevedia-matematiku.html

[2] Hvorecký, J.: *Managerial Issues of Teaching Mathematics.* In: Wei-Chi Yang, Tilak de Alwis, Jen-chung Chuan (eds.): *Proceedings of the 12th Asian Technology Conference in Mathematics*. Taipei, Taiwan, 2007.

[3] Novotná A.: *Celebrity prezradili, ako vyzerali ich vysvedčenia*. Korzár, 27. 6. 2014. Dostupné na internete: https://korzar.sme.sk/c/7254735/celebrity-prezradili-ako-vyzerali-ich-vysvedcenia.html

[4] BBC Music: *Who are the biggest brainiacs in pop?* Dostupné na internete: https://www.bbc.co.uk/music/articles/e2a7d543-334c-48f8-8fa2-1569fc923862

[5] Greer, B.: *Modelling reality in mathematics classrooms: The case of word problems*. Learning and instruction, 7(4), 1997, 293-307.

[6] Hvorecký, J., Šimúth, J., Lichardus, B.: *Managing Rational and Not-Fully-Rational Knowledge*. Acta Polytechnica Hungarica, 10(2), 2013, 121-132

[7] Hvorecký, J.: Meňavce: Veľký tresk. Bratislava, Raabe, 2018.

[8] Rektorys, K. a kol.: Přehled užité matematiky. Praha, SNTL, 1968.

Prof. RNDr. Jozef Hvorecký, PhD.
Vysoká škola manažmentu
Panónska cesta 17
SK – 851 04 Bratislava
e-mail: *jhvorecky@vsm.sk*

LINEÁRNA FUNKCIA A MARGARITA TERESA

MIRIAM JANÍKOVÁ

ABSTRAKT. V príspevku sa budeme zaoberať vyučovaním matematiky na stredných odborných školách netechnických, konkrétne so zameraním na stredné umelecké školy — predstavíme niekoľko námetov na úlohy týkajúce sa lineárnej funkcie v spojení s reálnym kontextom.

Úvod

Stredné umelecké školy patria do kategórie stredných netechnických škôl a na rozdiel od konzervatórií majú do oblasti všeobecného vzdelávania zaradené vyučovanie matematiky. Výučba matematiky sa má v jednotlivých učebných odboroch realizovať podľa ich účelu, a to s dotáciou min. 2 hodín týždenne za celé štúdium. Škola by sa mala usilovať o to, aby malo vzdelávanie pre žiakov zmysel a osobný význam (myšlienku s podobným znením i významom nachádzame vo vzdelávacom štandarde pre stredné odborné školy netechnické aj v českom Národnom programe vzdelávania).

S dôrazom kladeným na zmysluplnosť vyučovania sme sa rozhodli navrhnúť zopár námetov na tvorbu pracovných listov, v ktorých bude matematika prepojená s reálnym kontextom. Keďže sa jedná prioritne o školy s umeleckým zameraním, rozhodli sme sa vychádzať pri tvorbe úloh najmä z oblastí umenia a histórie. Časť jedného konkrétneho návrhu pracovného listu, ktorý sa zaoberá tematikou lineárnej funkcie, Vám teraz predstavíme.

Koľko rokov má španielska princezná Margarita Teresa na Velázquezovom portréte?

Obrázok 1: Velázquezov portrét Margarity Teresy
[ZDROJ: https://goo.gl/Mj7MhE]

1. Pomer hlavy k telu sa u dospievajúceho jedinca vekom mení. Pri narodení dieťaťa tvorí výška hlavy v ideálnom prípade 1/4 jeho celkovej výšky, zatiaľ čo u dospelého človeka (od 18-tich rokov) tvorí výška hlavy 1/8 celkovej výšky.

a) Koľko hláv tvorí celkovú výšku ideálneho novorodenca? ……….

b) Koľko hláv tvorí celkovú výšku ideálneho dospelého človeka? ……….

c) *Kedy tvorí hlava väčšiu časť ľudského tela - pri narodení alebo v dospelosti?* ……….

d) Počet hláv tvoriaci celkovú výšku človeka s vekom rastie / klesá. Diskutujte v skupinách o tomto tvrdení.

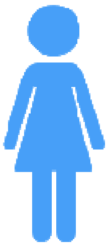
2. Pre rast človeka od 0 do 18 rokov platí v ideálnom prípade nasledovný vzťah:

$$H = \frac{2}{9}V + 4\,;$$

H *je počet hláv tvoriacich výšku človeka,*

V *je vek človeka (v rokoch).*

a) *Preverte platnosť horeuvedeného vzťahu pre postavičku na obrázku. Uveďte svoj postup.*



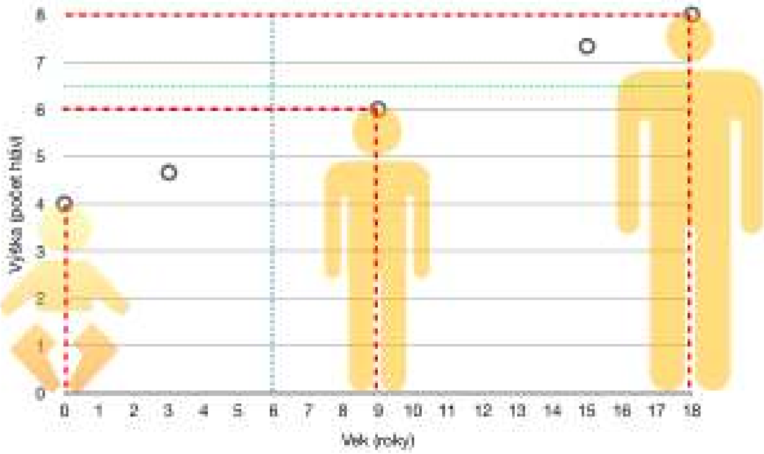
2

Obrázok 2: Postavička

[ZDROJ: vlastný obrázok]

b) *Ako vysoké je ideálne dieťa vo veku 12 rokov? Výsledok uveďte ako počet hláv (v tvare zlomku aj v tvare desatinného čísla).* ………..

c) *Aká je jeho výška v centimetroch, ak jeho hlava meria 20,5cm?* ……….



Graf 1

[ZDROJ: vlastný graf]

3. Na grafe uvedenom na predchádzajúcej strane vidíme, ako sa mení pomer hlavy k telu, teda koľko hláv tvorí v rôznom veku celkovú výšku človeka. Graf znázorňuje iba pomer hlavy k telu (novonarodené dieťa nie je, samozrejme, v porovnaní s 18-ročným človekom takto veľké).

a) Do grafu doplňte výšku detí (ako počet hláv) vo veku napr. 2, 10 a 13 rokov. Zistite ju pomocou uvedeného vzťahu a svoj postup zapíšte.

b) Vedeli by ste odhadnúť, kde bude bodka pre 6-ročné dieťa? Teraz to skúste bez počítania (pomôckou je modrá čiara v grafe).

c) V akom veku tvorí výšku 6,5 hláv? Vypočítať to už určite viete, skúste využiť graf (pomôckou je zelená čiara v grafe). …….

4. Na základe predchádzajúcich úloh by ste už mali vedieť zistiť, koľko rokov má Margarita Teresa na obraze uvedenom na prvej strane pracovného listu. Dá sa to buď výpočtom, alebo pomocou grafu.

Záver

Tento pracovný list bol pilotovaný u žiakov prvého ročníka SZŠ. Časová náročnosť je približne jedna vyučovacia hodina. Žiaci absolvovali aj krátky dotazník, kde hodnotili náročnosť jednotlivých úloh aj pracovného listu ako celku. 70% z nich označilo pracovný list za skôr ťažký, napriek tomu rovnako 70% označilo, že by chceli na hodinách matematiky pokračovať v riešení podobných pracovných listov. V otázke najťažšej úlohy boli žiaci nejednotní, a to: 19% označilo úlohu 1, 44% úlohu 2, 32% úlohu 3 a 5% úlohu 4. Za najľahšiu úlohu označilo 70% úlohu 1.

LITERATÚRA

[1] Hejný, M., Kuřina, F.: *Dítě, škola a matematika*, Praha, Portál, 2015, ISBN 978-80-262-0901-0

[2] http://www.dace.co.uk/proportion_child_3.htm [8/2018]

[3] http://siov.sk/SVP.aspx?ID=130 [8/2018]

Mgr. Miriam Janíková
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK
Katedra matematickej analýzy a numerickej matematiky
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: miriam.mia.janikova@gmail.com

ÚLOHY LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA NA GYMNÁZIU

MILADA KAZDOVÁ

ABSTRAKT. *V nasledujúcom texte predstavíme dve úlohy z lineárneho programovania, ktoré možno zaradiť do výučby matematiky na gymnáziách. Ukážeme ich vrátane riešení, pretože ide o úlohy, s ktorými sa žiaci môžu stretnúť pri prijímacích skúškach na manažérske obory.*

Úvod

Najprv si povedzme, čo je vlastne lineárne programovanie (v ďalšom budeme značiť LP). Žiaci pravdepodobne nevedia, že lineárne programovanie nesúvisí s programovaním počítačov. Jiří Matoušek [1] uvádza, že slovo programovanie bolo prevzaté z americkej armádnej hantýrky, kde znamenalo rozvrh alebo plán určitej činnosti. Slovo lineárne určuje, že plán, resp. jeho kvalitu, meriame pomocou lineárnej funkcie. Cieľom LP je teda nájsť optimálny plán – nájsť maximum alebo minimum lineárnej funkcie určitého počtu premenných na množine popísanej sústavou lineárnych nerovníc. V skriptách Vladimíra Tomu [2] sa dočítame, že prvú úlohu sformuloval v roku 1939 L.V. Kantorovič pri riešení problémov z drevárskeho priemyslu. Za zakladateľa LP je považovaný G.B. Danzing, ktorý v roku 1947 pri riešení problémov logistiky navrhol tzv. simplexovú metódu.

Prečo práve úlohy z lineárneho programovania? Pretože ide o úlohy praktické a zaujímavé s reálnym kontextom. Pretože každý žiak by mal byť schopný určiť, čo je a nie je výhodné, ako dosiahnuť najefektívnejšie riešenie situácie alebo problému. Pretože rozvíjajú logické myslenie a matematickú gramotnosť žiakov. Pretože na prijímacích skúškach na FM UK v Bratislave v posledných rokoch majú nízkou úspešnosť.

K podrobnejšiemu pochopení lineárneho programovania slúžia predmety na vysokých školách. Kam ale zaradiť lineárne programovanie v rámci matematiky na gymnáziách? Najjednoduchšie úlohy by mali byť zvládnuteľné pre žiakov základných škôl, tie trochu zložitejšie môžeme zaradiť do výučby na gymnáziu vo chvíli, keď majú žiaci prebraté celky lineárne nerovnice, funkcie a prípadne základy kombinatoriky.

Aké úlohy máme na mysli?

Uveďme si teraz niekoľko úloh typovo odpovedajúcich tým, ktoré sa nachádzajú v zbierke úloh [3] určené pre záujemcov o štúdium manažmentu.

Úloha 1*:*

Umelec zdobí folklórnou maľbou stoly a stoličky. Výzdoba stola mu trvá hodinu a potrebuje naň 2m^2 priestoru v sklade. Čistý zisk za jeden vyzdobený stôl je 10€. Na výzdobe stoličky pracuje 2 hodiny, stolička v sklade zaberie 1m^2 a zisk z výzdoby je tiež 10€. Umelec má k dispozícii sklad s rozlohou 10m^2 a pracuje každý deň maximálne 8 hodín. Aký je maximálny denný zisk, ktorý môže za stanovených podmienok dosiahnuť?

Úloha 2*:*

Úlohou chemika je plnenie tlakových fliaš dvoma plynmi A a B. Zmes plynov A a B môže byť výbušná, a preto je nutné dodržať nasledujúce podmienky. Množstvo plynu B v zmesi môže prekročiť dvojnásobok plynu A o maximálne 3 litre. Množstvo plynu A spolu so šesťnásobkom plynu B v zmesi je maximálne 22 litrov. Zároveň trojnásobok plynu A v zmesi môže prekročiť množstvo plynu B o maximálne 9 litrov.

Koľko litrov plynu môže chemik pri dodržaní všetkých uvedených podmienok naplniť do tlakovej fľaše?

Aká je maximálna možná cena zmesi, ktorú môže chemik naplniť do fľaše, ak vieme, že liter plynu A stojí 50€ a liter plynu B stojí 30€.

Úloha 3*:*

Doprava z pevniny na ostrov je zabezpečovaná dvoma typmi lodí. Loď Jose pojme 20 osôb a 5 ton ďalšieho nákladu, loď typu Mila pojme 6 osôb a 7 ton nákladu. Každý deň sa na ostrov potrebuje dostať 121 osôb a 50 ton nákladu. Každá loď vykoná denne iba jednu cestu.

Aký je najmenší počet lodí na zabezpečenie dopravy na ostrov?

Denne náklady na prevádzkovanie lode Jose sú 950€, denne náklady na prevádzkovanie lode Mila sú 1210€. Aké sú minimálne náklady na jeden deň prepravy na ostrov?

Úloha o preprave osôb a materiálu za stanovených podmienok

Podľa zmluvných podmienok musí dopravná firma v priebehu jedného dňa prepraviť 42 pracovníkov a 22 ton materiálu. Firma má k dispozícii dva typy vozidiel. Vozidlo A uvezie 4 osoby a 7 ton materiálu, vozidlo B 11osôb a 5 ton materiálu.

Aký najmenší počet vozidiel je treba, aby firma splnila zmluvné podmienky?

Náklady na prevádzku vozidla A sú 3500Kč denne, u vozidla B činí denné náklady 9 000 Kč. Aké sú najmenšie možné náklady firmy, ak sú podmienky zmluvy splnené?

Aká ostane nevyužitá kapacita na prepravu osôb a materiálu pri optimálnej prevádzke (v zmysle otázky b)).

Riešenie výpisom možností:

Vozidlo A: 4 osoby + 7 ton ………. 3500Kč
Vozidlo B: 11 osôb + 5 ton ………...9000Kč
Potrebujeme: 42 osôb + 22 ton

a)

Postupne zapisujeme dvojice minimálnych počtov vozidiel A a B potrebných na prepravu osôb a materiálu.
(11, 0) … na prepravu použijeme 11 vozidiel A a 0 vozidiel B
(42 : 4 = 10, zvyšok 2, potrebujeme 11 vozidiel A na prepravu osôb, skontrolujeme náklad: 11*7 = 77 ton , teda 11 vozidiel A na prepravu stačí).
(10,1) … 10 vozidiel A a 1 vozidlo B
(Vozidla A prevezú 10*4 = 40 osôb, zvyšné 2 osoby budú vo vozidle B, náklad: 10*7=70, táto kombinácia vozidiel je pre náklad dostačujúca)
Podobne získame (9,1); (8,1); (7,2); (6,2); (5,2); (4,3); (3,3); (2,4); (1,4) a (0,5).
Pozrieme sa teda, koľko vozidiel využijeme pre jednotlivé dvojice.
(11,0) … 11+0 = 11 vozidiel; (10,1) … 10+1 = 11 vozidiel; (9,1) …10 vozidiel; (8,1) … 9 vozidiel; (7,2) … 8 vozidiel; (6,2) … 8 vozidiel; (5,2) … 7 vozidiel; (4,3) … 7 vozidiel; (3,3) … 6 vozidiel; (2,4) … 6 vozidiel; (1,4) … 5 vozidiel a (0,5) ... 5 vozidiel.
Najmenší počet vozidiel pri splnených zmluvných podmienkach je preto 5 pre dvojice (1,4) a (0,5).

b)

Vyberieme „rozumné“ možnosti a vypočítame prevádzkové náklady:

(11,0) … 11*3500 + 0*9000 = 38500;	(8,1) … 8*3500 + 1*9000 = 37000
(5,2) … 5*3500 + 2*9000 = 35500;	(3,3) … 3*3500 + 3*9000 = 37500
(1,4) … 1*3500 + 4*9000 = 39500;	(0,5) ... 0*3500 + 5*9000 = 45000.

„Rozumné“ možnosti sú také, že nebudeme počítať náklady napr. pre dvojice (10,1) a (9,1), pretože náklady budú evidentne vyššie (viac vozidiel A) než v možnosti (8,1).
Najmenšie možné náklady sú teda 35 500Kč (5 vozidiel A a 2 vozidla B).

c)

Optimálna prevádzka v zmysle otázky b) je 5 vozidiel A a 2 vozidlá B. Keďže vozidlo A môže viesť 4 osoby a 7 ton nákladu a vozidlo B 11 osôb a 5 ton nákladu, overíme, maximálne koľko osôb môžeme prepraviť v kombinácii (5,2) : 5*4 + 2*11 = 42 → nevyužitá kapacita pre osoby je 0, t.j. všetky miesta pri všetkých jazdách sú obsadené. Pozrime sa na náklad: 5*7 + 2*5 = 45 → 45 – 22 = 23, t.j. kapacita 23 ton zostane nevyužitá.

Riešenie s využitím tabuľky prípustných hodnôt a matematický zápis

Počet vozidiel A označíme x, počet vozidiel B označíme y.

a)

Vieme, že potrebujeme prepraviť 42 osôb, pričom vozidlo typu A môže previesť 4 osoby a vozidlo typu B môže previesť 11 osôb. Môžeme teda zostaviť nerovnicu: $4x + 11y \geq 42$.
Podobne vieme, že firma musí odviesť 22 ton materiálu, pričom vozidlo typu A môže previesť 7 ton a vozidlo typu B môže previesť 5 ton. Zostavíme teda nerovnicu: $7x + 5y \geq 22$.
Hľadáme najmenší počet vozidiel, pomocou ktorých môže firma splniť zmluvné podmienky, teda hľadáme minimálny súčet $x + y$ a vieme že x, y budú iste kladné alebo nulové celé čísla (pretože ide o vozidlá).
Žiakom môžeme ukázať i zápis v lineárnom programovaní.

$$\text{Min}\left\{x + y;\ \begin{matrix} 4x + 11y \geq 42 \\ 7x + 5y \geq 22 \end{matrix};\ x, y \in \boldsymbol{Z}_0^+\right\} \tag{1}$$

Vymedzíme intervaly, v ktorých budú prípustné x a y. Pretože 42:4 = 10 (zvyšok 2), 22:7 = 3 (zvyšok 1), musí platiť $0 \leq x \leq 11$. Podobne 42:11 = 3 (zvyšok 9), 22:5 = 4 (zvyšok 2), musí teda platiť $0 \leq y \leq 5$.

Teraz môžeme zostaviť tabuľku prípustných hodnôt pre $0 \leq x \leq 11$ a $0 \leq y \leq 5$.

Tabuľku získame tak, že do sústavy nerovníc (1) postupne dosadzujeme hodnoty x, y z tabuľky. Ak je sústava nerovníc neplatná, zapíšeme „X“, ak je sústava platná, zapíšeme do tabuľky na príslušnú pozíciu číslo $x + y$.

x / y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	11
1	X	X	X	X	X	X	X	X	9	10	11	
2	X	X	X	X	X	7	8	9				
3	X	X	X	6	7							
4	X	5	6									
5	5											

Tabuľka 1

Tabuľku vypĺňame ideálne po stĺpcoch a to do tej doby, než nájdeme prvú dvojicu čísel $x + y$, pre ktorú je sústava platná. Ďalšie vypĺňanie pri hľadaní minimálneho súčtu nemá význam, pretože – aj keď sústava bude naďalej platná – hodnoty sa budú zväčšovať.

