DVA DNI S DIDAKTIKOU MATEMATIKY 2020

ZBORNÍK PRÍSPEVKOV

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
BRATISLAVA 10. – 11. 9. 2020

ORGANIZÁTOR

ODDELENIE DIDAKTIKY MATEMATIKY
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

PROGRAMOVÝ A ORGANIZAČNÝ VÝBOR

MÁRIA SLAVÍČKOVÁ
MONIKA DILLINGEROVÁ
EMÍLIA MIŤKOVÁ
PETER VANKÚŠ
MICHAELA VARGOVÁ

EDITOR

MÁRIA SLAVÍČKOVÁ

Táto publikácia neprešla jazykovou úpravou. Príspevky neboli recenzované. Za obsahovú náplň príspevkov a ich jazykovú stránku zodpovedajú autori.

Vyšlo v roku 2020

ISBN 978 – 80 – 8147 – 095 – 0

OBSAH

Milé kolegyne, milí kolegovia.

Piaty ročník konferencie Dva dni s didaktikou matematiky bol prelomový z viacerých dôvodov. Vzhľadom na situáciu ohľadom COVID-19, ktorá nás v roku 2020 začala výrazne sužovať, sme sa rozhodli organizovať konferenciu on-line formou. Pozvaní prenášajúci sa pripojili zo svojich domovských pracovísk tak, ako väčšina z vás. Bola to výzva na oboch stranách, bojovali sme miestami s technikou, no som rada, že sme to zvládli a konferencia vás obohatila o nové podnety, zaujímavé prístupy a naštartovala vám nový školský rok.

Druhý prelomový faktor bol aj rekordný počet prihlásených – pri uzavretí prihlasovania sme evidovali 152 prihlásených. Čo je extrémne potešujúce, mnohí z nich boli na konferencii prvýkrát a viacerí z týchto „nováčikov“ malo príspevok (či už dlhý, alebo krátky). Ďalšou skupinou boli účastníci, ktorých silne motivoval a naštartoval do zmien v činnosti na hodinách matematiky štvrtý ročník našej konferencie a rovno vyskúšali vo svojej praxi to, čo sa na ňom naučili. Veľmi nás teší, že sa na tomto ročníku podelili s nami o ich skúsenosti, radosti, ale aj problémy s implementáciou noviniek. Tretiu skupinu prispievateľov tvoria stálice, ktoré už od prvého ročníka prichádzajú vždy so zaujímavými témami. Zo všetkých príspevkov a prispievateľov sa tešíme, sme presvedčení, že nás všetkých vedia obohatiť.

Ohlas bol veľmi pozitívny, čo nás na jednej strane veľmi teší, na druhej zaväzuje k udržaniu minimálne takej úrovne konferencie, ako bola doteraz. Do ďalšieho ročníka, ktorý snáď bude môcť byť aspoň čiastočne prezenčne, sa opäť pokúsime prizvať zaujímavých hostí. Dúfame, že sa v minimálne takom zložení, ako na tomto ročníku, vidíme a počujeme aspoň v takom zložení, ako tento rok. Pri organizovaní tohto ročníka nám výrazne pomohol aj projekt KEGA 014UK-4/2020, bez ktorého by technické zabezpečenie konferencie bolo len ťažko možné.

So želaním úspešného školského roka, minimum technických problémov pri dištančnej výučbe a veľa dobrých nápadov

Za programový a organizačný výbor
Mária Slavíčková

ALGOPRETEK VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY 7. ROČNÍKA ZŠ (POČTOVÉ OPERÁCIE SO ZLOMKAMI)

BARIČÁK JAROSLAV

ABSTRAKT. *Algopretek je didaktická hra, ktorej cieľom je, aby si žiaci precvičili a upevnili algoritmy. Príkladom môžu byť počtové operácie so zlomkami. V príspevku stručne predstavím, aké sú pravidlá Algopreteku, čo je potrebné na jeho realizáciu, ako som sa snažil efektívne Algopretek zrealizovať v 7. ročníku ZŠ a tiež, ako na aktivitu reagovali žiaci. Súčasťou je aj odkaz na materiály potrebné na realizáciu Algopreteku na precvičenie počtových operácii so zlomkami, ktoré si môže učiteľ vytlačiť, nastrihať a použiť.*

Motivácia a úvod

V inovovanom štátnom vzdelávacom programe v cieľoch predmetu matematika nájdeme, že „Žiaci využívajú pochopené a osvojené postupy a algoritmy pri riešení úloh, vedia matematizovať reálnu situáciu a interpretovať výsledok." [1] Avšak na to, aby si žiaci isté postupy a algoritmy osvojili, je potrebné ich precvičovanie. To vedie častokrát k nekonečným „stĺpčekovým príkladom", v ktorých sa niektorí žiaci síce vyžívajú, no iní sa nudia, navyše hrozí riziko, že si mylne začnú matematiku ako celok zamieňať s počtami. Vhodnou metódou, ako precvičovať algoritmy tak, aby ostal na hodine priestor aj na zmysluplnejšie aktivity, je Algopretek.

Algopretek je didaktická hra, ktorá sa líši od ostatných tým, že sa hrá na etapy. Medzi učiteľmi matematiky nie je ničím novým, prví ho v podobe, ako je známy dnes, organizovali už v r. 1982 Hejný a Repáš [2]. Osobne mám dobrú skúsenosť s využitím Algopreteku v 6. ročníku ZŠ pri upevňovaní tematického celku Desatinné čísla. Rozhodol som sa, že Algopretek zrealizujem so žiakmi opäť v 7. ročníku, konkrétne pri upevňovaní tematického celku Zlomky.

Pravidlá Algopreteku

Podrobné pravidlá Algopreteku sa dajú vyhľadať na internete. Na rôznych stránkach sa vyskytujú jemné modifikácie, základný mechanizmus je ale rovnaký. Je podrobne popísaný v literatúre [2, 3].

Algopretek je hra, ktorej cieľom je precvičiť a upevniť algoritmy po tematických celkoch ako počtové operácie v rôznych číselných oboroch, riešenie rovníc a pod. Hrá sa zvyčajne asi 10 etáp, pričom 1 etapa zaberie 7 minút z úvodu každej vyučovacej hodiny. V jednotlivých etapách riešia žiaci úlohy rôznych obtiažností – kategórií A až E. V každej sade úloh jednej kategórie sa nachádzajú 4 úlohy. Podľa toho, koľko úloh aktuálnej kategórie v danej etape žiak vyrieši správne, môže postúpiť do vyššej kategórie (ak vyrieši všetky 4 úlohy správne), ostať v rovnakej kategórii (ak vyrieši 3 alebo 2 úlohy správne) alebo aj klesnúť do nižšej kategórie (ak vyrieši 1 alebo 0 úloh správne). Keďže za úlohy vyššej kategórie žiak získa viac bodov (tab. 1), a keďže sa hodnotí iba výsledok úlohy, žiaci sú motivovaní podať čo najlepšie výkony.

Cieľom žiakov je teda vyriešiť počas trvania súťaže čo najviac úloh a získať čo najviac bodov.

Bodovanie úloh:		
Kategória	Počet bodov za jednu úlohu	Maximálny počet bodov za celú jednu etapu
A	1	4
B	2	8
C	3	12
D	4	16
E	5	20

Tabuľka 1: Bodovanie úloh

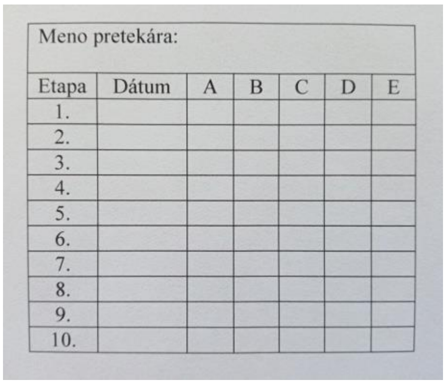
Prípravná fáza a potrebný materiál

Pred realizáciou Algopreteku je potrebné, aby si učiteľ pripravil nasledovné:

1. Sady rovnocenných úloh pre jednotlivé kategórie. Pri príprave úloh som vychádzal z Algopreteku, ktorého autorkou je Totkovičová [3]. Tento však vznikol v „predreformnom“ čase, kedy sa záporné čísla vyučovali skôr ako zlomky. V úlohách teda vychádzali aj záporné výsledky aj medzivýsledky. Najprv som teda všetky zadania musel prepočítať a prerobiť tak, aby všetky výsledky vychádzali nezáporné, pričom som musel zachovať rovnocennosť úloh v príslušných kategóriách. Pre lepšiu orientáciu učiteľa je výhodné vytlačiť zadania rôznych kategórií na papiere rôznych farieb, pre štandardnú triedu do 24 žiakov stačí zadania vytlačiť 2x a nastrihať.

2. Riešenia úloh. Žiakom sa pri oprave hodnotí iba výsledok. Aby sa úlohy ľahko opravovali, výsledky je dobré mať spísané v prehľadnej tabuľke, ktorú je treba vytlačiť.

3. Karty pretekárov. Karta pretekára slúži pre učiteľa. Zapisuje sa do nej, ktoré konkrétne sady v rámci jednotlivých kategórii žiak už riešil. Tým sa vyhneme tomu, aby žiak počas súťaže dostal opakovane to isté zadanie (obr. 1). Karty pretekárov pre každého žiaka je potrebné vytlačiť a nastrihať.



Meno pretekára:

Etapa	Dátum	A	B	C	D	E
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						
7.						
8.						
9.						
10.						

Obrázok 1: Karta pretekára

4. Zošity na Algopretek. Je výhodné používať zošity, ktoré majú žiaci založené na päťminútovky, prípadne iné písomky.

5. Spôsob priebežného vyhodnocovania (grafy). Najrýchlejší spôsob, ako priebežne zapisovať progres žiakov, je zaznačovať body vo forme stĺpcového grafu do vytlačenej tabuľky. Stačí v danej etape vyfarbiť príslušný počet políčok podľa toho, koľko úloh žiak vyriešil, prípadne koľko bodov za úlohy získal (obr. 2).