Z tabuľky vidno, že najmenší počet vozidiel firmy je 5 (x = 1 pre vozidlá A a y = 4 pre vozidlá B alebo x = 0 a y = 5).

b), c) viď predchádzajúci spôsob.

Úloha o zliatine kovov za určených podmienok

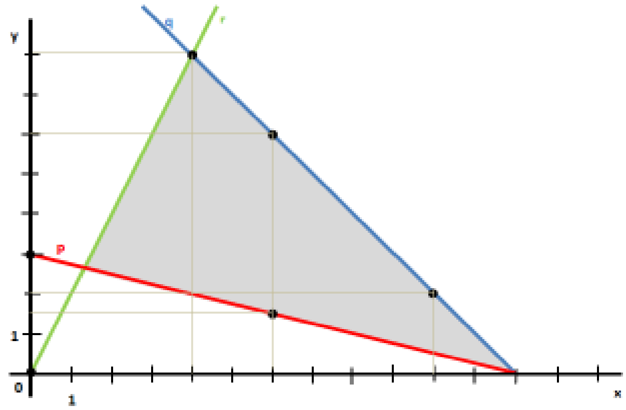
V zlievarni sa vyrába zliatina z kovov A a B. Kov A má hustotu 1t/m³, kov B má hustotu 5t/m³. Zliatina bude mať požadované vlastnosti iba vtedy, ak pre pomery objemov kovov A a B v jednom ingote v zlievarni dodržia nasledujúce podmienky:
Trojnásobok objemu kovu A a dvanásťnásobok objemu kovu B musí byť minimálne 36m³.
Objem jedného ingotu musí byť maximálne 12m³.
Pomer objemov kovov A a B v jednom ingote v tomto poradí musí byť väčší než 1:2.
Koľko najviac a koľko najmenej môže byť hmotnosť jedného ingotu zliatiny pri dodržaní všetkých uvedených podmienok?

Našou úlohou je vlastne nájsť maximá a minimá v oblasti zadanej nerovnicami. Zadané podmienky zapíšeme pomocou lineárneho programovania:

$$\mathrm{Max}\left\{x+5y;\ \begin{matrix} 3x+12y\geq 36 \\ x+y\leq 12 \\ 2x\geq y \end{matrix}\right\},\qquad \mathrm{Min}\left\{x+5y;\ \begin{matrix} 3x+12y\geq 36 \\ x+y\leq 12 \\ 2x\geq y \end{matrix}\right\}.$$

(2), (3)

Oblasť je zadaná tromi nerovnicami (sú to tzv. obmedzujúce podmienky), sústavu ktorých môžeme vyriešiť graficky. Zakreslíme pomocné priamky $p: 3x+12y-36=0$, $q: x+y-12=0$, $r: 2x-y=0$ a určíme polroviny, ktoré odpovedajú zadaným nerovniciam. Prienikom týchto polrovín je trojuholník, ktorý vidíme na obrázku.



Obrázok 1

Z obrázka vidíme maximálnu a minimálnu hodnotu.
Maximum: [4,8] → 44 ton, minimum: [12,0] → 12 ton.
Hodnoty 44 a 12 získame dosadením do tzv. účelovej funkcie[5] $f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = x+5y$.

[5] Účelová funkcia je lineárna funkcia, ktorú máme v úlohe maximalizovať alebo minimalizovať.

Záver

Obidve úlohy sme testovali v rámci doučovania na absolventke českého všeobecného gymnázia, nematurantke z matematiky. Úlohy boli pre ňu nové, nikdy predtým sa s nimi nestretla.

Prvú úlohu riešila vypisovaním možností, pričom boli potrebné návodné otázky. V odseku a) vypísala možnosti (0,5), (1,4) a (2,4) a vyzeralo to, že skončila. Až po prečítaní odseku b) dokončila správne všetky možnosti. Pri zisťovaní nákladov vypočítala možnosť pre dvojice (0,5) a (11,0) a keďže mala všetky možnosti napísané logicky za sebou, jej prvá odpoveď znela, že „to poslední“ so zdôvodnením „protože je to klesající“. Na základe ďalších návodných otázok napokon správne určila možnosť (5,2). Sama potom správne určila, ktoré z možností netreba rátať, pretože náklady by boli evidentne vyššie.

V druhej úlohe nastal prvý problém s napísaním správnych znamienok nerovníc. Ako sa dá graficky riešiť sústava nerovníc si nepamätala. S pomocnými priamkami si však poradila. Keď s pomocou návodných otázok určila trojuholník ako prienik troch polrovín, nemala problém nájsť maximum a minimum. Na rozdiel od prvej úlohy, ktorú považovala za zaujímavú, sa jej druhá nepáčila s odôvodnením: „je to humus, protože kombinujeme matiku s fyzikou a chemií“ (fyzika ani chémia neboli jej obľúbené predmety).

Keďže ide o úlohy, ktoré je možno umiestniť do rozličných kontextov a prostredí, dajú sa podľa záujmov a zameraní konkrétnej triedy vybrať také, ktoré žiakov zaujmú. Úlohy sa dajú rozšíriť o informácie navyše, ktoré žiaci pri výpočtoch nevyužijú, alebo napríklad o kúsok analytickej geometrie (výpočet priesečníkov priamok), atď.

LITERATÚRA

[1] Matoušek Jiří: *Lineární programování*, Praha, KAM MFF UK, 2006, dostupné na https://iti.mff.cuni.cz/series/2006/311.pdf (online júl 2018)

[2] Toma Vladimír: *Základy lineárneho programovania*, Bratislava, FMFI UK, 2008, ISBN 978-80-89186 41-9

[3] Kollár Jozef: *Riešené matematické úlohy z prijímacích skúšok 2002-2007*, Bratislava, FM UK, 2010, ISBN 978-80-223-2793-0

PaedDr. Milada Kazdová, PhD.
OSVČ - lektor
e-mail: MiladaKazdova@gmail.com

VEŠIAME OBRAZ S REGIOMONTANOM

ZBYNĚK KUBÁČEK

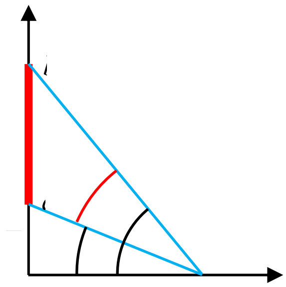
ABSTRAKT. *Pri riešení Regiomontanovej úlohy vystačíme s geometriou strednej školy; navyše si vyskúšame úvahy, ktoré sa neskôr môžu hodiť v kurze diferenciálneho počtu viacerých premenných.*

Regiomontanova úloha

Nemecký matematik Johann Müller, zvaný Regiomontanus (1436 – 1476) formuloval v liste zo 4. 7. 1471 (adresátom bol Christian Roder, rektor erfurtskej univerzity) nasledujúci problém.

Tyč dlhá 10 stôp je zavesená zvislo tak, že jej spodný koniec je 4 stopy nad zemou. Na zemi hľadáme bod, z ktorého tyč vidno pod najväčším uhlom, presnejšie – keďže existuje nekonečne veľa takých bodov, pričom všetky ležia na kružnici, hľadáme polomer tejto kružnice.

Táto úloha má zvláštne postavenie v histórii matematiky – od dôb antiky je to pravdepodobne prvý známy problém o hľadaní extrémov. Preto sa dnes vyskytuje v učebniciach matematickej analýzy ako jeden z príkladov na hľadanie maxím a miním funkcií pomocou derivácií: pomocou výpočtu na obr. 1 hravo zistíme, že uhol φ je najväčší pre $x = \sqrt{ab}$.



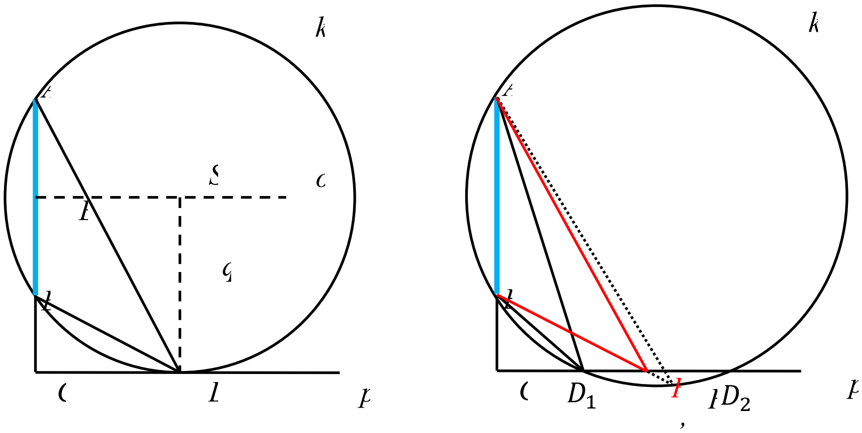
$$\ddot{o}'(x) = \left(\hat{a}(x) - \acute{a}(x)\right)' = \left(\arctan\frac{x}{b} - \arctan\frac{x}{a}\right)' = \frac{(x^2 - ab)(b - a)}{(x^2 + b^2)(x^2 + a^2)}$$

Obrázok 1: Regiomontanova úloha riešená pomocou diferenciálneho počtu

Lorschovo geometrické riešenie

V roku 1878 publikoval študent matematiky Adolf Lorsch geometrické riešenie Regiomontanovej úlohy (pozri obr. 2 vľavo).

Nech AB je tyč zavesená nad bodom C na zemi, D je hľadaný bod a nech k je kružnica prechádzajúca bodmi A, B a D. Potom CD musí byť dotyčnica kružnice k.



Obrázok 2: Lorschovo riešenie Regiomontanovej úlohy (vľavo) a jeho zdôvodnenie (vpravo)

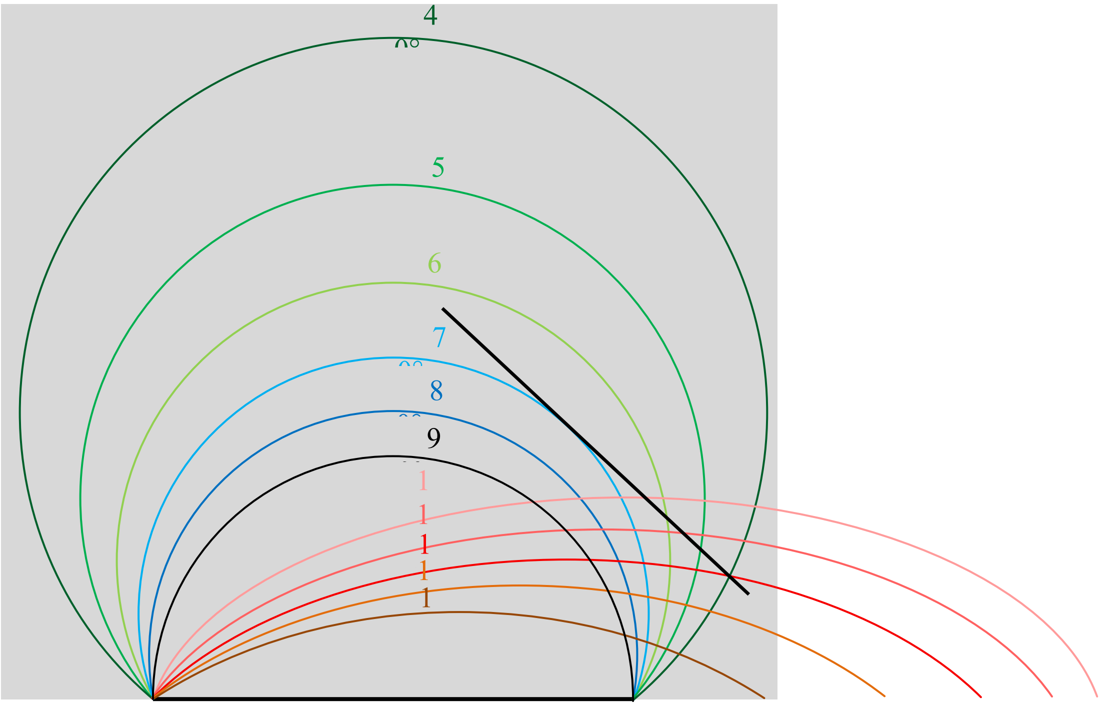
Zopakujme stručne Lorschovu argumentáciu: keby kružnica k, na ktorej ležia body A, B a D, pretínala priamku p (ktorá predstavuje zem, teda je to kolmica na AB v bode C) v dvoch bodoch D_1 a D_2 (pozri obr. 2 vpravo), tak z ľubovoľného bodu H vnútri úsečky D_1D_2 by bolo AB vidno pod väčším uhlom ako z bodu D_1. Nerovnosť $|\sphericalangle BHA| > |\sphericalangle BD_1A|$ pritom vyplýva z nasledujúcej úvahy: Uhly BD_1A a $BH'A$ (bod H' je priesečník priamky BH s kružnicou k) sú obvodové k oblúku AB, preto majú rovnakú veľkosť. Trojuholníky ABH a ABH' sa zhodujú v uhle pri vrchole B a zrejme platí nerovnosť $|\sphericalangle BAH| < |\sphericalangle BAH'|$, preto $|\sphericalangle BHA| > |\sphericalangle BH'A| = |\sphericalangle BD_1A|$.

Ako sa na to dá prísť

Naznačme stručne jednu z ciest, ktoré vedú k Lorschovmu riešeniu „nájdi kružnicu, ktorá prechádza bodmi A, B a dotýka sa priamky p" (teda hľadajme odpoveď na otázku, ako prísť – resp. priviesť žiaka – na myšlienku, že nás má zaujímať práve takáto kružnica).

Z geometrie strednej školy poznáme množinu všetkých bodov, z ktorých vidno úsečku AB pod daným uhlom – je ňou oblúk kružnice (ktorého presný opis prenecháme čitateľovi; v našich úvahách sa pritom obmedzíme iba na jednu z dvoch polrovín s hraničnou priamkou AB). Niekoľko takýchto oblúkov sme vyznačili na obr. 3. Podstatné je, že každým bodom vnútri našej polroviny prechádza práve jeden takýto oblúk (lebo z každého bodu vnútri polroviny vidno AB pod nejakým – a to jediným – uhlom, daným bodom teda prechádza oblúk prislúchajúci tomuto uhlu). Na základe obr. 3 si vieme predstaviť aj polohu zvyšných oblúkov. Vďaka tomu vieme opísať, ako sa pri ceste po dráhe XY mení veľkosť uhla, pod ktorým vidíme úsečku AB – tá je totiž určená tým, ktoré kružnicové oblúky na tejto ceste pretíname. Toto by mal byť okamih, keď si uvedomíme, že najväčšiu hodnotu uhol nadobudne v bode T, v ktorom sa úsečka XY dotýka kružnicového oblúka pre hodnotu 70° – čo je myšlienka, ktorú sme chceli so žiakmi objaviť.

Na záver poznamenajme, že tento spôsob uvažovania je dobre známy v matematickej analýze – práve takto možno zdôvodniť metódu hľadania viazaných extrémov, ktorej realizáciou je výpočet pomocou tzv. Lagrangeových multiplikátorov.



Ako sa mení veľkosť uhla, pod ktorým vidno úsečku AB,
ak sa pohybujeme po úsečke XY z bodu X do bodu Y?

V ktorom bode úsečky XY je tento uhol najväčší?

Obrázok 3:Spomedzi všetkých bodov úsečky XY vidno AB pod najväčším uhlom z bodu T

LITERATÚRA

[1] Cantor, Moritz: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweiter Band. Zweite Auflage. Leipzig, B. G. Teubner, 1900.

[2] Dörrie, Heinrich: Triumph der Mathematik, Breslau, Ferdinand Hirt, 1944.

[3] Lorsch, Adolf: Ueber eine Maximalaufgabe. Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1878, roč. 23, Historisch-literarische Abtheilung, s. 120.

doc. RNDr. Zbyněk Kubáček, CSc.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: kubacek@fmph.uniba.sk

GRACIÓZNE OHODNOTENIA GRAFOV

MILAN LEKÁR

ABSTRAKT. Predstavenie graciózneho ohodnotenia grafov a využitie potenciálu teórie grafov vo vyučovaní na základných a stredných školách.

Definícia grafu

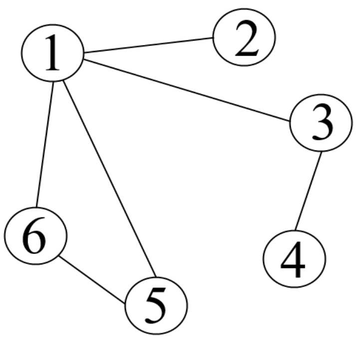
Gracíózne ohodnotenie grafov je téma, ktorá sa v súčasnosti na základných a stredných školách žiaľ vôbec nepreferuje, pretože ju učitelia slovenských škôl nepoznajú. Preto je táto téma veľmi aktuálna, nehľadiac na to, že v histórii slovenskej matematiky sa tejto téme venovalo mnoho významných slovenských matematikov ako prof. Alexander Rosa, prof. Anton Kotzig a mnohí ďalší. Potenciál teórie grafov pre učiteľov stredných a základných škôl na Slovensku je samozrejme oveľa širší. Na grafoch je možné deťom ukázať mnohé logické súvislosti a pestovať u nich logické myslenie, podobne ako je tomu pri matematických hlavolamoch.

Na začiatok, aby sme mohli vysvetliť graciózne ohodnotenie grafov, musíme zadefinovať čo je to graf.

Graf G je usporiadaná dvojica $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{H})$, kde:

V je neprázdna konečná množina vrcholov grafu,

H je množina neusporiadaných dvojíc typu $\{u, v\}$, kde $u \neq v$, ktoré sa nazývajú hrany grafu.



Obrázok 1: Diagram grafu G

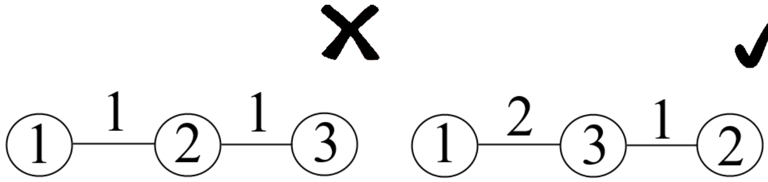
Definícia graciózneho ohodnotenia grafov

Teraz už môžeme pristúpiť k samotnej definícii gracióznej ohodnotenia grafov:

Definícia: Daný je graf $G = (V, H)$ v ktorom platí: $V = \{1,2, \dots, m\}$.

Ohodnotenie, ktoré každému vrcholu m-vrcholovému grafu G priradí jednoznačnú hodnotu z množiny $V = \{1,2, \dots, m\}$ tak, že žiadne dva vrcholy nemajú rovnakú hodnotu a každej hrane priradí hodnotu rovnú absolútnemu rozdielu hodnôt vrcholov s ktorými susedí, pričom žiadne dve hrany nemajú rovnakú hodnotu a platí: H= $\{1,2,\ldots,m-1\}$ sa nazýva graciózne ohodnotenie grafu $G=(V,H)$.