Obrázok 2: Grafické vyhodnocovanie priebežného progresu žiakov (v tomto grafe boli priebežne zaznačované počty správne vyriešených úloh)

6. Spôsob odmeňovania. Na vyučovacej hodine treba pred začiatkom novej etapy vyhodnotiť predošlú etapu a progres žiakov. Žiakovi, ktorý v preteku viedol, som udeľoval odznak, ktorý mohol počas hodiny nosiť. Vyrobil som ich jednoducho z plastových menoviek (obr. 3). Žiak s najvyšším počtom vyriešených úloh získal „Zelený odznak množstva" a žiak s najvyšším počtom bodov za úlohy získal „Žltý odznak kvality" (hlavná súťaž). Aby mohli zažiť pocit úspechu aj žiaci, u ktorých bolo viac-menej zrejmé, že sa nedostanú na čelo preteku, vyhlasoval som aj „Etapových skokanov", a síce žiakov, ktorí sa oproti predchádzajúcej etape najviac polepšili. Títo žiaci dostali cukrík. Na konci celej súťaže som najlepším žiakom udelil výborné známky. Každý učiteľ si iste dokáže vytvoriť aj ďalšie, vlastné spôsoby odmeňovania.

Obrázok 3: Odznaky ako forma odmeny

Všetky vyššie uvedené materiály čitateľ nájde v zdieľanom priečinku na adrese https://drive.google.com/drive/folders/1TJnZMhgQL7oRo70sMjS_FVpdGRs9FsIc?usp=sharing. Sú k dispozícii pre internú potrebu učiteľov matematiky, nie na ďalšie šírenie.

Efektívna realizácia

V prvom rade treba zdôrazniť, že Algopretek je možné zaradiť do vyučovania až vtedy, keď žiakom boli počtové operácie so zlomkami vopred vhodne sprístupnené. Následne namiesto celých vyučovacích hodín strávených ich precvičovaním, sa v rámci súťaže precvičia vždy v úvode hodiny, pri čom zvyšok hodiny je možné stráviť riešením aplikačných úloh. Vhodné je tiež použiť Algopretek po sprístupnení celého tematického celku Zlomky na ešte lepšie osvojenie Algoritmov, pri čom zvyšok hodiny sa je možné venovať inej téme (napr. geometrii).

Jedným z dôvodov, ktorý môže učiteľa odradiť od zaradenia Algopreteku do vyučovania, môže byť obava zo zdĺhavého opravovania a vyhodnocovania etáp. Pri racionalizácii činností však vyhodnotenie jednej etapy netrvá viac ako 30 minút, čo iste neprevýši čas opravy päťminútoviek a následného zapisovanie známok. Pokúsim sa opísať efektívnu realizáciu tak, ako sa mi osvedčila.

Algopretek som realizoval s triedou siedmakov, kde bolo spolu 21 žiakov. Po prípravnej fáze, kedy som vytlačil a nastrihal zadania úloh, karty pretekárov, vytlačil výsledky úloh, grafy a vyrobil odznaky, som vysvetlil žiakom pravidlá Algopreteku. Keďže ho poznali z predošlého ročníka, pravidlá im stačilo pripomenúť. Podstatná bola informácia, že sa hodnotí iba výsledok, ktorý musí byť zakrúžkovaný a zapísaný ako zlomok v základnom tvare.

0. Prvá etapa sa mierne líši od ostatných. Do každého zošita vložte pred hodinou „kartu pretekára“. Na hodine sa rozdajú zošity. Žiaci si podpíšu kartu (je to prvá a posledná vec, ktorú do nej kedy zapíšu). Kartu musia mať počas každej etapy vždy vyloženú pred sebou! Rozdajte žiakom zadania kategórie A tak, aby spolusediaci mali rôzne sady (napr. A1 sedí s A2 a pod.).

1. Žiaci napíšu do zošita dátum. Dajte žiakom pokyn, aby otočili zadania. **Napíšu do zošita kategóriu** (napr. A7) **a riešia**. Stopujte 7 minút. 2 minúty pred koncom upozornite žiakov.

2. V prípade, ak žiak vyrieši všetky úlohy pred skončením časového limitu, zdvihne ruku a povie „mám“. V tom prípade **dostane zadanie vyššej kategórie**, ktoré ešte neriešil (preto je dôležité mať vyloženú kartu, na ktorej sú napísané všetky sady, ktoré žiak už riešil).

3. Po skončení limitu dajte žiakom pokyn, aby položili perá. Vložia kartu aj všetky zadania do zošita tam, kde počítali. **Zošity sa zozbierajú.**

4. Nasleduje oprava. Položte pred seba správne riešenia a grafy. Otvorte zošit a vyberte z neho kartu a zadania. Zapíšte do karty dátum a čísla sád v rámci kategórií, ktoré žiak riešil. Opravte žiakovi úlohy, zistite počet správne vyriešených úloh a počet bodov (tab. 1) a zakreslite ich do grafov. Do karty zakreslite bodku do kategórie, ktorú bude žiak najbližšie riešiť (obr. 4) a vložte zozadu do zošita zadanie príslušnej kategórie, ktoré žiak ešte neriešil.