Príklad čo je a čo nie je graciózne ohodnotený graf:



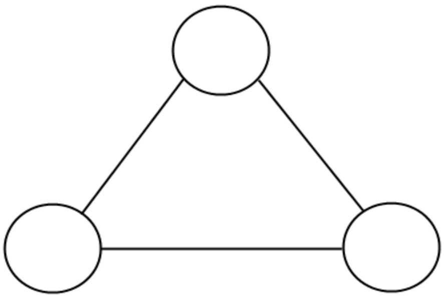
Obrázok 2

Vidíme, že v prvom prípade sme síce použili hodnoty 1,2,3 pre vrcholy, avšak sú nesprávne rozmiestnené, pretože sme ich rozdielom nezískali pre hrany hodnoty 1,2 ale len dvakrát hodnotu 1. Preto na obrázku vpravo premiestnime hodnoty vrcholov 2,3 z prvého obrázku vľavo, čím získavame hrany s hodnotami 1,2, čo vyhovuje vyššie uvedenej definícii. Vidíme, že pri ohodnotení grafov je vhodné začínať vrcholmi, pričom hodnoty hrany získame ako absolútny rozdiel hodnôt vrcholov ktoré hrana spája, čo je presne podľa vyššie uvedenej definície.

Pri nasledujúcej úlohe budeme predpokladať, že čitateľ pozná pojmy kružnica a strom z oblasti teórie grafov.

Otázka pre žiakov: Môže byť graf obsahujúci kružnicu graciózne ohodnotený v zmysle predchádzajúcej definície?

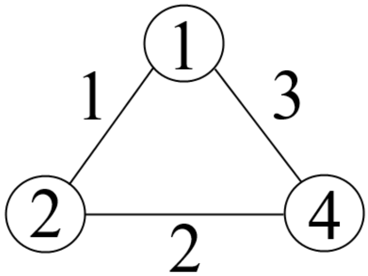
Odpoveď: Nemôže. Dôvod, prečo je to tak, si ukážeme na obrázku uvedenom nižšie.



Obrázok 3: G_3 Ide o kružnicu s troma vrcholmi a troma hranami.
$G_3=(V,H), V=\{1,2,3\}, H=\{1,2,3\}$

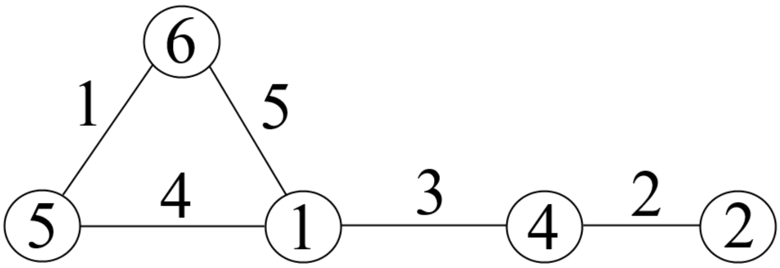
Keď sa lepšie pozrieme na vyššie uvedenú definíciu graciózneho ohodnotenia grafov a na graf G_3, po krátkom rozmýšľaní musíme dospieť k záveru, že hranu s hodnotou 3 nie je možné vytvoriť, pretože hodnoty hrán je možné vytvoriť len ako rozdiel hodnôt vrcholov, avšak najvyššia hodnota vrcholu, ktorá je v tomto grafe obsiahnutá je 3, teda hrana s najvyššou hodnotou je 3-1=2.

Aby sme vyriešili tento problém, budeme ignorovať podmienku z definície, že m-vrcholový graf musí obsahovať hodnoty $1,2,\ldots$ až m a dovolíme si vynechať niektoré hodnoty. Ak na obrázku G_3, nahradíme hodnotu vrcholu 3 hodnotou 4, potom získame pre hrany hodnoty 1,2,3. Situáciu vidíme na obrázku nižšie:



Obrázok 4: G_4

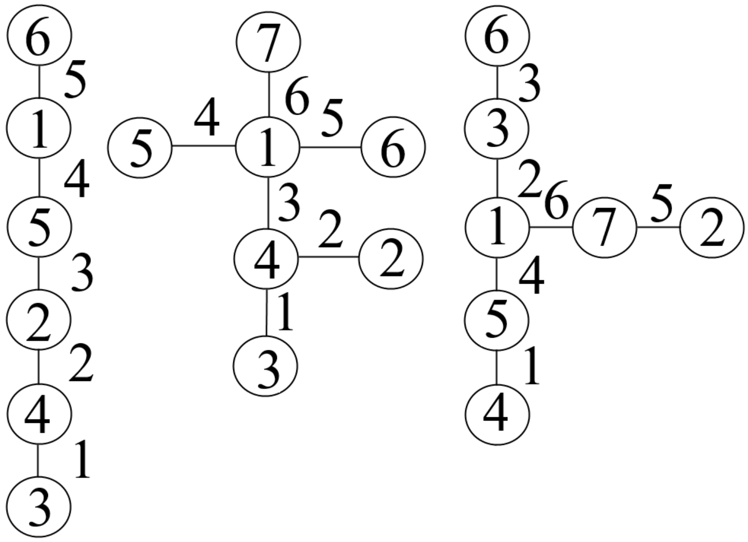
Získali sme ohodnotenie, ktoré nie je graciózne v zmysle vyššie uvedenej definície, ale ide o ohodnotenie, ktoré z tejto definície zachováva podmienku ohodnotenia hrán hodnotami $1,2,\ldots,m-1$ – v našom prípade ide o hodnoty 1,2,3 pričom vrcholy sme ohodnotili hodnotami $1,2,\ldots,m$ – v tomto prípade 1,2,4 teda hodnotu 3 sme vynechali. Ak by sme k danému grafu pridali vrchol, pridali by sme súčasne jednu hranu, teda situácia by sa opakovala a opäť by nebolo možné najvyššiu hranu vytvoriť. Pridajme rovno dva vrcholy a dve hrany. Situácia na obrázku nižšie:



Obrázok 5: G_5

Na vyššie uvedenom obrázku opäť vidíme, že nami nájdené ohodnotenie nie je graciózne, pretože chýba vrchol s hodnotou 3.

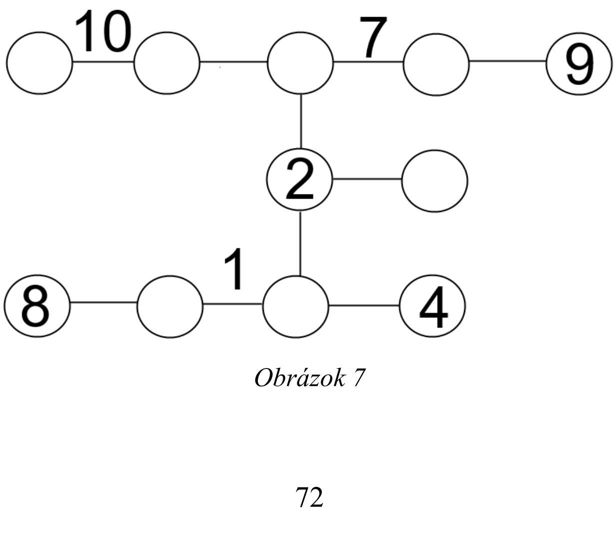
Niektoré príklady gracióznehο ohodnotenia:



Obrázok 6

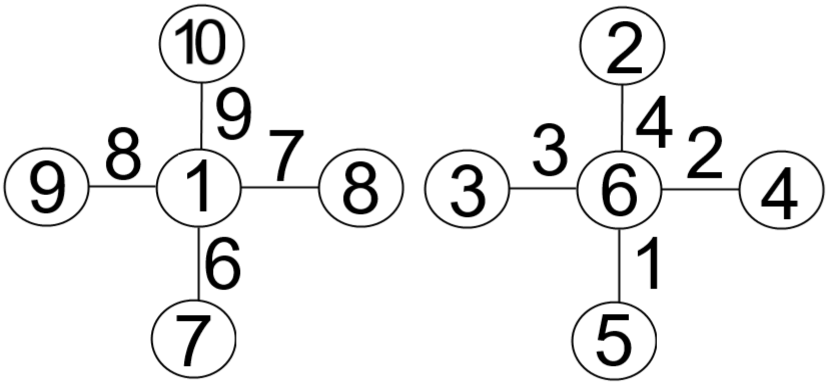
Na obrázkoch vidíme, že nie je vynechaná žiadna hodnota v ohodnotení vrcholov a každá hrana je vytvorená ako absolútny rozdiel hodnôt vrcholov s ktorými susedí. Tento problém súvisí s tzv. Ringel-Kotzig-Rosovou domnienkou, ktorú v roku 1967 vyslovil slovenský matematik prof. Alexander Rosa v súčasnosti pôsobiaci na univerzite McMaster university v Kanade. Prof. Alexander Rosa rozlišoval až štyri rôzne druhy graciózneho ohodnotenia grafov. Otázka, či je možné gracиózne ohodnotiť každý graf v zmysle vyššie uvedenej definície je stále otvorený problém, aj keď v tejto oblasti urobil v roku 1998 istý pokrok matematik Brendan McKay, keď pomocou použitia počítačov dokázal, že každý strom, ktorý obsahuje najviac 27 vrcholov je možné graciózne ohodnotiť. Neskôr jeho výsledok vylepšil Michael Horton, ktorý dokázal, že každý strom, ktorý obsahuje najviac 29 vrcholov je možné graciózne ohodnotiť a ešte neskôr vylepšil tento výsledok matematik Wenjie Fang na stromy s najviac 35 vrcholmi v roku 2010.

Ďalším typom úloh pre žiakov sú grafy, v ktorých chýbajú niektoré hodnoty vrcholov a hrán a úlohou žiaka je doplniť chýbajúce hodnoty. Situácia na obrázku nižšie:



Obrázok 7

Ďalším typom úloh pre žiakov: Spojte dané grafy tak, aby bol výsledný graf graciózne ohodnotený. Obrázok nižšie:



Obrázok 8

V tejto oblasti je teda možné vytvoriť pre žiakov základných a stredných škôl rôzne typy úloh primerane ich veku a schopnostiam.

LITERATÚRA

[1] Aldred, R..E..L., Mckay, Brendan D.: *Graceful and harmonious labellings of trees*, Bull. Inst. Combin. Appl., 1998,

[2] Huang, C. Kotzig, A. Rosa, A.: *Further results on tree labellings,* Utilitas Math, 1982,

[3] Gallian, A. J.: *Department of Mathematics and Statistics*, Duluth, University of Minnesota Duluth, 1996,

[4] Kotzig. A.: *Decompositions of complete graphs into isomorphic cubes*, J. Combin, Theory Ser. B 31, 1981,

Mgr. Milan Lekár
Univerzita Komenského Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Mlynská dolina.
842 48 Bratislava
e-mail: lekar1@uniba.sk

FLIPPED LEARNING VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY

BARBORA MATUŠKOVÁ

ABSTRAKT: *Flipped Learning alebo častokrát označovaný aj ako Flipped Classroom, nie je samo o sebe vyučovacou metódou, ale skôr modelom vyučovania. V podstate ide o prevrátený model vyučovania. Aktivity určené na domácu úlohu sa riešia v škole na vyučovaní a tie určené na vyučovanie študenti riešia sami doma (mimo vyučovania).*

Čo je to Flipped Learning?

Flipped Learning má už svoj ekvivalentný výraz aj v slovenskom jazyku. Môžeme sa stretnúť s pomenovaním **obrátené vyučovanie** (Hanč, Tuleja, 2012) alebo **prevrátené vyučovanie** (Baranovič, 2012). Obidva tieto slovenské ekvivalenty nám napovedajú, že ide o obrátený alebo prevrátený spôsob vyučovania. Podstatou Flipped Learning-u je, že aktivity bežne vykonávané v škole na vyučovaní sa robia individuálne doma a naopak domáce aktivity sa vykonávajú na výučbe v škole.

Flipped Learning je pomerne nový model vyučovania, ktorý sa začal rozvíjať od roku 2006. Za jeho hlavných propagandistov od roku 2006 až do súčasnosti sú pokladaný dvaja americký vysokoškolský učitelia chémie John Bergmann a Aaron Sams. Títo dvaja učitelia chceli pomôcť svojim študentom, ktorí sa kvôli športovým aktivitám nemohli zúčastňovať prednášok. Začali im poskytovať svoje prednášky v podobe video nahrávok, ktoré tvorili na základe PowerPoint-ových prezentácií doplnených o hlasový komentár a nejaké ďalšie poznámky (Bergmann, Sams, 2012). Postupne si video-prednášky začali pozerať aj študenti, ktorí chodili na vyučovanie, začali sa viac zapájať a diskutovať na hodinách. V roku 2007 sa Bergmann a Sams rozhodli nahrávať všetky svoje prednášky a poskytovať ich študentom pred vyučovaním. Následne im na samotnej výuke ostalo viac času na praktické činnosti, precvičovanie a realizáciu pokusov (Bergmann, Sams, 2012).

Definícia a 4 piliere Flipped Learning

Pôvodná definícia Flipped Learning bola jednoduchšia a pedagogická verejnosť si ju vysvetľovala rôzne. Väčšina učiteľov sa zameriavala len na časovú organizáciu vyučovania. Podstatou je však zmena v samotnej aktivite žiakov, preto v roku 2014 nezisková organizácia Flipped Learning Network zverejnila rozsiahlejšiu definíciu. Základom vyučovacieho modelu Flipped Learning je presun výkladu učiteľa zo školského vzdelávacieho prostredia do individuálneho prostredia domova každého študenta a školský priestor v triede sa mení na interaktívne skupinové dynamické vzdelávacie prostredie. Dôraz sa kladie najmä na činnosť študentov – aplikujú svoje vedomosti a aktívne sa zapájajú do výučby a procesu tvorby poznatkov a skúseností (Flipped Learning Network, 2014)[6]. Nesmieme zabúdať na to, že neodmysliteľnou súčasťou takejto výučby sú aj informačno-komunikačné technológie. Musíme sa ubezpečiť, že každý študent, ktorý bude zapojený do tohto spôsobu výučby, má prístup k počítaču a internetu, aby sa mohol v domácom prostredí (mimo školy) vzdelávať, študovať materiál poskytnutý od učiteľa.

[6] Voľný preklad definície z originálu dostupnom online na webovej stránke organizácie Flipped Learning Network: https://flippedlearning.org/definition-of-flipped-learning/ [online: 2018-09-20].

Okrem vyššie uvedenej definície členovia Flipped Learning Network vypracovali 4 základné piliere tohto spôsobu vyučovanie. Pomenovanie je odvodené od slova F-L-I-P[7]:

- **F** – Flexible environment - **flexibilné prostredie** – vyučovanie prostredníctvom rôznych metód, prispôsobovanie sa a individuálny prístup k študentom, flexibilnosť časového harmonogramu vyučovania a tematických plánov.
- **L** – Learning culture - **kultúra vzdelávania** – zánik transmisijného spôsobu vyučovania, časová možnosť preberať učivo viac do hĺbky, vlastné tempo a individuálne aktivity študenta.
- **I** – Intentional content - **zámerný výber obsahu učiva** – rozsah a obťažnosť obsahu učiva určeného na domácu prípravu volí učiteľ, ako aj následne úlohy na aktívnu činnosť študentov v škole na vyučovaní.
- **P** – Professional educator - **profesionalita učiteľa** – náročná príprava učiteľa, tvorba kvalitného materiálu, organizácia vyučovanie s uplatnením rôznych vzdelávacích metód.

Na základe týchto pilierov môžeme povedať, že ide o zmiešaný spôsob vyučovania zahŕňajúci samostatnú prípravu študentov a rôzne aktivizačné metódy na vyučovaní.

Flipped Learning vs. transmisijné vyučovanie

Prvý rozdiel v porovnaní s transmisijným spôsobom vyučovania je v organizácií samotnej výučby. Výklad učiteľa, ktorý prebiehal výlučne v škole je teraz hlavnou súčasťou domácej prípravy na vyučovanie. Na druhej strane precvičovanie, riešenie problémových úloh a získavanie praktických skúseností je primárnou úlohou vyučovacieho procesu v škole, pod kontrolou učiteľa.

Ďalší podstatný rozdiel vidíme v časovej organizácií vyučovacej hodiny (máme na mysli trvanie 45 minút). Predstavme si, ako prebieha väčšina klasických hodín matematiky v transmisijnom vyučovaní. Na začiatku hodiny sa venujeme kontrole domácich úloh, častokrát musíme dovysvetľovať vzniknuté nejasnosti a v celku nám to zaberie približne 20 minút z hodiny. Nasledujúcich 30 minút nám zaberie vysvetľovanie nového učiva a počas zvyšných 5 minút stihneme maximálne prepočítať jeden príklad a zadať domácu úlohu. Teraz si predstavme, že tých 30 minút namiesto vysvetľovania strávime počítaním, precvičovaním, riešením aplikačných a problémových úloh a rôznymi praktickými možnosťami uplatnenia učiva. Podľa Bergmanna a Samsa (2012) a ich skúsenosti je to v rámci modelu Flipped Learning možné, lebo už nemusíme tráviť vyučovaciu hodinu neustálym vysvetľovaním.

Pri stanovovaní si vzdelávacích cieľov vychádzame z Bloomovej revidovanej taxonómie, ktorá pozostáva zo 6 úrovní (zapamätať, porozumieť, aplikovať, analyzovať, hodnotiť a tvoriť) poznávacieho procesu. Počas vyučovacej hodiny sa sústreďujeme najmä na zvládnutie prvých dvoch úrovní. Flipped Learning predpokladá, že úrovne zapamätanie a porozumenie zvládne študent počas domácej prípravy bez pomoci učiteľa. Vyššie úrovne poznávacieho procesu teda môžeme rozvíjať na vyučovaní za pomoci a usmernenia učiteľa.

[7] Originálne znenie 4 pilierov Flipped Learningu nájdete na https://flippedlearning.org/definition-of-flipped-learning/ [online: 2018-09-20].

Vyučovanie matematiky v modeli Flipped Learning

Matematika je predmet, ktorý sa podľa nášho názoru dá vyučovať modelom Flipped Learning. Pri každom tematickom celku si musíme premyslieť a zvážiť, čomu študenti dokážu porozumieť doma sami a k čomu potrebujú pomoc učiteľa. Materiál určený na domácu prípravu môžeme čerpať z učebnice, rôznych internetových zdrojov, našich vlastných príprav a pod. Materiál môžeme spracovať prostredníctvom videosekvencií, prezentácií, interaktívnych cvičení, textov a pod. Počas vyučovania môžeme uplatňovať rôzne aktivizačné vyučovacie metódy, ako napr. skupinové, kooperatívne, problémové, konštruktivistické vyučovanie, e-learning, m-learning a pod. Študenti najčastejšie počas vyučovania riešia rôzne úlohy na precvičovanie, rozvíjanie kritického a logického myslenie, aplikačné a problémové úlohy.

V školskom roku 2017/2018 sme uskutočnili prvý výskum učenia matematiky – tematický celok štatistika – na strednej škole metódou Flipped Learning. Tento výskum je v stave vyhodnotenia a bude súčasťou rigoróznej práce.

Záver

Podľa nášho názoru model Flipped Learning je vhodný spôsob vyučovania aj na predmet matematika. Nemyslíme si, že tento spôsob vyučovania je jednoduchý a ľahký. Práve naopak začiatky sú náročné. Učiteľ sa musí naučiť vybrať najvhodnejší materiál na domácu úlohu pre študentov. Príprava takéhoto materiálu je časovo náročnejšia. Na druhej strane nám to dáva príležitosť aktívnejšie a intenzívnejšie spolupracovať so študentami počas vyučovania. Uplatňovať individuálny prístup k slabším študentom. Ďalšou výhodu je, že Flipped Learning berie ohľad na rôzne učebné štýly. Sám študent sa rozhoduje kde a kedy sa bude pripravovať na vyučovanie. Vedieme ich k samoštúdiu, učíme ich, ako sa majú efektívne učiť a v neposlednom rade ich týmto pripravujeme na vysokoškolské štúdium.