Etapa	Dátum	A	B	C	D	E
1.	12. 12.	3				
2.	14. 12.	•6	11			
3.	15. 12.		•5			
4.				•		

Obrázok 4: Príklad zapisovania do karty pretekára. V 1. etape vyriešil žiak 3 úlohy z A3, pokračuje teda v A (urobená bodka, vložené zadanie zozadu do zošita, napr. A6). V 2. etape vyriešil všetky úlohy A6, navyše začal B11, pokračuje v B (urobená bodka, vložené zadanie napr. B5). V 3. etape vyriešil všetky úlohy B5, nič iné nestihol, pokračuje v C (urobená bodka, vložené zadanie napr. C6).

Poznámka: ak žiak v rámci jednej etapy riešil viaceré kategórie, ďalšie opravujeme iba v prípade, ak má tú pôvodnú celú dobre (všetky 4 úlohy). V opačnom prípade ostatné úlohy neopravujeme.

5. Nasleduje vyhodnotenie etapy. Vyveste v triede grafy, vyhodnoťte, kto získal „Odznak kvality“ – najviac bodov, kto „Odznak množstva“ – kto vyriešil zatiaľ najviac úloh správne, prípadne kto sú „Skokani“ – kto sa najviac polepšil oproti predošlej etape. Rozdajte žiakom odmeny. Rozdajte zošity a začína sa ďalšia etapa – postup sa opakuje od bodu č. 1.

Záver - čo na to žiaci

Žiakom som zadal po súťaži anketu – sebahodnotenie. Obsahovala 2 podotázky:

Na stupnici od 1 do 10 (1 = najhoršie, 10 = najlepšie) zhodnoť ako si počtové operácie so zlomkami a) ovládal pred súťažou Algopretek b) ovládaš teraz.

Výsledky ankety (zúčastnilo sa jej 20 z celkovo 21 žiakov) uvádzam na obr. 5.

Predtým	5	4	6	9	9	8	1	5	7	9	5	7	7	7	8	6	7	5	6	5
Potom	1	1	5	9	9	8	1	10	10	10	9	9	9	9	9	8	8	7	7	6

Obrázok 5: Výsledky žiackej ankety

65 % žiakov cítilo, že sa po Algopreteku v počítaní so zlomkami zlepšilo, 20 % necítilo zmenu a 15 % postrehlo zhoršenie. Na základe ankety, ako aj na základe žiackych reakcií a očividnej motivácie počas súťaže môžem konštatovať, že zaradenie Algopreteku do vyučovania pri upevňovaní daného učiva bolo dobrou voľbou a môžem ho odporučiť.

Literatúra

[1] *Inovovaný štátny vzdelávací program. Matematika – nižšie stredné vzdelanie.* Bratislava, Štátny pedagogický ústav, 2014. [online]. [cit. 2020-10-11]. Dostupné na: <https://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_nsv_2014.pdf>

[2] Repáš, V.: *Algopreteky*. In Matematické obzory 18/1982. [online]. [cit. 2020-10-11]. Dostupné na: <http://www.omfi.sk/wp-content/uploads/2020/03/Matematick%C3%A9_obzory-1_5_1982.pdf>

[3] Totkovičová, M.: *Algopreteky*. Bratislava, Metodicko-pedagogické centrum mesta Bratislavy, 2003

Mgr. Jaroslav Baričák
KMANM, FMFI UK
Mlynská dolina
SK – 84284 Bratislava
e-mail: jaroslav.baricak@gmail.com

AKO SA ZMENILI NAŠE ZADANIA POČAS ONLINE VZDELÁVANIA?

BERNEROVÁ ANITA

ABSTRAKT. *V tomto príspevku by som sa chcela podeliť o svoje skúsenosti v oblasti zadávania kontrolných úloh a cvičení z matematiky počas online vzdelávania. Ako nástroj som prvotne používala aplikáciu Google Formuláre, ktorý mi umožnil technicky zdieľať zadania so študentami, následne tabuľkový kalkulátor mi ponúkol priestor na efektívne vyhodnotenie a prvotnú spätnú väzbu pre študentov. Počas experimentovania touto formou sa vyskytlo veľa technických, ale najmä didakticko-metodických problémov, ktoré by som tiež rada predstavila spolu s mojimi riešeniami.*

Motivácia

Online vzdelávanie v marci roku 2020 nás učiteľov zasiahlo v podstate zo dňa na deň. Takáto forma motivácie pre človeka nie je úplne prirodzená, ale predsa bolo treba sa situácii prispôsobiť a začať uvažovať o tom, ako poskytnúť študentom vzdelanie aj v týchto zmenených podmienkach. Pre mňa to bola príležitosť viac pracovať s digitálnymi technológiami a zároveň zlepšiť študentov v práci s nimi, zamyslieť sa nad tým, o čo mi vlastne ide, keď sa snažím vzdelávať týchto študentov, či moje hodiny boli doteraz naozaj prínosné pre každého študenta v nejakej forme a samozrejme zvážiť doterajšie aplikované metódy vo vyučovaní.