LITERATÚRA

[1] Bergmann, J., Sams, A.: *Flip your Classroom: Reach every student in every class every day*, New Yourk, International Society for Technology in Education, 2012, ISBN 1-56484-315-7

[2] Hanč, J., Tuleja, S.: *Obrátená výučba vo svete a na Slovensku (1)*, Bratislava, Dobrá škola, 2012, roč. IV., č. 3, s. 4-5, ISSN 1338-0338

[3] Flipped Learning Network, *Flipped Learning*, 2014 [online], [cit. 2018-09-20]. Dostupné na internete: <https://flippedlearning.org/>

[4] Bergmann, J.: *Flipped Learning – Simplified with Jon Bergmann*, 2016 [online], [cit. 2018-09-20]. Dostupné na internete: <http://www.jonbergmann.com/>

[5] Bergmann, J.: *The History of the Flipped Class*, 2011 [online], [cit. 2018-09-20]. Dostupné na internete: <https://flippedclass.com/the-history-of-the-flipped-class/>

[6] Baranovič, R.: *„Flippnite" si triedu*, 2012 [online], [cit. 2018-09-20]. Dostupné na internete: <https://romanbaranovic.wordpress.com/2012/08/08/flippnite-si-triedu/>

Mgr. Barbora Matušková
FMFI UK
Mlynská Dolina 6284
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: barbora.matuskova28@gmail.com

O PODOBNOSTI ÚTVAROV

HELENA REPKOVÁ

ABSTRAKT. *V príspevku som sa pokúsila navrhnúť súbor úloh rozdelených do skupín bez konštrukčných úloh, ktoré by bolo vhodné preriešiť pri preberaní témy podobnosť útvarov na gymnáziu so štvorročným štúdiom.*

Úvod

Čo ma viedlo k zostaveniu tohto príspevku? V krajskom kole matematickej olympiády kategórie C,B žiaci riešili v tomto školskom roku tieto úlohy:

1. Daný je trojuholník ABC. Nech P,Q sú postupne stredy strán AB, AC a nech R,S sú vnútorné body úsečky BC, pre ktoré |BR|=|RS|=|SC|. Označme T priesečník priamok PR a QS. Dokážte, že ABTC je rovnobežník.

2. V ostrouhlom trojuholníku ABC označme O stred kružnice opísanej, S_a, S_b postupne stredy strán BC, AC a P pätu výšky na stranu AB. Vyjadrite podiel $|OS_a|/|OS_b|$ pomocou a=|BC|,b=|CA| a k=|AP|/|BP|.

Pri riešení úloh bolo potrebné použiť podobnosť trojuholníkov. Riešenie úloh žiakom robilo veľké problémy.

Pokúsila som sa úlohy o podobnosti útvarov rozdeliť do nasledujúcich okruhov. V každom okruhu sa nachádza 9 príkladov. Príklady sú zoradené podľa náročnosti.

1. Základné použitie viet sss, uu, sus

1. Trojuholník ABC má dĺžky strán a=5cm, b=7cm, c=9cm. Trojuholník ABC je podobný s trojuholníkom KLM s koeficientom podobnosti k=1/2. Vypočítajte dĺžky strán trojuholníka KLM.

2. Trojuholník ABC má dĺžky strán a=5cm, b=7cm, c=9cm a trojuholník KLM má dĺžky strán k=7,5cm, l=10,5cm, m=13,5cm. Sú trojuholníky ABC a KLM podobné? Ak áno, aký je pomer podobnosti?

3. Rozhodnite, či sú podobné trojuholníky so stranami dĺžky 12 cm, 16 cm, 19 cm a 10 cm, 13 cm, 15 cm.

4. Trojuholníky EFG a E´F´G´ sú podobné. Dopočítajte chýbajúce dĺžky strán, ak viete, že e=3,5cm, f=4,5cm, f´= 9cm, g´=5cm.

5. Obdĺžnik má strany dlhé 2 cm a 6 cm. Obdĺžnik s ním podobný má jednu stranu dlhú 9 cm. Koľko meria druhá strana tohto obdĺžnika?

6. Rozhodnite, či sú podobné trojuholníky, ak jeden má vnútorné uhly 38°, 55° a druhý 55° a 87°.

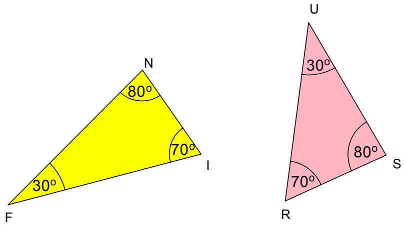
7. Trojuholník EFG je rovnoramenný s uhlom 70° pri hlavnom vrchole a trojuholník XYZ je tiež rovnoramenný s uhlom pri základni 55° . Sú trojuholníky podobné?

8. Dané sú podobné trojuholníky FIN a RUS. Doplňte do viet pomenovanie druhého z trojuholníkov so správnym poradím vrcholov

a/ Trojuholník FIN je podobný s trojuholníkom..........

b/ Trojuholník INF je podobný s trojuholníkom..........

c/ Trojuholník NFI je podobný s trojuholníkom..........



9. Rozhodnite, či sú podobné trojuholníky EFG, KLM, ak

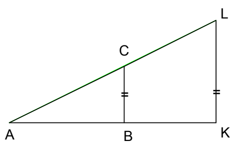
a/ |EF|=40 cm, |EG|=60 cm, uhol pri vrchole E je 74°, |KL|=60 cm, |KM|=90 cm, uhol pri vrchole K je 74°.

b/ |EF|=40 cm, |EG|=60 cm, uhol pri vrchole E je 74°, |KM|=30 cm, |ML|=40 cm, uhol pri vrchole M je 74°.

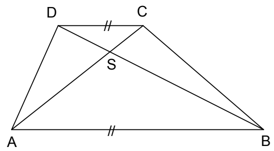
2. Dvojice podobných trojuholníkov

Vyhľadajte na obrázkoch všetky podobné trojuholníky, rovnobežné úsečky a pravé uhly sú označené značkou

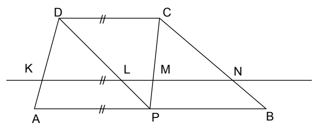
Obrázok 1



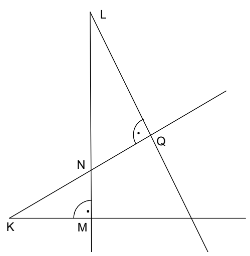
Obrázok 2



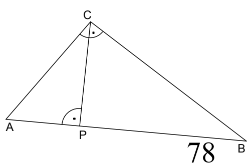
Obrázok 3



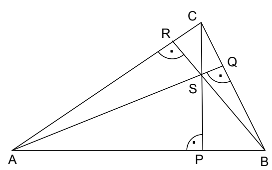
Obrázok 4



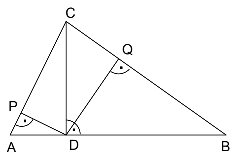
Obrázok 5



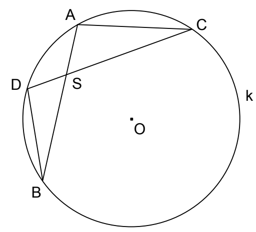
Obrázok 6



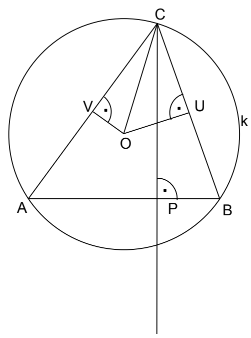
Obrázok 7



Obrázok 8



Obrázok 9



3. Ako sa menia obvody, obsahy, objemy podobných útvarov

1. Trojuholník ABC má strany dlhé 6 cm, 8 cm, 10 cm. Trojuholník A´B´C´má obvod 60 cm a je podobný s trojuholníkom ABC. Určte koeficient podobnosti.

2. Trojuholník ABC má dĺžky strán a=11 cm, b=5 cm, c=13 cm. S ním podobný trojuholník A´B´C´má obvod 79,75 cm. Určte dĺžky strán a´,b´,c´.

3. Pomer podobnosti štvorcov ABCD, A´B´C´D´ je vyjadrený číslom k=2,5. Koľkokrát je obsah štvorca A´B´C´D´väčší než obsah štvorca ABCD?

4. Obsah obdĺžnika ABCD je S=117,4 m^2. Obsah obdĺžnika KLMN, ktorý je s ním podobný je S=23010,4 dm^2. O koľko % je uhlopriečka obdĺžnika KLMN väčšia ako uhlopriečka obdĺžnika ABCD?

5. Obsah rovnostranného trojuholníka ABC je 2,56 krát väčší ako obsah rovnostranného trojuholníka KLM. O koľko % je výška trojuholníka KLM menšia ako výška trojuholníka ABC?

6. Povrch kocky K1 je o 21% väčší ako povrch kocky K2. O koľko % je väčšia strana kocky K1?

7. Kváder ABCDEFGH má rozmery AB=4 cm, BC=6 cm, AE=8 cm. S ním podobný kváder A´B´C´D´E´F´G´H´má objem 648 cm^3. Určte rozmery A´B´, B´C´, A´E´ kvádra A´B´C´D´E´F´G´H´.

8. Objem gule G1 je 240 cm^3. Vypočítajte objem gule G2, ak viete, že G2 má polomer o 20% menší ako je polomer gule G1. Nepočítajte polomer gule G1.

9. Bublinu sme nafúkli tak, že zväčšila svoj objem o 33,1%. O koľko % zväčšila svoj polomer.

4. Úlohy z praxe

1. Detské ihrisko má rozmery 50 m a 24 m. Na pláne mesta je toto ihrisko zobrazené ako obdĺžnik s obvodom 7,4 cm. Zistite mierku plánu mesta.

2. Pole má šírku 50 m a dĺžku 120 m. Zistite rozlohu pola na pláne s mierkou 1:2500.

3. Na mape mesta je bytovka zakreslená ako obdĺžnik s obsahom 0,0625 m^2. V skutočnosti je bytovka dlhá 40 m a široká 10 m. Vypočítajte mierku mapy mesta.

4. Na mape mierky 1:50 000 má jazero plochu 7 cm^2 . Zistite v km^2 skutočnú plochu jazera.

5. Plocha Európy je 10 498 000 km^2. Vypočítajte rozlohu Európy v cm^2 na mape s mierkou 1:200 000 000.

6. Budova školy vrhá na rovinu dvora tieň 16 m dlhý a v tom istom čase vrhá zvislá metrová tyč tieň 132 cm dlhý. Zistite výšku budovy školy.

7. Priama cesta rovnomerne stúpa na každých dvoch metroch o 46 cm. O koľko metrov stúpne cesta na vzdialenosti 270 m?

8. Pozorovateľ vidí dva továrenské komíny K_1, K_2 v rovnakom zornom uhle. Od komína K_1 je vzdialený 90 m a od komína K_2 68 m. Komín K_1 má výšku 45 m. Akú výšku má komín K_2? Predpokladáme, že oko pozorovateľa a päty obidvoch komínov sú v tej istej vodorovnej rovine.

9. Na výlete sa Adamovi zapáčila hradná veža. Odchádzal od nej po priamej ceste a po 50 krokoch smutne prekročil mláku.. Urobil ešte dva kroky a posledný raz sa obzrel. V mláke zazrel vrchol veže. Vo vlaku si uvedomil, že vzhľadom na to, že meria 190 cm a dĺžka jeho kroku je 75 cm, vie vypočítať približnú výšku veže. Je to možné? Ak áno, vypočítajte výšku veže. Predpokladáme, že človek vysoký 190 cm, má oči vo výške asi 180 cm.

5. Výpočtové úlohy

1. Pravouhlý trojuholník ABC má odvesny dlhé 5 cm a 8 cm. Trojuholník A´B´C´ je s ním podobný s pomerom podobnosti k=2/3. Koľko % z obsahu trojuholníka ABC je obsah trojuholníka A´B´C´?

2. V trojuholníku SAB bod A´leží na strane SA, bod B´ leží na strane SB a A´B´|| AB. V tomto trojuholníku boli zmerané vzdialenosti |SB|=180 m, |SB´|=60 m, |A´B´|=80 m,

A´B´|| AB. Určte vzdialenosť bodov A, B.

3. V trojuholníku ABC je |AB|=7 cm, |BC|=8,4 cm, |AC|=5,6 cm. Úsečka A´B´, A´B´|| AB, delí stranu AC na úsečky AA´, A´C, pre ktoré platí |AA´|:|A´C|=4:3. Určte dĺžky úsečiek AA´, A´C, BB´, B´C, A´B´.

4. V lichobežníku ABCD (AB || CD) sa uhlopriečky pretínajú v bode S. Vypočítajte dĺžku uhlopriečok, ak |AB|=12 cm, |CD|=10 cm, |AS|=7 cm, |BS|=6 cm.

5. Sú dané dve kružnice s polomermi 16 cm a 6 cm. Vypočítajte vzdialenosť priesečníka P vonkajších dotyčníc týchto kružníc od stredu kružnice s väčším polomerom, ak vzdialenosť stredov kružníc je 30 cm.

6. Je daný rovnoramenný trojuholník ABC. Základňa |AB|=8 cm, rameno |BC|=16 cm. Na ramene AC leží bod D tak, že trojuholník ABC je podobný s trojuholníkom DAB. Vypočítajte dĺžku AD.

7. V trojuholníku ABC bod E leží na strane AB, bod F leží na strane AC a EF || BC. Vypočítajte v cm^2 obsah trojuholníka ABC, ak |EF|=12cm, |BC|=16cm a obsah trojuholníka AEF sa rovná 27 cm^2.

8. V rovnoramennom trojuholníku ABC je úsečka PQ rovnobežná so základňou AB. Úsečka PQ rozdelí trojuholník ABC na menší trojuholník a lichobežník. Obsah menšieho trojuholníka a obsah lichobežníka sú v pomere 1:8. Vypočítajte dĺžku úsečky PQ, ak |AB|=9 cm, |AC|=6 cm, |BC|=6 cm.

9. Určte dĺžky strán a,b trojuholníka ABC, ak a je o 4 cm dlhšia než b, výška v_a = 6 cm, výška v_b= 9 cm.

6. Dôkazové úlohy

1. Dokážte, že sú podobné každé dva

a/ rovnostranné trojuholníky

b/ rovnoramenné pravouhlé trojuholníky

2. Ak z dvoch podobných trojuholníkov je jeden pravouhlý, je aj druhý pravouhlý. Dokážte.

3. V trojuholníku ABC sú body P, Q, R po rade stredy strán AB, BC, AC. Dokážte, že sú podobné

a/ trojuholníky ABC a RQC, ACB a PQB, CBA a RPA

b/ trojuholníky ABC a QRP

4. Vrcholom A trojuholníka ABC vedieme priamku a||BC, podobne vrcholmi B,C vedieme priamky b||AC, c||AB. Dokážte, že trojuholník A´B´C´ vytvorený priamkami a,b,c je podobný s trojuholníkom ABC.

5. V rovnostrannom trojuholníku ABC je vedená bodom D, ktorý je stredom strany BC, kolmica na stranu AB. Jej pätu označme E. Dokážte, že platí vzťah |AE|=3/4|AB|.

6. Bod M je vonkajší bod kružnice k. Dve priamky ním vedené pretnú kružnicu k v dvojiciach bodov A,B a C,D. Dokážte, že platí |MA|.|MB|=|MC|.|MD|.

7. Bod M je vnútorný bod kružnice k. Dve priamky ním vedené pretnú kružnicu k v dvojiciach bodov A,B a C,D. Dokážte, že platí |MA|.|MB|=|MC|.|MD|.

8. Bod M je vonkajší bod kružnice k. Dotyčnica vedená bodom M ku kružnici k sa dotýka kružnice k v bode T. Priamka vedená bodom M pretína kružnicu k v bodoch A,B. Dokážte, že platí $|MA|.|MB|=|MT|^2$.

9. Daný je rovnobežník ABCD a na strane AD bod X. Priamka BX pretne priamku CD v bode Y. Dokážte, že platí |AD|.|CD|=|AX|.|CY|.

Záver

Pri preberaní planimetrie učiteľ musí prácne vyhľadávať príklady z viacerých zdrojov. Učiteľom aj žiakom by pomohla gradovaná zbierka príkladov aj v elektronickej forme.. Časť príkladov by bolo možné riešiť v škole, ďalšie príklady by mohli žiaci riešiť doma. Veľmi by sa uľahčila manipulácia s textami príkladov a výsledkami riešení. Utvorilo by sa prostredie, aby sa študent učil aj sám a volil si mieru osvojenia učiva planimetrie. Riešenia príkladov z dôvodu dodržania rozsahu príspevku neuvádzam. V prípade záujmu riešenia môžem poskytnúť.

LITERATÚRA

[1] Šedivý,O., Čeretková,S., Malperová,M., Bálint,Ľ.: Matematika pre 9.ročník ZŠ (1.časť), Bratislava, Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 2001, ISBN 80-08-03169-7

[2] Tarábek,J.: Geometria v príkladoch, Bratislava, Pedagogické vydavateľstvo Didaktis,s.r.o., 2003, ISBN 80-89160-00-X

[3] Boroš,M.: Maturita z matematiky, Bratislava, Vydavateľstvo Príroda,s.r.o., 2013, ISBN 978-80-07-02217-1

[4] Berová,Z., Bero,P.: Matematika, učebnica pre 9.ročník ZŠ a 4.ročník gymnázií s osemročným štúdiom. Bratislava, Libera Terra,s.r.o., 2015, ISBN 978-80-89792-18-4

[5] Žabka,J., Černek,P.: Matematický trenažér 9 (1.časť), Bratislava, aSc Applied Software Consultants s.r.o., 2012, ISBN 978-80-970773-4-1

[6] Žabka,J., Černek,P.: Matematický trenažér 9 (2.časť), Bratislava, aSc Applied Software Consultants s.r.o., 2013, ISBN 978-80-970773-5-8

[7] Pomykalová,E.: Matematika pro gymnázia, Planimetrie, Prometheus, 1993, ISBN 978-80-7196-358-5

[8] Partiková,K.,Reiterová,M.: Nová maturita, matematika 2, Bratislava , Vydavateľstvo Príroda, s.r.o., 2005, ISBN 80-07-01318-0

[9] Kubát,J., Hrubý,D., Pilgr,J.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy, Prometheus, 1996, ISBN 80-7196-030-6

[10] Richtáriková,S., Kyselová,D.: Matematika,Nitra,Enigma,2003, ISBN 80-85471-61-2

[11] Kohanová,I.,Babišová,V.,Ševerová,D.,Tichá,H.: Matematika, zbierka úloh pre stredné školy, Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana, 2011, ISBN 978-80-8120-062-5

[12] Klimentová, J., Karkušová,A.: Názov projektu: Učíme sa nielen z učebníc, učíme sa pre život, Kód ITMS projektu: 26110130666

Helena Repková, RNDr.
Gymnázium Partizánske
SNP č.116 , 97247 Oslany
e-mail: h.repkova@ gmail.com

ROZVOJ FUNKČNÉHO MYSLENIA NA RÔZNYCH STUPŇOCH MATEMATICKÉHO VZDELÁVANIA

SLAVÍČKOVÁ MÁRIA, VARGOVÁ MICHAELA

ABSTRAKT. V príspevku chceme poukázať na rôzne možnosti využitia figurálnych čísel pri rozvíjaní schopnosti zovšeobecňovania, argumentácie a funkčného myslenia žiakov. Výhodu takéhoto zadania postupnosti v porovnaní s číselnými postupnosťami vidíme v tom, že vizuálna stránka takto určenej postupnosti umožňuje žiakom „nazerať“ na zmenu členov postupnosti rôznym spôsobom, čo im umožňuje dospieť k zovšeobecneniu použitím odlišných stratégií.

Úvod

Práca so vzormi, hľadanie zákonitostí, vzťahov sa u nás na hodinách matematiky explicitne vyskytuje na prvom stupni a potom až na strednej škole, keď sa berú postupnosti. Medzitým sa nekladie dôraz na objavenie vzťahu medzi rôznymi objektmi.

V zahraničí sa ukazuje ako vhodné používať obrázkové postupnosti (najmä u detí vo veku zodpovedajúcemu deťom u nás na primárnom stupni). Hľadanie vzoru, tvorba rekurentného vzťahu, alebo nájdenie všeobecného predpisu je pre nich potom jednoduchšie. Rozvíjajú si tak algebraické a funkčné myslenie.

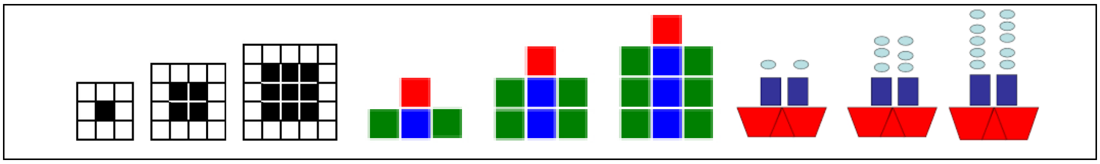
Algebraické a funkčné myslenie

Algebraické myslenie (resp. zdôvodňovanie) podľa [1] zahŕňa tvorbu zovšeobecnení na základe skúsenosti s číslami a počítaním, formalizáciu týchto myšlienok využitím zmysluplného symbolického označenia, preskúmanie podstaty vzoru a funkcií. Dôležitým aspektom algebraického myslenia je funkčné myslenie, ktoré možno charakterizovať ako zovšeobecnenie vzťahov medzi súvisiacimi kvantitami, vyjadrenie týchto vzťahov slovami, symbolmi, tabuľkami alebo grafmi,

Jedným z najviac preferovaných spôsobov rozvoja funkčného myslenia je práca so špeciálnymi obrázkovými vzormi. Podľa [2] funkčné myslenie zahŕňa identifikovanie a zovšeobecnenie vzorov, takže prístup vyžadujúci využitie postupnosti obrázkov, ktorých prvky sa menia z kroka na krok a je možné nájsť závislosť medzi počtom prvkov a pozíciou obrázka, je vhodný nástroj na jeho rozvoj. Tento v odbornej literatúre nazývaný „rastúci vzor“ vedie pomerne prirodzene k objaveniu vzťahu medzi premennými množstvami a tak uľahčuje rozvoj funkčného myslenia a pochopenie konceptu funkcie.

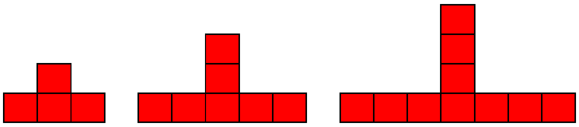
Figurálne čísla

Vhodným nástrojom na rozvoj algebraického a funkčného myslenia sú tzv. figurálne čísla. Tie možno definovať nasledovne: Majme postupnosť obrázkov, ktoré sa menia podľa určitej zákonitosti (vzoru). Figurálne číslo je číslo, ktoré opisuje veľkosť obrázku (alebo inú kvantitu) v postupnosti meniacich sa obrázkov.



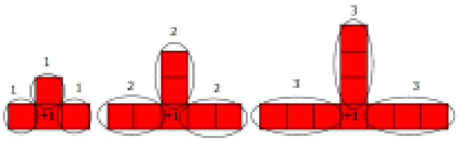
Obrázok 1: príklady figurálnych čísel

Vyjadrenie n-tého členu závisí od spôsobu pohľadu na danú postupnosť obrázkov. Majme postupnosť obrázkov (obrázok 2). Vyjadrenie sa líši od toho, čo vnímame ako meniacu sa (narastajúcu) časť obrázku (obrázky 3a, 3b, 3c)



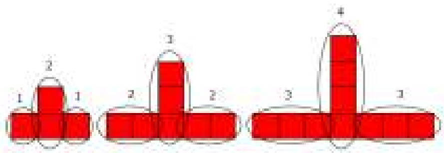
obrázok 2

Pozrieme sa bližšie na stratégie riešenia tejto úlohy. Samozrejme, všetky správne stratégie vedú k tomu istému riešeniu, niekedy však treba riešenie zjednodušiť (spočítať čo sa dá, roznásobiť zátvorku a pod... v závislosti na zložitosti zápisu)



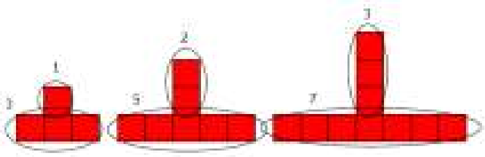
Obrázok 3a

- Menia sa dĺžky troch ramien
- Nárast o 1 pre každé rameno
- Štvorček v „strede“ treba vždy pripočítať
- Rekurentný vzťah: $a_n = a_{n-1} + 3$
- Všeobecný vzťah: $a_n = 3n + 1$



Obrázok 3b

- Nemáme pevnú hodnotu na pripočítanie ako v prípade 3a
- Všeobecný vzťah pred úpravou: $a_n = 2n + (n+1)$

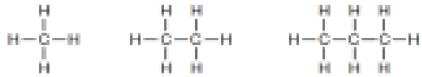


Obrázok 3c

- „prízemie“ sú nepárne čísla
- „komín“ sú postupne čísla zväčšujúce sa o 1
- Všeobecný vzťah pred úpravou: $a_n = (2n+1) + n$

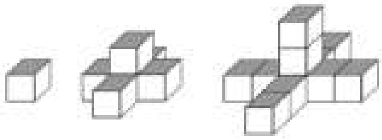
S rastúcimi obrazcami sa žiaci neskôr stretnú aj napr. na chémii pri chemických vzorcoch a názvosloví (obrázky 4a, 4b), v rôznych častiach matematiky (obrázky 5a, 5b)

Obrázok 4a

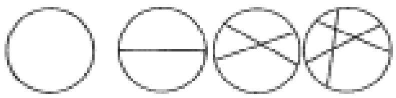


Obrázok 4b

Každá časť matematiky nám vie ponúknuť kontext pre prácu s rastúcimi obrázkami, resp. figurálnymi číslami. Či už je to počítanie objemov, povrchov stavieb z kociek, alebo počet častí, ktoré vzniknú delením kružnice tetivami, môžeme od jednoduchých lineárnych závislostí prejsť cez kvadratické, kubické k exponenciálnym.

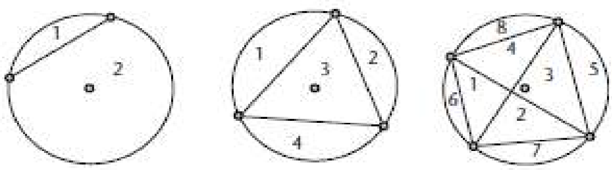


Obrázok 5a



Obrázok 5b

Zložitosť úprav a výpočtov záleží samozrejme od stupňa, na ktorom danú úlohu zadávame. Treba si však dať pozor pri úpravách existujúcich zadaní, nie všetky majú riešenie pre „*n* blížiace sa do nekonečna“. Napr. úprava úlohy s tetivami tak, že chceme, aby vytvárali *n*-uholník vrátane uhlopriečok – spájanie každého pridaného bodu na kružnici so všetkými ostatými (obrázok 6). Daný vzor funguje len pre prvých 5 krokov.



Obrázok 6

Pre prvotné skúmanie nám nielen v tomto prípade pomôže urobiť si tabuľku hodnôt, kde možno závislosť odpozorovať:

Počet vyznačených bodov na kružnici	Počet častí kruhu
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
6	31

Tabuľka 1

Nami predpokladaný vzťah pre počet oblastí $p_n = 2^{n-1}$ platí len pre $n \in \{1,2,3,4,5\}$.

Záver

Ako sme v stručnom prehľade načrtli, s figurálnymi číslami možno pracovať na každom stupni matematického vzdelávania, práca s premennou a funkciou má šancu sa stať prirodzenou a pre žiakov pochopiteľnou (najmä ak im nebudeme nanucovať naše označenia a necháme ich vymyslieť si vlastné, keď slovný opis už nebude postačujúci).

LITERATÚRA

[1] Van de Walle, J.A., Karp, K. S., Bay-Williams, J. M. (2010) *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching developmentally*. Boston: Pearson

[2] Blanton, M.L. a Kaput, J. J. (2011) *Functional Thinking as a Route into Algebra in the Elementary Grades in Early Algebraization*: A global Dialogue from Multiple Perspectives (J. Cai, E. Knuth eds.), pp.344-352, Springer.

[3] Sultan, A., Artzt, A.F. (2018) *The Mathematics That Every Secondary School Math Teacher Needs to Know*. New York: Taylor and Francis

[4] Obrázky pre rastúce vzory a figurálne čísla: www.visualpatterns.org

PaedDr. Mária Slavíčková, PhD.; Mgr. Michaela Vargová, PhD.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: slavickova@fmph.uniba.sk,
michaela.vargova@fmph.uniba.sk

VYBRANÉ METÓDY RIEŠENIA MATEMATICKÝCH ÚLOH

SLAVÍČKOVÁ MÁRIA, VARGOVÁ MICHAELA

ABSTRAKT. V príspevku predstavíme niekoľko rôznych úloh s dôrazom nielen na nájdene stratégie, ale aj odôvodnenie jej korektnosti a náčrt dôkazu odhalených zákonitostí.

Úvod

Neriadené otvorené skúmanie je jednou z metód, kedy žiaci sami objavujú poznatok. Ten sa pre nich stáva hodnotnejším a trvalejším. Napr. Kopka [1] uvádza, že žiaci a študenti všetkých stupňov škôl majú možnosť spoznať tvorivý aspekt matematiky, ak sa s nimi matematika „dobre robí“. Zastavíme sa na chvíľku pri slovách „dobre“ a „robí“. Ak má žiak/študent naozaj „robiť“ matematiku, nemal by len opakovať postup, ktorý uviedol učiteľ na tabuľu. Mal by byť tvorcom vlastného postupu, na základe vlastného skúmania, objavovania, vytvorenia hypotézy o fungovaní a overenia tejto hypotézy. A z toho nám vyplýva, ako robiť matematiku „dobre“ – nemáme žiakom doslova podsúvať jediné správne riešenie úlohy, ale mali by sme nechať priestor pre objavovanie. Ono nie vždy sa to dá, nie na každej hodine, nie za každých okolností.

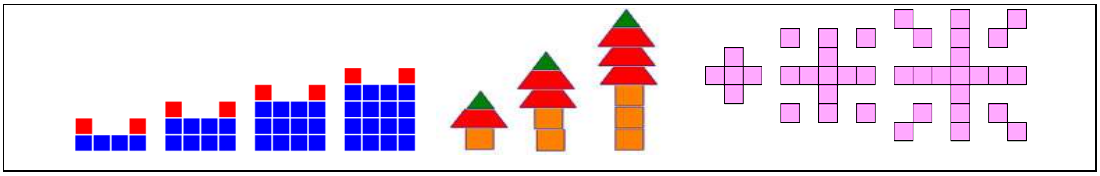
V školskej matematike sa stretávame s troma typickými problémami na riešenie (podľa [1]):

1) Problém rutinný – poznáme, z čoho máme vyjsť (počiatočná situácia), vieme čo máme dosiahnuť (cieľová situácia) a poznáme cestu riešenia. Typickým príkladom sú úlohy zadané „Riešte rovnicu:“
2) Problém skutočný – poznáme, z čoho máme vyjsť, čo máme dosiahnuť, ale cestu nepoznáme (napr. urobiť dôkaz tvrdenia, pričom tento dôkaz nebol poskytnutý)
3) Problém vyžadujúci skúmanie – poznáme len počiatočnú situáciu, t.j. čo máme dané. Nepoznáme ani cieľ, ani cestu.

My sme sa na workshope zamerali práve na tretí typ úloh a to problémy vyžadujúce skúmanie.

Figurálne čísla

Podľa Bera (1989, s.10), prácu s figurálnymi možno pripísať Pytagorovi, ktorý kamienky reprezentujúce čísla začal ukladať do rôznych tvarov. Čísla môžeme teda mať napríklad trojuholníkové, štvorcové, obdĺžnikové, päťuholníkové atď.

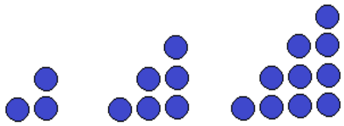


Obrázok 1: príklady figurálnych čísel

Figurálne číslo však možno vidieť aj v širšom kontexte bez toho, aby sme mu rovno vedeli priradiť meno, na základe ktorého si ho budeme vedieť hneď predstaviť (viď obr. 1). Skúsime figurálne číslo zadefinovať vo všeobecnosti. Je daná postupnosť obrázkov, ktoré sa menia podľa určitej zákonitosti (vzoru). Figurálne číslo je číslo, ktoré opisuje veľkosť obrázku (alebo inú kvantitu) v postupnosti meniacich sa obrázkov.

Úloha 1: Trojuholníkové čísla

Zadanie: Nájdite čo najviac vlastností trojuholníkových čísel (viď obrázok 2).



Obrázok 2

Riešenie: Keďže nie je definované, aké vlastnosti máme hľadať, ani ako vyzerá prvé trojuholníkové číslo a pod, máme otvorenú cestu a fantázii sa medze nekladú. Môžeme začať vypisovaním si niekoľkých ďalších členov, hľadať zákonitosti a pod. Po čase určite prídete k týmto (a určite aj ďalším nemenej zaujímavým) vlastnostiam trojuholníkových čísel (T_n označuje n-té trojuholníkové číslo, S_n n-té štvorcové číslo, $n \in \mathbb{N}$)

- Vznik ďalšieho čísla: $T_n = T_{n-1} + n$
- Všeobecný predpis pre n-té trojuholníkové číslo: $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- Opakujúci sa vzor: dve párne, dve nepárne, dve párne, dve nepárne,...
- Súčet susedov: $T_n + T_{n+1} = S_{n+1}$

Nájsť vlastnosť je len jedna časť, prichádza tá nemenej dôležitá – dokázať, že to naozaj platí. Dôkaz musí byť primeraný veku žiakov (obrázkový, slovný, rigorózny)

Po objavení (a dokázaní) vlastností možno prejsť k otázkam, ktoré preveria, nakoľko sme sa s trojuholníkovými číslami zžili:

- Z koľkých kameňov sa skladá prvé, piate a šieste trojuholníkové číslo?
- Z koľkých kameňov sa skladá sté trojuholníkové číslo?
- Koľké trojuholníkové číslo odpovedá číslu 40?
- Vieme preusporiadaním kameňov trojuholníkového čísla dostať iný typ čísla?
    - Ak áno, kedy? Ide to vždy?
    - Ak nie, prečo?
- Je súčet dvoch ľubovoľných nesusediacich trojuholníkových čísel opäť trojuholníkové číslo?
- Je k-násobok ($k > 1$) trojuholníkové čísla opäť trojuholníkové číslo?
- Existujú trojuholníkové čísla, ktoré sú súčasne aj štvorcové?

Pri zisťovaní existencie stačí ukázať aspoň jeden príklad, ak však ide o prípad triviálny, požadujeme ešte aspoň jeden (napr. odpoveď na otázku, či existuje trojuholníkové číslo, ktoré je súčasne aj štvorcové, odpoveď je že áno, číslo 1 – je aj trojuholníkové aj štvorcové, potom číslo 36 – ide o šieste štvorcové a ôsme trojuholníkové číslo)

Úloha 2: Sierpinského pletenec (trojuhoník)

Známy fraktál možno tiež považovať za figurálne číslo. Nejde tu síce o počet kameňov (resp. iných stavebných prvkov, z ktorých sa útvar skladá), ale ako sme definovali skôr, ide o zmenu kvantity. V tomto prípade budeme počítať trojuholníky, ktoré napokon vykreslíme. Najskôr si ale povieme, ako fraktál vzniká.

Sierpinského trojuholník môže byť konštruovaný z rovnostranných trojuholníkov opakovaným odoberaním menších rovnoramenných trojuholníkov. Začíname jedným rovnoramenným trojuholníkom, zostrojíme jeho stredné priečky a vnútorný trojuholník odoberieme. V každom ostatnom trojuholníku opäť zostrojíme stredné priečky a vnútorný trojuholník odoberieme. Proces opakujeme do nekonečna.

Obrázok 3: Sierpinského trojuholník

Zadanie: Koľko trojuholníkov budeme mať, keď proces zopakujeme

a) 2 krát b) 3- krát c) 10- krát d) *n*- krát?

Svoje zistenia a zovšeobecnenia odôvodnite.

Riešenie:

Pri hľadaní ďalšieho Sierpinského trojuholníka, resp. ďalšieho figurálneho čísla si možno všimnúť, že každý z trojuholníkov, ktorý nám ostal, je v nasledujúcom kroku nahradený troma. Preto odpovede na zadané otázky sú:

a) 9 b) 27 c) 3^{10} d) 3^n

Ako sme spomínali, je dôležité netrvať na jednom jedinom správnom riešení. My sme pri riešení úlohy vychádzali z toho, že počet iterácií je rovný číslu obrázka, preto plný trojuholník je nulté číslo, trojuholník s jedným odobraným trojuholníkom je prvé číslo atď. (ide teda o postupnosť $T_0, T_1, T_2, \ldots$)

Nie všetci však postupujú týmto spôsobom, pre niekoho je výhodnejšie si zostaviť tabuľku hodnôt a vzťah numericky odpozorovať. V našom prípade, by to mohlo vyzerať nasledovne:

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**10**	k
T_n	1	3	9	27	3^{10}	3^k

Tabuľka 1

Úloha 3: Kochova krivka a vločka

Začneme Kochovou krivkou, z ktorej následne vytvoríme známu Kochovu vločku.

Kochova krivka (pomenovaná podľa švédskeho matematika Helge von Kocha) vzniká rekurzívnym spôsobom (podobne ako Sierpinského trojuholník). Začíname úsečkou, ktorú rozdelíme na tri rovnaké časti, nad strednou časťou zostrojíme rovnostranný trojuholník a pôvodnú časť úsečky „zmažeme" (viď obrázok). Týmto spôsobom pokračujeme na každej vzniknutej časti, opakujeme do nekonečna.

Obrázok 4: Kochova krivka

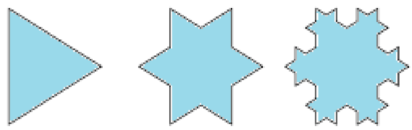
Zadanie 1: Určte obvod krivky po dvoch, troch, desiatich a n iteráciách. Predpokladajme, že úsečka, s ktorou začíname, má dĺžku jedna.