Počas tohto uvažovania som zistila, že ma čakajú veľké, zaujímavé a náročné zmeny a vylepšenia. Mám tú česť, že môžem pôsobiť na pomerne progresívnej škole, kde neustále zlepšovanie sa, osobnostný a odborný rozvoj sú vítané a oceňované, takže aj táto výzva vo mne vyvolala príležitosť skúmať a objaviť nové možnosti. V tomto prístupe ma posilňuje aj misia našej školy *„Každého žiaka vzdelávame a vychovávame k tvorivému a kritickému mysleniu, k zodpovednosti voči sebe, druhým a svetu a k schopnosti tvoriť komunity v duchu kresťanských biblických hodnôt.“* [1]. Ako učiteľa matematiky ma oslovuje výraz *„tvorivé a kritické myslenie“,* ktoré je jedna z kľúčových zručností matematicky gramotného človeka. Počas online vzdelávania teda som mohla túto zručnosť rozvíjať ako v sebe, tak aj v mojich študentoch a to tým, že som sa odhodlala vyskúšať nové spôsoby v prístupe k jednotlivým matematickým témam.

Nové spôsoby pre mňa znamenali zmeny nie len v technológiách, ale aj v spôsobe komunikácie týchto matematických tém. A jedna kľúčová oblasť v komunikácii je práca s otázkami. S toto problematikou na svojich hodinách som už pracovala od začiatku školského roka, od konferencie „2 dni s didaktikou matematiky 2019“, kde som bola výrazne inšpirovaná pani Jarmilou Novotnou, keď prednášala o tom, ako viesť matematická diskusie a ako sa pýtať na hodinách matematiky [2].

Vyzbrojená všetkými uvedenými motivačnými myšlienkami som sa odhodlala pustiť sa do online vzdelávania a do nových skúseností, pričom som si bola vedomá toho, že ma čaká náročná práca plná neistôt a možných neúspechov.

Potrebné technológie a zručnosti

Som učiteľka matematiky v kombinácii s informatikou, takže aplikovanie nových technológií ma neodrádzalo. Už od začiatku svojej cesty k učiteľskej profesii (až do dnes a naďalej) mám vzťah k efektívnemu využívaniu digitálnych nástrojov pre prípravu vzdelávacích materiálov. Bezproblémové používanie nástrojov textového editoru a grafických programov mi vždy slúžili v tom, aby materiály, ktoré na našej škole nahrádzajú učebnice, boli kvalitné nielen obsahovo, ale aj štrukturálne a esteticky.

Prácu s online nástrojmi som tiež priebežne osvojovala počas svoje učiteľskej praxi.

Ovládanie portálu Edupage ako základný nástroj na komplexnú elektronickú komunikáciu s členmi školy (a to v našom prípade hlavne so študentami) bolo žiadané od začiatku môjho pôsobenia na škole. V posledných dvoch rokoch sme kladli veľký dôraz aj na vedenie hodín v tomto systéme (publikovanie materiálov, kalendár udalostí a písomiek, možnosť odovzdávania úloh a pod.).

Google nástroje som priebežne objavovala počas svojich hodín informatiky, keď som sa snažila upriamiť pozornosť študentov na jednotnú myšlienku istých nástrojov nezávisle od autora danej aplikácie (napr. MS Word VS Google Docs a iné) alebo keď som potrebovala elektronicky osloviť veľkú skupinu študentov, aby sa vyjadrili k nejakej téme (Google Forms v prípade vzájomných spätných väzieb na vytvorené produkty, napr. videí a prezentácií).

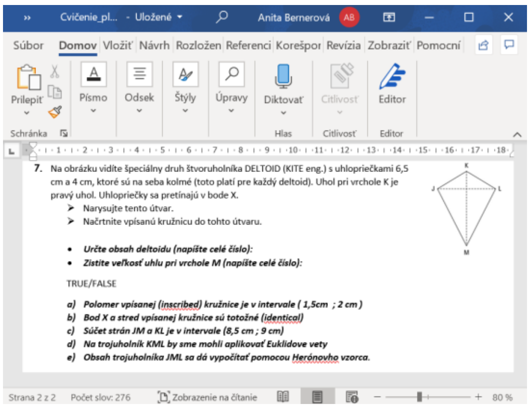
Svoje zručnosti v práci s tabuľkovým kalkulátorom som tiež vylepšovala hlavne počas učenia informatiky, ale aj matematiky. Ovládanie základných formátovacích nástrojov a aplikovanie tzv. funkcií na prácu s hodnotami v bunkách tabuliek je absolútne prínosom pri hromadnom vyhodnotení dát.