Riešenie: Tak ako pri Sierpinského trojuholníku, aj tu figurálne číslo bude zodpovedať počtu iterácií, teda máme postupne $K_0, K_1, K_2, \ldots$ Keďže máme zistiť obvod, bude vhodné si vytvoriť tabuľku hodnôt:

n	0	1	2	3	4	k
K_n	1	$4\cdot\frac{1}{3}$	$4\cdot4\frac{1}{9}$	$4\cdot4\cdot4\cdot\frac{1}{27}$	$4^4\cdot\frac{1}{3^4}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^k$

Tabuľka 2

Z Kochovej krivky sa často robí tzv. Kochova vločka. Základom je rovnostranný trojuholník, na ktorého strany aplikujeme rovnaké pravidlá (viď obrázok 5).



Obrázok 5: Kochova vločka

Zadanie 2: Určte obvod a obsah Kochovej vločky. Dĺžka strany rovnostranného trojuholníka, z ktorého vychádzame, sa rovná 1.

Riešenie: Obvod je triviálny – tým, že vychádzame z rovnostranného trojuholníka, stačí uvažovať Kochovu krivku trikrát, preto obvod n-tej Kochovej vločky je $3\left(\frac{4}{3}\right)^n$.

V tomto prípade nám tabuľka v pravom slova zmysle zrejme veľmi nepomôže. No keď si výpočet dobre rozfázujeme, tak výsledok bude dostatočne skoro „viditeľný".

Začneme výpočtom obsahu nultej Kochovej vločky, ten je triviálny:.

$$K_{S0} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$K_{S1} = K_{S0} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \sin 60°$. po úprave dostaneme $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Tento rekurentný vzťah pre výpočet obsahu aplikujeme ďalej.

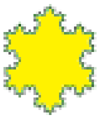
$K_{S2} = K_{S1} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{3^3}$, po úprave dostaneme $\frac{10\sqrt{3}}{27}$

Ako vidíme, upravené hodnoty nám nepomôžu, preto výsledky ponecháme v tvare naznačujúcom výpočet:

$$K_{S0} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$K_{S1} = K_{S0} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right)$$

$$K_{S2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{27}\right)$$



$$K_{S3} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^3} + \frac{16}{3^5}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \sum_{k=0}^{2} \frac{4^k}{3^{2k+1}}\right)$$

Sumu v získanom výraze si môžeme ešte upraviť, t.j. $K_{S3} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2k}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2}\left(\frac{4}{9}\right)^{k}\right)$ a zovšeobecniť pre obsah n-tej Kochovej vločky: $K_{Sn} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{4}{9}\right)^{k}\right)$.

Po výpočte súčtu n členov geometrickej postupnosti s kvocientom $q=\frac{4}{9}$, dosadení výsledku a následnej úprave pre obsah n-tej Kochovej vločky dostávame $K_{Sn}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{3}{5}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n}\right)\right)$.

V úvode o Kochovej krivke a vločke sme písali, že proces opakujeme do nekonečna. Keď spočítame limity z obsahu a obvodu Kochovej vločky zistíme:

Obsah: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{3}{5}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n}\right)\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{8}{5}=\frac{2\sqrt{3}}{5}$

Obvod: $\lim\limits_{n\to\infty}3\left(\frac{4}{3}\right)^{n}=\infty$

Kochova vločka má konečný obsah a nekonečný obvod.

Záver

Z napísaného vyplýva, že na skúmanie figurálnych čísel môžeme vymyslieť úlohy veľmi jednoduché, kde je vzor jasný hneď a sú vhodné aj pre žiakov základnej školy. No menšími obmenami úloh možno dôjsť k úlohám pomerne náročným. Tieto možno zaradiť pre šikovných žiakov v maturitnom ročníku, alebo študentov matematiky na vysokých školách.

LITERATÚRA

[1] Kopka, J. (2004): *Výzkumný přístup při výuce matematiky*, Ústí nad Labem, Acta Universtitatis Purkynianae 101, 2004, ISBN 80-7044-604-8, S.9

[2] Bero, Peter: *Matematici, ja a ty*, Bratislava, Mladé letá, 1989, ISBN 80-06-00118-9

PaedDr. Mária Slavíčková, PhD.; Mgr. Michaela Vargová, PhD.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: slavickova@fmph.uniba.sk, michaela.vargova@fmph.uniba.sk

MATEMATIKA BEZ BARIÉR

MÁRIA STANKOVIČOVÁ, ELENA MENDELOVÁ

ABSTRAKT. Príspevok je zameraný na možnosti spolupráce Centra podpory študentov so špecifickými potrebami a učiteľmi matematiky na základných a stredných školách. Zdravotné postihnutie študenta si vyžaduje osobitnú pozornosť nielen v technicko-materiálnom zabezpečení, ale aj v metodike a vzdelávacích postupoch. Chceme sa s Vami podeliť o naše doterajšie skúsenosti zo spolupráce s učiteľmi zo stredných škôl a ich žiakmi najmä so zrakovým postihnutím.

Centrum podpory študentov so špecifickými potrebami UK

Centrum podpory študentov so špecifickými potrebami na Univerzite Komenského v Bratislave (CPŠ) je špecializovaným pracoviskom s 25-ročnou skúsenosťou, zameraným na podporu vzdelávania zdravotne znevýhodnených študentov na vysokých školách. Pôvodným zameraním bola podpora určená najmä pre študentov so zrakovým postihnutím – nevidiacich a slabozrakých. Svoje aktivity Centrum zameriava predovšetkým na:

- informačné, poradenské a konzultačné služby,
- akademickú podporu počas štúdia,
- vzdelávaciu a tréningovú činnosť (práca s asistenčnými technológiami),
- technickú podporu (napr. spracovanie študijnej literatúry do prístupnej formy).

CPŠ zabezpečuje podporné služby primárne pre študentov Univerzity Komenského, no dôležité sú aj kontakty a spolupráca so širšou odbornou aj laickou verejnosťou:

- uchádzači o štúdium na vysokej škole so špecifickými potrebami a ich rodičia,
- učitelia vysokých, stredných a základných škôl,
- poradenskí pracovníci (výchovní poradcovia, pracovníci CPPPaP[8], CŠPP[9], ...),
- študenti VŠ zaujímajúci sa vo svojom odbore o problematiku zdravotného postihnutia (špeciálna pedagogika, sociálna práca, informatika, architektúra,...).

Záujem o spoluprácu so základnými a strednými školami je odpoveďou na podnety od žiakov s ťažkým zdravotným postihnutím (nielen) integrovaných do bežných škôl. Podnety prichádzajú aj od učiteľov a rodinných príslušníkov. Rodičia spravidla hľadajú pomoc z dôvodu nedostatku alebo úplnej absencie učebníc v prístupnej forme, pri komunikácii so školou. Tiež majú záujem dozvedieť sa čo najviac o tom, ako postupovať, aby ich dieťa bolo úspešné a malo šancu pokračovať v štúdiu na vysokej škole. Problémy učiteľov tiež súvisia s nedostatkom prístupných študijných materiálov, ďalej však vyplývajú aj z nedostatku skúseností s uvedenou skupinou žiakov, slabej orientácii v špeciálnych metodikách a technológiách, z chýbajúceho podporného systému najmä pri vzdelávaní v prírodovedných a matematických zameraniach. Obom stranám – rodičom aj učiteľom ide predovšetkým o kvalitnú prípravu žiaka, najmä ak ide o mladého človeka so študijnými ambíciami.

---

[8] CPPPaP – Centrum pedagogicko-psychologického poradenstva a prevencie

[9] CŠPP – Centrum špeciálno-pedagogického poradenstva

CPŠ sa počas uplynulých rokov zapájalo do programov zameraných na podporu vzdelávania žiakov so zrakovým postihnutím, často takéto programy iniciovalo. Primárne sa programy týkali oblasti sprístupňovania matematiky pre nevidiacich a slabozrakých a možností a limitov efektívneho využívania asistenčných technológií vo vzdelávaní.

V rámci spolupráce s učiteľmi ZŠ a SŠ v tejto oblasti boli identifikované **najčastejšie problémy pri vyučovaní matematiky** u nevidiacich a slabozrakých žiakov:

- V praktickom riešení príkladov
    - Ako zapísať matematickú symboliku?
    - Ako riešiť príklady pri tabuli?
    - Ako zabezpečiť sledovanie zápisu na tabuľu počas výkladu učiteľa?
- Pri úlohách s obrázkami
    - Akou formou sprostredkovať informáciu, ktorú vyjadruje obrázok?
    - Ako môže žiak riešiť úlohy z geometrie?
- V nedostatku študijných materiálov v prístupnej forme pre žiaka
    - nedostatok učebníc vytlačených v Braillovom písme alebo vo forme elektronického dokumentu.

CPŠ má naďalej záujem o spoluprácu s rodinami a žiakmi. Školám a učiteľom ponúka technickú a metodickú pomoc, tiež asistenciu pri príprave prístupných študijných materiálov.

Hlavným dôvodom **vo vzťahu k žiakom** je posilnenie a podpora záujmu nevidiacich o štúdium matematických zameraní (matematika, informatika, fyzika, ekonómia, technické odbory), ktoré aj ľuďom s ťažkým zdravotným postihnutím dávajú príležitosť na spoločenské a pracovné uplatnenie, na ekonomickú nezávislosť.

Hlavným dôvodom **vo vzťahu k učiteľom** je ich podpora a zorientovanie v možnostiach používania kompenzačných pomôcok a asistenčných technológií, v metódach sprístupňovania matematických textov (reading mathematics) a v možnostiach riešenia matematických úloh (doing mathematics). Dlhoročné skúsenosti ukazujú, že nevidiacim žiakom práve z dôvodu technickej a časovej náročnosti a nedostatku odbornej pomoci pre učiteľov býva často redukovaný obsah vyučovania, čo má negatívny vplyv aj na rozvoj zručností a kompetencií potrebných pri pokračovaní v štúdiu v matematických, technických a prírodovedných zameraniach. Znižuje sa pripravenosť, motivácia, záujem, posilňuje sa hendikep už znevýhodneného žiaka.

Školám a učiteľom odporúčame spolupracovať so špeciálnymi pedagógmi a odborníkmi na zrakové postihnutie. Dôležité je **oboznámiť sa so študijnými návykmi žiaka** – aký má spôsob zapisovania poznámok, akú formu študijného materiálu uprednostňuje, či je to tlač v Braillovom písme alebo elektronické dokumenty. Významná je žiakova **gramotnosť v čítaní reliéfnej grafiky** a práca s modelmi. Pri slabozrakom žiakovi je potrebné zistiť vhodnú veľkosť písma a farebný kontrast s pozadím. Všetky tieto informácie sú dôležité pre vzdelávanie ako i pri adaptácii študijných materiálov do prístupnej formy.

Asistenčné technológie pre žiakov so zrakovým postihnutím

Asistenčné technológie predstavujú súhrn technických zariadení a pomôcok, ktoré umožňujú nevidiacim osobám kompenzovať dôsledky zrakového postihnutia do tej miery, aby boli schopné samostatne, bez cudzej pomoci, riešiť bežné životné situácie.[1] Medzi asistenčné technológie vhodné pre vzdelávací proces nevidiacich žiakov patrí počítač, v ktorom je nainštalovaný **čítač obrazovky**, prípadne je k nemu pripojený aj **hmatový displej** (braillovský riadok), ktorý zobrazuje text v Braillovom písme.

Čítač obrazovky je program, ktorý pomocou hlasového výstupu poskytuje žiakovi textové informácie zobrazené na obrazovke počítača (názvy programov, text v dialógových oknách, text v dokumentoch), avšak neumožňuje pracovať s grafikou. Problémy môžu nastať aj s interpretáciou špeciálnych symbolov (znak odmocniny, zápis zlomku...). V takom prípade je potrebné hľadať vhodný softvér, ktorý v spolupráci s čítačom obrazovky správne interpretuje matematický zápis.

Veľmi dôležité je u nevidiacich žiakov rozvíjať gramotnosť v čítaní reliéfnej grafiky, hlavne v nižších stupňoch vzdelávania. Na dobre položených základoch sa dá stavať na strednej aj vysokej škole. Posilnenie mentálnych schém, pri ktorých sa spájajú teoretické vedomosti s hmatovými skúsenosťami predstavuje hodnotnú vedomostnú kompetenciu. Reliéfne obrázky a texty v Braillovom písme sa tlačia na brailovskej tlačiarni. K tlačiarni je potrebné zakúpiť obslužný softvér na transformáciu textov a úpravu obrázkov.

Medzi asistenčné technológie vhodné pre slabozrakých žiakov patrí počítač, v ktorom je nainštalovaný **zväčšovač obrazovky**, ktorý umožňuje upraviť farebnú schému a prispôsobiť veľkosť písma. V prípadoch, kde by čítanie dlhých textov žiaka veľmi zaťažovalo, je vhodné doplniť k zväčšovaču obrazovky aj hlasovú podporu. Pre čítanie tlačenej predlohy slúži **elektronická lupa**, buď stolová (v študovni, doma) alebo prenosná (počas vyučovania).

Obrázok 1: hmatový displej (braillovský riadok) a elektronická čítacia lupa stolová

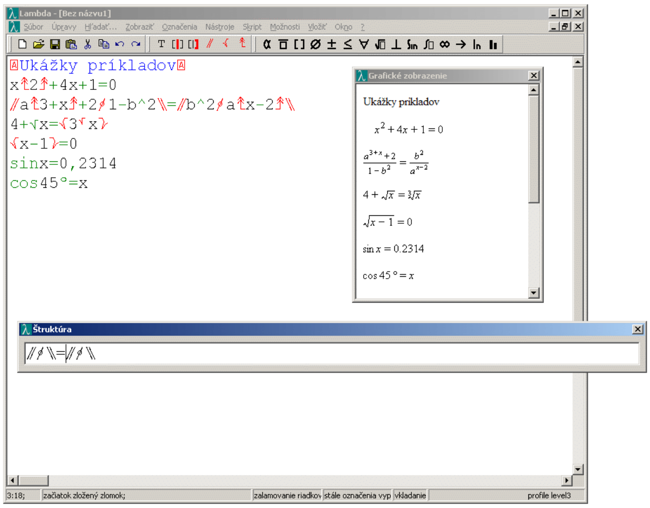
Sprístupnenie matematického obsahu nevidiacim žiakom

Spôsob práce nevidiaceho žiaka s matematickým zápisom, či už jeho čítanie alebo zapisovanie, je výrazne odlišný od spôsobu, ako narábajú so zápisom jeho vidiaci spolužiaci. Najvýznamnejším rozdielom je **linearizácia dvojrozmerného zápisu**. To znamená, že symboly je potrebné zapísať postupne za sebou v riadku, pričom pri niektorých zápisoch (napríklad zlomky) je potrebné jednoznačne oddeliť začiatky a ukončenia častí (čitateľa a menovateľa). Na špeciálnych základných školách sa nevidiaci žiaci učia matematickú normu pre slovenské Braillovo písmo. V integrovanom prostredí však narážajú na problém, že vyučujúci tento zápis nepoznajú a tiež chýbajú učebnice transformované do Braillovno písma. Vhodným riešením je matematický editor, ktorý môže žiak používať spolu s čítačom obrazovky a ovládať pomocou klávesnice.

Matematické editory pre žiakov so zrakovým postihnutím

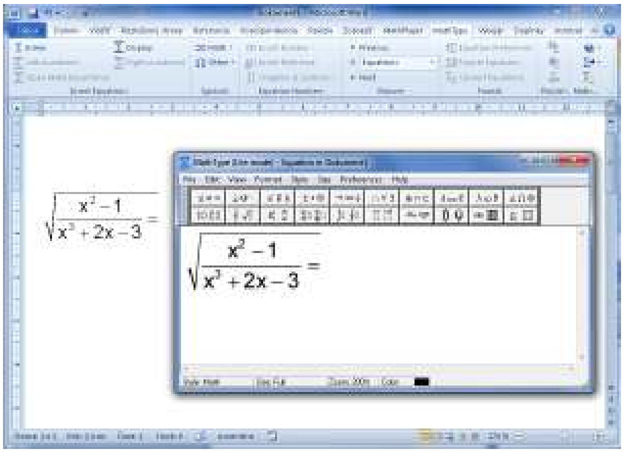
Matematický editor Editor LAMBDA (**L**inear **A**ccess to **M**athematics for **B**raille **D**evice and **A**udio-synthesis – Lineárny prístup k matematike pre braillovské zariadenia a hlasový výstup) je produktom medzinárodného projektu Lambda Project [2]. V rokoch 2006 – 2007 bol editor LAMBDA lokalizovaný do slovenského jazyka pracovníkmi a spolupracovníkmi Centra podpory pre študentov so špecifickými potrebami na Univerzite Komenského v Bratislave. [3]

Jednotlivé časti zápisu žiak vkladá klávesovými skratkami a cez hlasový výstup čítača obrazovky môže kontrolovať správnosť zápisu. Výhodou editora je možnosť zobraziť zápis v podobe, na akú je bežne učiteľ matematiky zvyknutý. Učiteľ môže kontrolovať prácu žiaka počas vyučovacej hodiny. Editor je tiež výbornou pomôckou aj pre učiteľa. Zadania, ktoré v ňom pripraví, je môže exportovať do formátu webovej stránky a po vytlačení ich môžu používať vidiaci spolužiaci.



Obrázok 2: editor Lambda – ukážka prostredia

Matematický editor **Math Type** je doplnkovým programom pre kancelársky balík MS Office [4]. Je vhodný pre slabozrakých žiakov. V porovnaní s editorom rovníc, ktorý je voliteľnou súčasťou programov MS Office, umožňuje nastaviť font a veľkosť písma podľa potrieb žiaka. Má jednoduché ovládanie pomocou klávesových skratiek a matematický zápis je v podobe, aká sa bežne používa v tlači. Nevýhodou je, že program nespolupracuje s čítačom obrazovky.



Obrázok 3: editor Math Type – ukážka prostredia

Počas vyučovania môžu žiaci používať editory ako **zošity**. Učiteľ môže pre nich v editore pripraviť **zadania previerok** a tiež riešenia príkladov, ktoré plánuje vysvetľovať na **tabuli**. Žiak môže počas výkladu učiteľa sledovať v pripravenom dokumente jednotlivé kroky, ktoré učiteľ píše na tabuľu [5].

Učebnica matematiky pre gymnáziá

V rokoch 2013 – 2014 bola vydaná transformovaná verzia učebnice matematiky pre gymnáziá od doc. RNDr. Zbynka Kubáčka, CSc. vo forme prístupnej pre nevidiacich a slabozrakých študentov: tlačený formát v Braillovom písme, dvojaký elektronický formát: súbor editora LAMBDA a XHTML[10] dokument, v ktorom je pre matematický zápis použitý štandard MathML[11]. Tieto učebnice prístupné pre nevidiacich a slabozrakých žiakov sú k dispozícii pre prvý a druhý ročník gymnázií a je možné ich žiadať prostredníctvom centrálneho katalógu učebníc.

LITERATÚRA

[1] Lecký Peter: *Kompenzačné pomôcky a asistenčné technológie pre študentov so zdravotným postihnutím. Informačný materiál*, UK Bratislava 2011, http://cezap.sk/publikacie/kompenzacne-pomocky-a-asistencne-technologie-pre-studentov-sozdravotnym-postihnutim/

[2] Lambda Project, http://lambdaproject.org/ , http://www.veia.it/en/lambda_product

[3] Horňanský Martin: *Sprístupňovanie matematiky nevidiacim na Slovensku prostredníctvom editora Lambda,* diplomová práca, FMFI UK Bratislava 2009

[10] XHTML (Extensible HyperText Markup Language) – hypertextový značkovací jazyk, https://www.w3.org/TR/xhtml1/

[11] MathML (Mathematics Markup Language) – značkovací jazyk špecifikujúci matematický obsah webového dokumentu, https://www.w3.org/Math/

[4] http://www.dessci.com/en/products/mathtype/

[5] Kaliaková, M., Stankovičová, M., Vitálišová, Z.: *Informatické kompetencie žiakov ZŠ so zrakovým postihnutím a ich využitie na vyučovaní matematiky a fyziky používaním matematického editora LAMBDA*, In: DidInfo 2015. - ISBN 978-80-557-0852-2. - Banská Bystrica : Univerzita Mateja Bela, 2015. - S. 144-149

[obrázky] archív CPŠ

Mgr. Mária Stankovičová, PaedDr. Elena Mendelová CSc.
Univerzita Komenského v Bratislave
Centrum podpory študentov so špecifickými potrebami
Šafárikovo nám. 6, 814 99 Bratislava
Sídlo:
Mlynská dolina, FMFI, 842 48 Bratislava
tel.: 02/602 95 515, 02/602 95 166
e-mail: maria.stankovicova@rec.uniba.sk
elena.mendelova@rec.uniba.sk

MATEMATICKÉ SÚŤAŽE MÔŽU BYŤ IN

MATEJ UHER

ABSTRAKT. *Naši žiaci na ZŠ aj SŠ školách radi riešia rôzne matematické úlohy. Riešia ich, nakoľko sú pre ne z určitých dôvodov zaujímavé. Avšak nedajú sa táto ich motivácia využiť aj v bežnom vyučovacom procese? Na príklade starších ročníkoch jednej matematickej súťaže si to skúsime predstaviť a následne aj predebatovať možnosti vylepšenia takéhoto prístupu.*

Matematické súťaže v kocke

Vyučovanie matematiky prebieha rôznymi spôsobmi. Najčastejšie, priamo počas vyučovacích hodín, žiakom zadávame rôzne úlohy a problémy, s ktorými sa musia popasovať. Pri tomto postupe učiteľ často zohráva dôležitú úlohu, pretože je to častokrát práve on, kto volí, aké úlohy sa budú riešiť. Tiež ovplyvňuje aj spôsoby, akými ich žiaci riešia. Avšak toto nie je jediný možný spôsob.

Druhým je riešenie matematických súťaži. A samozrejme nie je posledným, avšak zaobíďme sa nateraz len s týmito dvoma. Matematické súťaže sú na Slovensku veľmi rozšírené, pričom žiakom ponúkajú rôzne prístupy k samotnému riešeniu súťaží. Súťaže môžeme charakterizovať z viacerých pohľadov.

Napríklad poznáme súťaže korešpondenčné, prezenčné, kombinované. Prezenčné súťaže sa riešia vo vopred stanovenom dátume na vopred stanovenom mieste. Konkrétne miesto nemusí byť rovnaké pre všetkých účastníkov, avšak musia sa dostaviť na niektoré z vybraných miest. Korešpondenčné súťaže, na rozdiel od prezenčných, nemajú jasne špecifikované miesto, kde ich žiaci musia riešiť. Môžu ich riešiť aj doma, pričom žiacke riešenia by mali následne do stanoveného dátumu zaslať na vopred stanovené miesto. Kombinované súťaže pozostávajú z viacerých častí, pričom aspoň jedna je prezenčná a jedna korešpondenčná.

Dôležitým kritériom delenia je tiež to, pre aký typ školy, respektíve pre aké ročníky sú súťaže určené. Najčastejšie sú delené na súťaže pre ZŠ, SŠ a pre obe. V mnohých prípadoch platí pravidlo, že každý ročník má samostatnú kategóriu, v ktorej žiaci súťažia medzi svojimi rovesníkmi.

Súťaže na Slovensku

Na Slovensku funguje približne 30 súťaží. Niektoré sú určené pre celé Slovensko, iné sú zase zamerané na kraj/mesto, v ktorom súťaž prebieha. Na našom území prevažujú korešpondenčné súťaže, prezenčných a kombinovaných je podstatne menej. Ak sa zameriame na typ školy, súťaží, určených pre žiakov ZŠ je nepomerne viac, ako pre žiakov SŠ. Sumárny prehľad vybraných súťaží, rozdelených na základe týchto dvoch kritérií nájdete v tabuľke. Ak je súťaž určená pre oba typy škôl, je uvedená v oboch riadkoch tabuľky.

	Korešpondenčné	Prezenčné	Kombinované
ZŠ	MAKS, Pikomat, Riešky, STROM, Malynár/Matik, Sezam/Sezamko	Matematický klokan, Pytagoriáda, Matboj	Matematická olympiáda
SŠ	KMS	Matematický klokan, Náboj	Matematická olympiáda

Tabuľka 1: Príklady slovenských súťaží

Ničím prekvapujúci je fakt, že práve korešpondenčné súťaže pre ZŠ sú najčastejší typ súťaže. Žiaci ZŠ sú voči súťažiam otvorenejší a častokrát im môžu venovať viac času, ako ich starší spolužiaci zo stredných škôl. Korešpondenčné súťaže rozvíjajú rôzne aspekty matematického myslenia, cez kritické myslenie, formulovanie vlastných myšlienok až po následné preukázanie ich platnosti. Preto sa v ďalšej časti textu zameriame práve na túto formu súťaže.

Motivácia žiakov riešiť matematické súťaže

Už sme spomínali, že súťaže môžu zastávať úlohu sprístupňovania matematiky žiakom. A teda by sme sa mali zaujímať, prečo sú tieto súťaže pre žiakov atraktívne. Pozrime sa teda bližšie, čo žiakov môže motivovať k zapojeniu sa do takejto súťaže. Motivácia sa delí na vnútornú a vonkajšiu, pričom oba tieto aspekty vplývajú na žiakov a vieme ich nájsť v dôvodoch, prečo sú súťaže pre nich zaujímavé.

Medzi aspekty, podporujúce vnútornú motiváciu žiakov, sa dá zaradiť napríklad radosť z bádania a objavovania, ktoré žiaci počas riešenia jednotlivých úloh pociťujú. Taktiež je to uvedomovanie si nových súvislostí, pričom často prebieha na úrovni, že si žiak uvedomí vzťah medzi už získanými vedomosťami z vyučovania. Naviac, najmä v prípade súťaží pre základné školy, hovoríme o motivačne zadaných úlohách, pričom obvykle bývajú zasadené do príbehového kontextu, v rámci ktorého žiaci pomáhajú vyriešiť hlavným hrdinom ich problémami. A v neposlednom rade je to radosť z rozlúsknutia problému, kedy žiak úspešne dokončí riešenie konkrétnej úlohy.

Na druhej strane, žiaci sú často motivovaní aj vonkajšími vplyvmi. Medzi ne sa dá zaradiť vecná cena, ktorá je určená pre najúspešnejších účastníkov súťaže. Ďalej je to priestor porovnávania sa s ostatnými žiakmi cez výsledkové listiny, príležitosť zúčastniť sa rôznych typov sústredení či workshopov, v prípade viackolovej súťaže dokonca možnosť zmerať si sily na súťaži mimo domova. V niektorých prípadoch, je to aj možnosť dostať spätnú väzbu na použité postupy a riešenia. Aj to je to, čo žiakov pobáda k neustálemu zlepšovaniu svojich matematických schopností.

Otázka, ktorú si ešte môžeme položiť je, ktorá z týchto motivácii u žiakov prevláda. Na túto otázku nemáme exaktnú odpoveď. Záleží od mnohých faktorov, pričom pre každého žiaka môže byť odpoveď individuálna. S určitosťou sa dá povedať, že sú žiaci, ktorí sa zúčastňujú matematických súťaží hlavne z vnútornej motivácie. Navyše je potrebné si uvedomiť, že tú najviac rozvíjajú práve úlohy, ktoré žiaci riešia. Preto je veľmi dôležité, akú formu a obsah tieto úlohy majú.

Bohatstvo matematických súťaží

Pozrime sa teraz bližšie na matematické úlohy, ktoré sa v týchto súťažiach vyskytujú. Vyššie sme spomínali, že práve ony majú dôležitú úlohu pri vnútornej motivácii a taktiež som podotkol, že sú často ladené inak, ako tie bežne predkladané v rámci vyučovania. Zásadné rozdiely medzi týmito úlohami sú, že tie, ktoré sú vytvorené pre potreby súťaží, sú často sprevádzané aj motivačným textom. Na strane druhej sú často komplexnejšie, ako úlohy v rámci vyučovania.

Bohatstvo, ktoré tieto matematické úlohy v sebe nesú, si často neuvedomujeme. Niektoré matematické súťaže fungujú už niekoľko rokov a počas nich sa v súťaží objavilo viac ako stovky motivačných, zaujímavo formulovaných úloh, ktoré žiakov motivujú k rozvíjaniu svojich matematických zručností. Avšak, málokedy sa s týmito úlohami ďalej pracuje, po aktuálnom ročníku súťaže sa k nim pedagógovia nevrátia a teda tieto úlohy upadnú do zabudnutia.

Nevyužitý potenciál úloh z matematických súťaží nás viedol k tomu, aby sme hľadali priestor pre ich znovu využitie v rámci vyučovacieho procesu. Preto postupne vzniká databáza s kvalitnými úlohami z týchto súťaží, ktorá bude slúžiť učiteľom pri vlastnom vyučovaní. Jej cieľom je uľahčiť učiteľom prístup k týmto úlohám. Každý rok sa vytvárajú odlišné úlohy na rôzne témy, preto je ich vyhľadávanie náročné. Prvotná verzia databázy obsahuje triedenie pre úlohy zo súťaže Riešky, pričom zatiaľ sa v nej dajú nájsť úlohy podľa témy a typu úloh. Časom však pribudnú aj ďalšie možnosti vyhľadávania.

Záver

Na Slovensku sa organizuje vyše 30 matematických súťaží, ktoré u žiakov rozvíjajú matematické myslenie. V najväčšom počte sú zastúpené súťaže korešpondenčné, určené pre žiakov základných škôl. Úlohy z týchto súťaží majú silný motivačný potenciál, ktorý žiakov pobáda k ich riešeniu. Bohužiaľ, ani zďaleka nie je využitý tak, ako by sa očakávalo, keďže sa s kvalitnými úlohami často po súťaži ďalej nepracuje. Preto som sa rozhodol, v rámci svojej dizertačnej práce, vytvoriť databázu s úlohami, pričom tá môže slúžiť ako pomôcka učiteľom pri prípravách na atraktívnejšie a efektívnejšie vyučovanie.

LITERATÚRA

[1] DVORSKÁ Ľ., SVITANOVÁ Ľ. (2004): *Matematické súťaže*, dostupné na internete [10/2018] http://www.step.sk/marian/sutaze/

Mgr. Matej Uher
Fakulty matematiky, fyziky a informatiky univerzity Komenského
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
uher.matej@gmail.com

MOTIVAČNÉ METÓDY VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY NA ZŠ A SŠ

VIERA UHERČÍKOVÁ, PETER VANKÚŠ

ABSTRAKT. *V rámci nášho workshopu Vám chceme predstaviť vybrané motivačné metódy vyučovania matematiky. Uvedené metódy sú čerpané z obsahu kontinuálneho vzdelávania učiteľov matematiky s názvom „Netradičné metódy vyučovania matematiky so zameraním na motiváciu, tvorivosť a rozšírenie kľúčových kompetencií učiteľov matematiky na ZŠ a SŠ". Toto aktualizačné vzdelávanie realizujeme na pôde FMFI UK pre všetkých záujemcov o aktivizujúce a motivačné formy matematickej edukácie.*

Úvod

Matematické vzdelanie je neoddeliteľnou súčasťou vzdelávania, potrebného pre plnohodnotný život a uplatnenie v spoločnosti. Napriek uvedenému sa stretávame s nedostatočným záujmom o matematiku, malý počet študentov sa hlási na technické smery štúdia, ako aj na štúdium učiteľstva, menovite matematiky. Tieto počty uvedených študentov hlásiacich sa na vysoké školy nie sú v súlade s požiadavkami spoločnosti.

S mimoriadnym spoločenským významom matematiky, ako aj s príspevkom k riešeniu spomínaných problémov súvisí dôležitosť kvalitného vyučovania matematiky, ako aj nevyhnutnosť kontinuálneho vzdelávania učiteľov matematiky z praxe. Považujeme za adekvátne upriamiť pozornosť učiteľov na atraktívne, netradičné metódy vyučovania matematiky žiakov a študentov. Za týmto účelom realizujeme na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky aktualizačné kontinuálne vzdelávanie učiteľov matematiky s názvom *Netradičné metódy vyučovania matematiky so zameraním na motiváciu, tvorivosť a rozšírenie kľúčových kompetencií učiteľov matematiky na ZŠ a SŠ*. Uvedené vzdelávanie sme predstavili aj na našom workshope, pričom z bohatého obsahu vzdelávania sme sa zamerali na projektové vyučovanie a používanie didaktických hier vo vyučovaní matematiky.

Informácie o vzdelávaní

Realizácia vzdelávacích programov v rámci kontinuálneho vzdelávania prináša učiteľom nemalé časové, ako aj finančné problémy. Preto sme sa zamerali v rámci riešenia projektu KEGA 057UK-4/2011 *Rozšírenie kľúčových kompetencií učiteľov matematiky ZŠ a SŠ v rámci kontinuálneho vzdelávania* na vytvorenie vzdelávacích programov, ktorých prínosom je okrem kvalitného obsahového zamerania aj e-learningová forma realizácie. Takáto forma vzdelávania pomôže učiteľom prekonať uvedené problémy a stala sa základom pre nami realizované kontinuálne vzdelávanie.

Za účelom sprístupnenia vzdelávania bez nutnosti častého cestovania bola zvolená kombinovaná forma vzdelávania. Počas vzdelávania sú uskutočnené 2 osobné stretnutia na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave a 10 lekcií vzdelávania je realizovaných formou elektronického vzdelávania.

Na úvodnom osobnom stretnutí sú účastníci oboznámení s organizačnou formou vzdelávania, najmä s používaním elektronickej platformy vzdelávania (Moodle). V rámci elektronických lekcií vzdelávania účastníci dostávajú úlohy, ktoré priebežne počas kurzu riešia. Na záver vzdelávania potom pripraví každý účastník záverečnú prácu na témy súvisiace s náplňou vzdelávania. Vzdelávanie je ukončené druhým osobným stretnutím, na ktorom každý účastník prezentuje svoju záverečnú prácu a absolvuje pohovor na uvedenú tému vyplývajúcu z obsahu absolvovaného vzdelávania.

Nami vytvorené vzdelávanie sa radí medzi aktualizačné kurzy kontinuálneho vzdelávania. To znamená, že jeho cieľom je zabezpečiť sprostredkovanie aktuálnych informácií, prehlbovanie, rozvíjanie a rozširovanie odborných a pedagogických vedomostí a zručností. Dĺžka vzdelávania je 60 hodín.

Vzdelávanie je akreditované Ministerstvom školstva, vedy, výskumu a športu SR do konca roku 2018 (akreditácia č. 1150/2013 – KV). Následne plánujeme v prípade udelenia akreditácie pokračovať v poskytovaní vzdelávania s podobným obsahom s mierne zmeneným názvom.

Počas priebehu vzdelávania sme uskutočnili 4 kurzy vzdelávania, piaty momentálne prebieha do konca roku 2018.

Na vytvorenie predstavy o obsahu vzdelávania uvádzame názvy jednotlivých lekcií elektronickej časti vzdelávania.

Lekcia 1: Význam a dôležitosť matematiky pre spoločnosť.

Lekcia 2: Netradičné metódy, formy a prostriedky vyučovania matematiky.

Lekcia 3: Motivácia a tvorivosť vo vyučovaní matematiky

Lekcia 4: Úloha priestorovej predstavivosti v matematike. Geometrická predstavivosť a riešenie úloh.

Lekcia 5: Didaktické hry v matematike.

Lekcia 6: Alternatívne školstvo.

Lekcia 7: Projektové vyučovanie.

Lekcia 8: Slávni matematici – ich matematika.

Lekcia 9: Význam histórie matematiky v matematickom vzdelávaní.

Lekcia 10: Humanizácia vyučovania matematiky; Rekordy a kuriozity v matematike.

Z konkrétneho obsahu jednotlivých lekcií sme sa v rámci príspevku zamerali na projektové vyučovanie a používanie didaktických hier vo vyučovaní matematiky. Jadrom workshopu bola prezentácia nápadov z konkrétnych projektov a hier, vytvorených študentmi učiteľstva Fakulty matematiky, fyziky a informatiky UK a účastníkmi nášho vzdelávania.

Projektové vyučovanie

Projektové vyučovanie má množstvo predností, pretože:

- nastoľuje témy a problémy tak, ako ich prináša život,
- pripravuje žiakov a študentov na riešenie problémov reálneho života,
- rozvíja divergentné myslenie,
- rozvíja tvorivé myslenie a tvorivosť v praxi,
- umožňuje objav rôznych vlastných schopností vrátane tvorivosti,
- rozvíja organizačné schopnosti,
- umožňuje všestranný rozvoj osobnosti jedinca,
- umožňuje dôsledne si uvedomiť medzipredmetové vzťahy.

Teoretickými východiskami v oblasti tematiky projektového vyučovanie sa zaoberáme aj v rámci denného štúdia učiteľstva matematiky na našej fakulte. Výstupom sú mnohé nápadité návrhy ich vlastných projektov. V záujme čo najlepšieho priblíženia projektového vyučovania učiteľom počas nášho kontinuálneho vzdelávania prezentujeme niektoré z najúspešnejších projektov, pripravených uvedenými študentmi.

Odporúčame im pritom do pozornosti štruktúru jednotlivých projektov a to najmä jej nasledovné časti:

- typ projektu,
- veková skupina,
- vyučovacie predmety,
- téma, úloha,
- výchovno-vzdelávacie ciele.

Vybrané projekty študentov sme prezentovali aj na workshope v rámci konferencie. V krátkosti si jeden z nich opíšeme. Jedná sa o projekt našich absolventiek Barbory Matuškovej a Natálie Dudovej s názvom *Letný tábor*.

<u>Typ projektu</u>: krátkodobý (5 vyučovacích hodín).

<u>Veková skupina</u>: 6.-9. ročník ZŠ.

<u>Vyučovací predmet</u>: matematika, biológia, geografia, dejepis, výtvarná výchova a informatika.

Téma, úloha: zhotoviť prehľadný plagát, prezentáciu; vypracovať časový a finančný harmonogram tábora.

Výchovno-vzdelávacie ciele:

- Vypracovať finančný rozpočet tábora (základy finančnej matematiky), odhadnúť a stanoviť cenu tábora.
- Oboznámenie sa s faunou a flórou vybraného územia.
- Oboznámenie sa s geografiou a historickými aspektmi vybraného územia.
- Vytvoriť prehľadný a lákavý plagát na letný tábor.
- Práca v skupinách.

Motivácia, úvod

História organizovania letných táborov je spätá najmä s činnosťou skautingu a rôznych spoločenských, telovýchovných a športových organizácií dospelých i detí. Plnia významné rekreačné, zdravotnícko-kompenzačné a výchovné funkcie.