Uvedené technológie a zručnosti boli postačujúce, aby som zadania počas online vzdelávania zvládla obsahovo, vizuálne a štruktúrovane pripraviť, publikovať a nakoniec vyhodnotiť odpovede študentov, pričom vďaka efektívnemu systému vyhodnocovania som im vedela poskytnúť aj rýchlu spätnú väzbu.

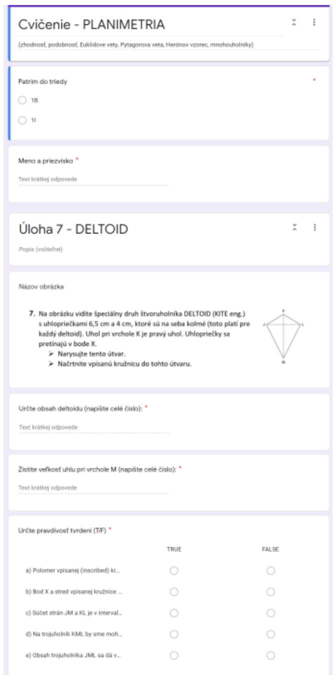
Ukážka zadania z vlastnej tvorby

V tomto príspevku som sa snažila predstaviť nejaké cvičenia a kontrolné práce, ktoré som spracovala elektronicky za pomoci vyššie uvedených technológií. Postup práce technicky bol nasledovný:

1. Vytvorenie zadania pomocou textového a grafického editora.
2. Prenos obsahu zadania do prostredia Google Forms.
3. Zverejnenie adresy (zdieľanie) pomocou Edupage zadania.
4. Spracovanie odpovedí pomocou tabuľkového kalkulátora.
5. Zverejnenie vyhodnotenia odpovedí a rýchlej spätnej väzby.

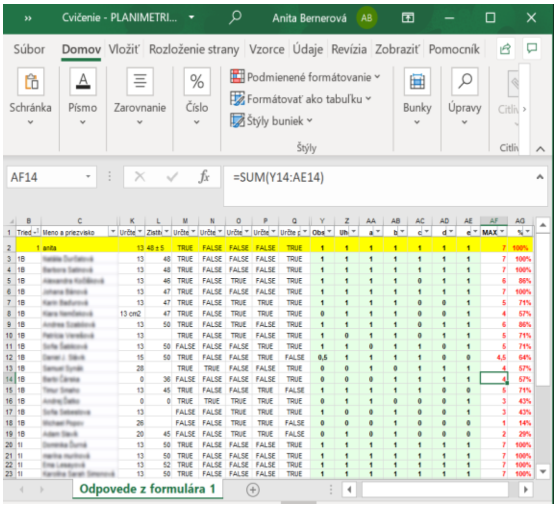


Obrázok 1: Vytvorenie zadania v textovom editori



Obrázok 2: Obsah zadania v Google Forms

Obrázok 3: Zverejnenie na Edupage



Obrázok 4: Vyhodnotenie a spätná väzba

Problémy a ich riešenia

V priebehu vytvárania takýchto zadaní sa vyskytlo niekoľko problémov, ktoré som sa snažila priebežne riešiť a tým aj vylepšovať tento systém zadávania úloh. Nižšie uvádzam štyri z nich.

Problém 1: Ako formulovať zadanie, ktoré si pýta komplexné riešenie?

Pri istých typoch úloh máme tendenciu zadávať úlohy príkazom „vypočítaj, narysuj". V tomto prípade je jasne naformulované, čo má študent urobiť a tvorivé a kritické myslenie ostáva mnohokrát v úzadí, pretože študent aplikuje naučený algoritmus na riešenie úlohy. Zároveň vyhodnotenie tejto úlohy online je pomerne náročné. Totiž v prípade, že sa zameriavame len na výsledok, tým o vedomostiach študenta zistíme to, že je schopný pomocou nejakých nástrojov (aplikácia, kalkulačka, vzorce a pod.) dostať sa k výsledku. Ak sa chceme zamerať aj na jeho postup, študent môže odfotiť a poslať svoj postup, čo môže byť zdĺhavé a nepraktické zobraziť a skontrolovať (kvalita obrázku, spôsob doručenia a pod.).

Práve z tohto dôvodu som si zvolila „dvojúrovňové" zadania, kde hlavnou myšlienkou bolo vyšetriť tvrdenie na základe bežných zadaní. Teda najprv treba „vypočítať, narysovať" a potom sa treba zorientovať v kontexte, aplikovať komplexnejšie vedomosti, prepojiť pojmy a vzťahy týkajúce sa témy.

Problém 2: Ako formulovať zadanie, ktoré je spracovateľné v Google Forms a zároveň vyhodnotiteľné v tabuľkovom kalkulátori?