Tento projekt vám poskytne jedinečnú možnosť na naplánovanie letného tábora tvojich snov. Priprav sebe a svojim kamarátom zábavno-náučný tábor, v ktorom budú mať príležitosť spoznať krásy vami vybraného územia Slovenska, pozorovať život rastlín a zvierat, prebádať dávnu históriu našich predkov, ako žili, učili sa, pracovali a pod. Spracuj tvoj návrh do zaujímavého plagátu, priprav si prezentáciu a príď ju odprezentovať aj so svojim tímom do telocvične školy.

Pre najlepších bude pripravená aj odmena. Najlepší projekt letného tábora škola zrealizuje. Okrem toho výherný tím získa aj vecné ceny. Tešíme sa vaše projekty.

Realizácia

Žiaci sa na začiatku rozdelia do skupín v počte po 4. K dispozícií budú mať počítač alebo tablet s pripojením na internet, odbornú literatúru a výtvarné pomôcky. Vedúci projektu môže zabezpečiť konzultácie s vyučujúcimi predmetov biológia, geografia a dejepis. K dispozícií budú žiakom aj počítačová učebne s informatikom v prípade pomoci pri tvorbe plagátu alebo prezentácie. Žiaci môžu na svojom projekte pracovať aj mimo vyučovania, poprípade na iných vyučovacích hodinách.

Úlohou každej skupiny je si na začiatku vybrať miesto (územie) na Slovensku, ktoré bude geograficky zaujímavé. Bude poskytovať priestor na šport a zábavu, turistiku a možnosť spoznávania biologických krás. Vo vybranom území by sa mala nachádzať aj historicky významná budova alebo pamiatka (ako napríklad hrad, kaštieľ, zrúcanina, múzeum,...), ku ktorej sa bude viazať program na jeden deň letného tábora. Program na ostatné dni si môžete vymyslieť vlastný, ale musí zahŕňať športové aktivity a turistiku spojenú s poznávaním rastlín a živočíchov. Okrem časového programu, je potrebné vypracovať finančný plán tábora. Tento by mal zahŕňať stravu, dopravu, poistenie, pomôcky a materiál na realizáciu aktivít, vstupné na kultúrne pamiatky, odmeny pre víťazné tímy letného tábora a zabezpečenie dospelého dozoru.

Pri riešení úloh a plnení cieľa tohto projektu si žiaci vedú podrobné záznamy. Ohodnotený síce bude len výsledný plagát, ale každý tím by mal vedieť odpovedať na prípadne otázky hodnotiacich.

Záver

Od projektu očakávame že žiaci spoznajú Slovensko, vybrané geografické územie s jeho históriou a biológiou. Naučia sa základy finančnej matematiky, hospodáriť s peniazmi. Vypracovať časový harmonogram, pracovať v skupinách, zodpovednosti za svoju úlohu v skupine a pod.

Didaktické hry

Pod didaktickou hrou rozumieme činnosť žiakov a učiteľa, ktorá sleduje isté didaktické ciele. Žiaci si spravidla tieto ciele neuvedomujú. Motiváciou ich činnosti je radosť z jej vykonávania, súťaživosť, možnosť práce pre prospech tímu, sebarealizácia. Didaktická hra má pravidlá, ktoré organizujú činnosť žiakov. Táto činnosť, jej obsah a pravidlá didaktickej hry vedú k realizácii edukačných cieľov hry. Charakteristické pre didaktickú hru je vysoká angažovanosť a motivácia žiakov, potešenie z priebehu hernej aktivity.

Didaktické hry sú pre účastníkov nášho vzdelávania obľúbenou témou. Dôkazom toho je aj skutočnosť, že sú častým námetom záverečných prác. Na workshope sme za účelom inšpirácie predstavili niektoré hry z týchto prác, z ktorých teraz jednu v stručnosti priblížime. Jedná sa o hru s názvom *Zmraz to!,* námet pochádza od pani učiteľky Jany Tkačíkovej.

Tematické zaradenie hry: Uvedená hra je vhodná na precvičenie násobenia celých čísel.

Edukačné ciele hry: Precvičenie násobenia celých čísel. Hra rozvíja kombinačné a strategické myslenie žiakov.

Prostredie hry:

Žiaci a učiteľ: Hrajú dvojice v laviciach. Učiteľ plní organizačnú a kontrolnú úlohu.

Čas trvania hry: 5–15 min.

Materiálne prostredie: Hrací plán (pozri *obrázok 1*).

Postup hry:

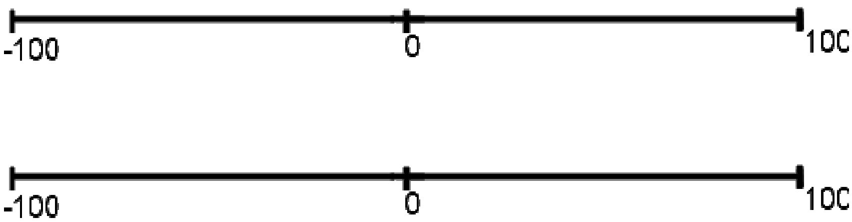
Na úvod dvojiciam rozdáme hrací plán (*obrázok 1*). Hráč ktorý je na rade si vyberie ľubovoľnú dvojicu čísel z malého štvorca a ich súčin zaškrtne vo veľkom štvorci. Jeden hráč pritom používa symbol X a druhý hráč O.

Hráči nezaznamenávajú výsledky, ale hrajú piškôrky. Ak hráč nesprávne vynásobí čísla, alebo sa jeho súčin v tabuľke nenachádza, nemá právo na ťah a nasleduje jeho protihráč. Vyhráva ten, kto má ako prvý štyri X alebo O vedľa seba v riadku, stĺpci alebo diagonálne.

ZMRAZ TO!

−1	2	−3
4	−5	6
−7	8	−2

−2	6	−8	−30	12	10
−42	3	−20	2	35	−14
16	48	−4	24	8	−40
−3	−12	−56	5	−28	−10
21	−7	15	14	−6	32
−9	−24	−5	−18	−16	7



Obrázok 1: hrací plán k hre „Zmraz to!"

Záverečné vyhodnotenie:

Hráči hrajú viac hier. Najmenší počet sú dve, aby sme zaistili, že každý hráč začínal rovnaký počet hier. Dvojica v lavici si zapisuje vzájomné skóre, tento zápis odovzdajú vyučujúcemu. Za každú hru víťaz aj porazený získajú istý počet bodov za aktivitu (napr. tri body pre víťaza, jeden bod pre porazeného).

Prednosti danej hry:

Precvičenie násobenia celých čísel hravou formou. Aktívna práca celej triedy, vnútorná motivácia žiakov súťaživosťou.

Záver

V rámci nášho workshopu sme prezentovali aktivity, s ktorými sa majú možnosť stretnúť účastníci kontinuálneho vzdelávania *Netradičné metódy vyučovania matematiky so zameraním na motiváciu, tvorivosť a rozšírenie kľúčových kompetencií učiteľov matematiky na ZŠ a SŠ*, ktoré na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity

Komenského v Bratislave realizujeme pre učiteľov matematiky druhého stupňa základných škôl a stredných škôl.

Konkrétne sme prezentovali ukážky projektov a didaktických hier, ktoré majú motivačný potenciál. Veríme, že náš workshop slúžil pre účastníkov ako motivácia tvoriť vlastné motivačné aktivity a zaraďovať ich do matematickej edukácie.

LITERATÚRA

[1] Brincková, J., Uherčíková, V., Vankúš, P.: *Netradičné metódy rozvíjania predstavivosti v matematike,* Bratislava, KEC FMFI UK Bratislava, 2013, ISBN 978-80-8147-019-6

doc. RNDr. Viera Uherčíková, CSc., PaedDr. Peter Vankúš, PhD.
FMFI UK Bratislava
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: v.uhercikova@gmail.com, peter.vankus@gmail.com

MOTIVAČNÉ AKTIVITY VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY V 1. ROČNÍKU GYMNÁZIA

PETER VANKÚŠ

ABSTRAKT. *V rámci príspevku sa venujeme motivačným aktivitám, ktoré sme používali vo vyučovaní matematiky v 1. ročníku gymnázia. Uvedené aktivity je možné po prispôsobení používať aj v iných ročníkoch. Prezentujeme konkrétne ukážky aktivít s cieľom ich eventuálneho využitia resp. ako zdroj námetov pre tvorbu vlastných aktivít.*

Úvod

Motivácia je dôležitou súčasťou poznávacieho procesu žiakov. Aj v rámci vyučovania matematiky musíme dbať na náležitú motiváciu, ktorá vedie žiakov k snahe realizovať naplánované učebné aktivity a tak dospieť k dosiahnutiu stanovených edukačných cieľov. V našom referáte na konferencii sme prezentovali niektoré motivačné aktivity, ktoré sme realizovali v rámci nášho experimentálneho vyučovania matematiky v rámci prvého ročníka gymnázia. Uvedené aktivity majú zväčša charakter didaktických hier resp. súťaží. V našom článku si priblížime ukážky aktivít, vybrané z tých, ktoré odzneli v rámci konferencie.

Motivačné aktivity

Pre krátkosť článku uvedieme vybrané tri aktivity. Prvá z nich s názvom *Bingopretek* je didaktickou hrou, inšpirovanou hrami Algopretek a Bingo (Dufková, 2015; Totkovičová, 2003; Vankúš, 2012). *Šifrovaná* je didaktickou hrou, vhodnou na precvičovanie učiva z rozmanitých celkov matematiky. Poslednou ukážkou je hra *Súťaž so stoličkami*, ktorá je spojením hravej formy počítania matematických úloh a súťaže v rýchlosti tohto počítania. (Vankúš, 2012)

Bingopretek

Tematické zaradenie hry: Uvedená hra je vhodná pre široké spektrum učiva, kde výsledkom úloh je číselný údaj resp. je možné zostaviť úlohy s voľbou správnej odpovede.

Edukačné ciele hry: Precvičovanie riešenia úloh, spätná väzba o zvládnutí učiva.

Prostredie hry:

Žiaci a učiteľ: Žiaci pracujú samostatne. Učiteľ plní organizačnú a kontrolnú úlohu.

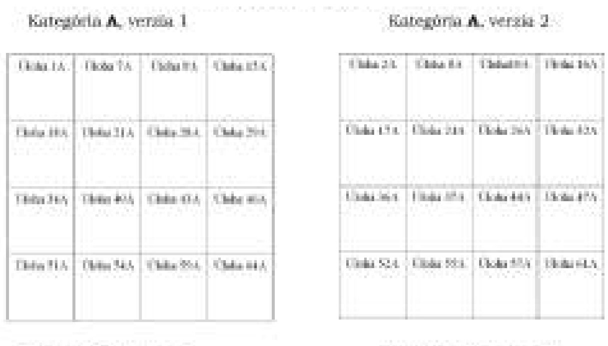
Materiálne prostredie: Tabuľky na zápis výsledkov úloh (*obrázok 1*) a zadania úloh pre každého žiaka.

Čas trvania hry: 40 min.

Postup hry: Žiaci dostanú zadania úloh a tabuľky na zápis výsledkov. Úlohou žiakov je riešiť úlohy z najľahšej A kategórie podľa prvej tabuľky. Po ich vyriešení ich žiak donesie vyučujúcemu na kontrolu. Ten úlohy oboduje a podľa počtu bodov odporučí žiakovi, či má riešiť úlohy z tej istej kategórie – ak má žiak viac ako jednu úlohu vyriešenú nesprávne; resp. žiak ktorý má všetky úlohy správne alebo sa pomýlil len v jednej úlohe môže riešiť úlohy z vyššej B kategórie. Takýmto spôsobom žiak postupuje až po najťažšiu kategóriu.

Záverečné vyhodnotenie: Za každý správny výsledok získa žiak istý počet bodov podľa náročnosti úlohy danej jej kategóriou. Na základe týchto bodov vyučujúci pridelí záverečné bodové hodnotenie žiaka.

Prednosti hry: Vnútorná motivácia žiakov príťažlivosťou zadania hry. Aktívna práca celej triedy. Spätná väzba o úrovni vedomostí žiakov.



Obrázok 1: časť hracieho plánu k hre Bingopretek

Šifrovaná

Tematické zaradenie hry: Hra je vhodná pre precvičovanie riešenia jednoduchších úloh zameraných na rozmanité celky učiva matematiky. V rámci medzipredmetových vzťahov hra umožňuje prepojenie učiva matematiky so širokou škálou predmetov v rámci ktorých je možné zostaviť slovnú otázku na pojmy z iného predmetu.

Edukačné ciele hry: Precvičovanie riešenia úloh. Spätná väzba o zvládnutí učiva pre žiakov a učiteľa. Hra rozvíja schopnosť žiakov spolupracovať. V rámci medzipredmetových vzťahov hra rozvíja schopnosť odpovedať na slovne formulovanú otázku z iného predmetu.

Prostredie hry:

Žiaci a učiteľ: Celá trieda, spolupracujú dvojice v laviciach. Učiteľ plní organizačnú a kontrolnú úlohu.

Materiálne prostredie: Zadania matematických úloh. Ide o jednoduchšie úlohy, ich výsledkom musí byť jednoznačný a pre každú úlohy iný údaj. Nevyplnený kľúč k odkódovaniu správy a zašifrovaný text – napr. slovná otázka z iného predmetu v rámci medzipredmetových vzťahov.

Čas trvania hry: 40 min.

Postup hry: Na začiatku hry rozdáme žiakom sadu úloh a zašifrovaný text spolu s nevyplneným kľúčom na jeho odkódovanie. Pri každej úlohe v rámci sady je uvedené jedno písmeno abecedy. Zašifrovaný text sa skladá z údajov, oddelených čiarkami. Tieto údaje sú výsledkami daných úloh. Text odšifrujeme zámenou údajov za písmená, napísané pri úlohách, pre ktoré sú zodpovedajúce údaje výsledkami. Dvojice žiakov riešia úlohy, čím získavajú kľúč na riešenie šifry. Cieľom je odkódovať celý zašifrovaný odkaz a následne odpovedať na otázku, ktorú daný odkaz predstavuje.

Záverečné vyhodnotenie: Dvojica v lavici zapisuje výsledky jednotlivých úloh do kľúča. Vyučujúci ich skontroluje. Za každý správny výsledok žiaci získajú istý počet bodov za aktivitu. Bonusové body sú udelené tiež za odkódovanie textu a odpoveď na otázku, ktorú daný text predstavuje.

Prednosti hry: Aktívna práca celej triedy, vnútorná motivácia žiakov príťažlivosťou hry a súťaživosťou. Rozvoj schopnosti spolupracovať. Nenásilné budovanie medzipredmetových vzťahov.

Súťaž so stoličkami

Tematické zaradenie hry: Uvedenú hru možno použiť pri riešení na čas nenáročných matematických úloh, ktorých riešením je jednoznačný údaj.

Edukačné ciele hry: Precvičovanie riešenia rozmanitých matematických úloh, spätná väzba o zvládnutí učiva.

Prostredie hry:

Žiaci a učiteľ: Celá trieda je rozdelená na 3 družstvá. Učiteľ plní organizačnú a kontrolnú úlohu.

Materiálne prostredie: Pripravené zadanie úloh pre vyučujúceho. Súbor kariet s výsledkami úloh pre každé družstvo. (*obrázok 2*)

Čas trvania hry: 20–40 min.

Postup hry: Na úvod hry vyučujúci každému družstvu rozdá rovnakú sadu kariet. Každý žiak v družstve získa počet kariet daný počtom žiakov v družstve a počtom úloh, ktoré si vyučujúci pripravil. Údaje na kartách sú výsledkami týchto úloh. Vyučujúci prečíta resp. napíše na tabuľu zadanie prvej úlohy. Všetci žiaci úlohu samostatne riešia. Po vyriešení úlohy žiaci, ktorí majú kartu s výsledkom danej úlohy, idú pred tabuľu. Cieľom každého z nich je dostať sa tam skôr, ako žiaci z ostatných družstiev. Pre jednoduchosť určenia ich poradia a pre spestrenie hry sú pred tabuľou pripravené tri stoličky. Najrýchlejší zo žiakov si sadá na prvú z nich, druhý žiak na susednú a posledný žiak na tretiu stoličku. Po skontrolovaní úloh a určení poradia žiakov vyučujúci zadáva ďalšiu úlohu. Tento postup sa opakuje až do vyriešenia všetkých úloh.

Záverečné vyhodnotenie: Za každého žiaka, ktorý správne prezentoval kartu s výsledkom riešenej úlohy, získajú všetci žiaci družstva určitý počet bodov za aktivitu. Tento počet je daný náročnosťou úloh a poradím žiakov jednotlivých družstiev. Napr. družstvo žiaka, ktorý prezentoval kartu so správnym riešením danej úlohy ako prvý, získa 3 body. Družstvo druhého žiaka v poradí získa 2 body, družstvo tretieho žiaka získa 1 bod. V prípade, že pred tabuľu príde žiak s nesprávnou kartou, získa jeho družstvo 0 bodov.

Prednosti danej hry: Vnútorná motivácia žiakov prostredníctvom súťaživosti medzi družstvami. Aktívna práca celej triedy. Spätná väzba o úrovni vedomostí žiakov.

15	10	6	3	18	14
102	0,25	2,4	25	75	20
$33{,}\overline{3}$	140	100	5	12	16

Obrázok 2: hracie karty pre žiakov k hre Súťaž so stoličkami

Záver

V článku sme prezentovali vybrané ukážky z motivačných aktivít, ktoré sme uviedli počas nášho referátu na konferencii. Uvedené aktivity sme otestovali v praxi v rámci nášho experimentálneho vyučovania matematiky v 1. ročníku gymnáziu. Reakcie žiakov boli veľmi pozitívne. Hodiny s týmito aktivitami sa im páčia a považujú ich za zaujímavé a motivujúce. Veríme, že ukážky aktivít zaujali aj čitateľa a poslúžia aj ako zdroj námetov pre tvorbu vlastných motivačných aktivít.

LITERATÚRA

[1] Brincková, J., Uherčíková, V., Vankúš, P.: *Netradičné metódy rozvíjania predstavivosti v matematike,* Bratislava, KEC FMFI UK Bratislava, 2013, ISBN 978-80-8147-019-6

[2] Dufková, J.: *Tvorba matematických úloh pre didaktickú hru Bingo pre nižšie sekundárne vzdelávanie*, Bakalárska práca, Bratislava, FMFI UK Bratislava, 2015

[3] Totkovičová, M.: *Algopreteky*, Bratislava, Metodicko–pedagogické centrum mesta Bratislavy, 2003, ISBN 978-80-7164-362-3

[4] Vankúš, P.: *Didaktické hry v matematike*, Bratislava, KEC FMFI UK Bratislava, 2012, ISBN 978 -80-8147-002-8

PaedDr. Peter Vankúš, PhD.
FMFI UK Bratislava
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: peter.vankus@gmail.com

Dva dni s didaktikou matematiky 2018. Zborník príspevkov.

Editor:	Mária Slavíčková
Počet strán:	112
Vydala:	Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
	Univerzita Komenského v Bratislave
Miesto vydania:	Bratislava
Rok vydania:	2018

Táto publikácia neprešla jazykovou úpravou. Príspevky neboli recenzované. Za obsahovú náplň príspevkov a ich jazykovú stránku zodpovedajú autori.

ISBN 978 – 80 – 8147 – 087 – 5