Dotazníkové nástroje ponúkajú rôzne druhy otázok (otvorená otázka, výber z viacerých možností a pod.). Avšak nie všetky sa dajú technicky jednoducho vyhodnotiť. Napr. otázka s otvorenou odpoveďou v prípade matematiky prináša problémy zápisu číselnej odpovede: desatinný znak, (ne)uvádzanie jednotky a pod. Preto som sa viac zameriavala na otázky s výberom odpovedí. Počas vyhodnocovania bolo treba len porovnať vybranú hodnotu študenta s očakávanou (správnou) hodnotou, čo je vlastne binárne vyhodnocovanie, t.j. hodnoty sa rovnajú (za 1 bod) alebo nie (za 0 bodov).

Problém 3: Ako vyhodnotiť získané odpovede?

Tento problém v sebe skrýva 2 otázky:

- **Ako obodovať jednotlivé podotázky zadania?**
- **Ako technicky vyhodnotiť odpovede?**

Zadania v prípade prezenčného vyučovania tiež disponujú touto problematikou. Ako som už spomínala vyššie, zadania zvyknú znieť inak, ako niektoré moje ukážkové „otázky“. A práve kvôli tomuto zneniu aj pri vyhodnocovaní rozmýšľame vo viacerých okruhoch (napr. správne dosadil údaje, správne aplikoval vzorec/algoritmu, odpovedal vôbec na zadanú otázku, počítal/rysoval presne a pod.). Na základe týchto okruhov bodujeme zadania a pri vyhodnocovaní uvádzame počet bodov, ktoré sú častokrát subjektívnym súhrnom týchto preukázaných zručností.

V prípade „otázok s výberom odpovedí“ túto komplexnosť zadania treba rozbiť na niekoľko podotázok, ktoré sa môžu vzťahovať jednotlivo na spomínané okruhy. Takže moje bodovanie spočívalo v tom, že každá podotázka mala hodnotu 1 bod a z nich sa poskladali body pre celé zadanie. Technické vyhodnotenie tým pádom bolo potrebné „už len“ doriešiť pomocou vhodnej funkcie, ktorá porovnala hodnoty dvoch buniek a na základe logickej hodnoty tohto porovnania sa pripísala hodnota 1 alebo 0. (Táto funkcia v mojom prípade bola IF, napr.: =IF(P$2=P3;1;0)).

Niektoré otázky som predsa položila štandardne („vypočítaj, zisti“) a odpovede som získala cez možnosť „krátka odpoveď“. Tieto vstupy som vyhodnocovala bežným spôsobom – sama som porovnala výsledky, keďže napísané odpovede občas sa líšili od očakávaného formátu (viď Obrázok 4 – 8. riadok). A niekedy sa uvedené dva spôsoby dali aj kombinovať.

Na záver som spočítala všetky takto získané hodnoty a zistila percentuálnu úspešnosť každého študenta.

Problém 4: Ako zabezpečiť akademickú čestnosť?

Uvedené spôsoby zadaní žiaľ nijako nezaručujú, že ich študent vypracoval sám. Síce žiada sa komplexná znalosť tematiky, ale na základe odpovedí nemožno istotou tvrdiť, že sú to znalosti daného študenta. Preto som túto formu zadaní aplikovala v prvom rade na precvičovanie a na získavanie skúseností v komplexnom riešení úloh. Hodnotenie tým pádom bolo skôr informatívne a len mierne ovplyvňovalo koncoročnú známku.

Avšak v niektorých prípadoch som zapojila túto formu aj v hodnotenom zadaní, teda ako písomku. V otázke akademickej čestnosti som sa opierala o dôveru, ktorú sme mali so študentami vybudovanú ešte počas prezenčného štúdia. Myslím si, že vo väčšine prípadov sa táto dôvera osvedčila, avšak našli sa študenti, ktorí túto dôveru neocenili a podvádzali a to spôsobom, že spolupracovali počas písomky a posielali si výsledky. V tomto prípade sa vyplatili otázky s otvorenou odpoveďou, totiž práve rovnako nesprávne výsledky odhalili túto spoluprácu u jednej skupine študentov.

Záver

Tento príspevok má v názve otázku, na ktorú som sa snažila odpovedať skrz niekoľkých inšpiratívnych nápadov a odporúčaní, ktoré môžu byť prínosom pre učiteľov. Pre učiteľov, ktorí majú radi výzvy a neboja sa digitálnych technológií, ktorí sú kreatívni v zadávaní úloh a radi experimentujú či už so spôsobom komunikácie v matematickej oblasti alebo len tak s novinkami na obzore (nielen) vzdelávacích možností. Pretože zmien sa netreba báť, hlavne, keď máme v ruke nástroje, ktorými ich vieme vhodne nasmerovať.

Literatúra

[1] webstránka Biligválneho gymnázia C. S. Lewisa, https://bilgym.sk/o-skole/about-us/

[2] online zborník 4. ročníka konferencie 2 dni s didaktikou matematiky, http://www.comae.sk/zbornik2019.pdf

Mgr. Anita Bernerová
Bilingválne gymnázium C. S. Lewisa
Haanova 28.
SK – 851 04 Bratislava
e-mail: anita.bernerova@bilgym.sk

TÍMOVÉ RIEŠENIE OTVORENÝCH MATEMATICKÝCH PROBLÉMOV V SÚŤAŽI MATEMATICKÝ B-DEŇ

BULKOVÁ, KRISTÍNA, ČERETKOVÁ SOŇA

ABSTRAKT. *Príspevok je zameraný na pozorovanie a analýzu tímovej spolupráce žiakov pri riešení otvorených matematických problémov. Prezentovaný bude postup v riešení žiakov prostredníctvom významných častí ich vzájomnej komunikácie vybraného problému zo zadania súťaže Matematický B-deň 2018 s názvom "Hadíkove hniezdo".*

Tímová spolupráca a vzájomná komunikácia

Rámcový dokument PISA [1] definuje vzájomnú tímovú spoluprácu ako schopnosť jedinca efektívne sa zapájať do procesu, prostredníctvom ktorého sa členovia tímu pokúšajú vyriešiť nejaký problém. Práve spoločné úsilie nájsť riešenia problémov ich núti navzájom zdieľať vedomosti, schopnosti a zručnosti jednotlivých členov tímu.

Potreba zaradenia tímovej spolupráce ako aktivizujúcej metódy do vyučovania vyplýva zo súčasnej spoločenskej potreby pripraviť žiakov pre zaradenie do spoločnosti 21. storočia [2] a vo vyučovaní matematiky má svoje veľké opodstatnenie. Ako príklad si môžeme položiť prácu skutočných vedcov, ktorí si pri realizácii výskumu prepájajú svoje vedomosti, a to prostredníctvom tímovej spolupráce. Vhodný postup a stratégiu riešenia vytvárajú spoločne plynulou diskusiou, ale aj sporom. Vedieť a ovládať matematiku nie je založené len na znalosti pojmov, postupov a algoritmov.

Tímovú spoluprácu je možné implementovať do vyučovania matematiky prostredníctvom objavného vyučovania, ktoré ponúka žiakom viesť vlastné skúmanie a vytvárať nové poznatky. Práve otvorené matematické problémy, ako prostriedok objavného vyučovania, otvárajú priestor pre žiakov navzájom zdieľať svoje vedomosti o problematike, utvoriť a následne diskutovať svoje stratégie, začleniť sa do skupiny a navzájom komunikovať. Situácie, ktoré predstavujú pre žiakov novú výzvu, povzbudzujú žiakov k istému riadeniu, regulácii a deleniu strategických aktivít v tímovej spolupráci [3].

Súťaž Matematický B-deň 2018: Hadíkovo hniezdo

Matematické súťaže zlepšujú úroveň vedomostí matematiky u žiakov [3]. Ak sa jedná o súťaž zameranú na tímovú spoluprácu, výzvou je koordinácia žiakov s rôznym matematickým zázemím pre hlbší rozvoj matematického uvažovania a podporu tvorby stratégií riešenia problémov [4]. Jednou z tímových súťaží, ktoré sa organizujú pre žiakov v rámci Slovenskej republiky, je súťaž Matematický B-deň[1].

Zadanie súťaže tvorí súvislý text v rozsahu 10 až 20 strán skomponovaný z gradovaných matematických problémov a vysvetľujúcich komentárov týkajúcich sa daného problému alebo aj celej situácie. Problém predstavuje reálnu situáciu, s ktorou sú žiaci na začiatku textu oboznámení. Postupným definovaním pojmov a riešením úvodných navádzajúcich úloh sa žiaci dostávajú hlbšie do problému a sú postupne nútení problémovú situáciu zmatematizovať. Žiaci tak plynule prechádzajú k riešeniu otvorených matematických problémov, ktoré nakoniec vedú k originálnemu skúmaniu v matematike a vytváraniu matematického modelu zadanej reálnej situácie. Úlohou troj- až

[1] Všetky zadania súťaže sú dostupné na: http://www.primas.ukf.sk/bday.html

štvorčlenného tímu je v priebehu siedmich hodín sa spoločnými silami dostať hlbšie do problému a postupne problémovú situáciu zmatematizovať a modelovať.

Pre vytvorenie zadania z roku 2018 „Hadíkovo hniezdo“ sa nechali tvorcova inšpirovať súčasným otvoreným problémom v matematike s názvom *„The Moser´s Worm Problem*“. Cieľom bolo nájsť tvar a minimálnu plochu rovinného útvaru, ktorý by pokryl všetky možné polohy ľubovoľnej krivky, ktorá má danú pevnú dĺžku [5]. Problém bol obmenený na príbeh o hadovi Lene, ktorý má dĺžku 15 cm a potrebuje si vyrobiť čo najmenšiu prikrývku. Žiaci postupne skúmajú rozmery známych pravidelných útvarov ako kruh, obdĺžnik, kosoštvorec, ale postupne sú vyzývaní z týchto útvarov uberať nepotrebnú plochu, teda nevyužité časti hadovej prikrývky. Téma je z oblasti tzv. kombinatorickej geometrie a vyžaduje využitie vedomostí z planimetrie, trojuholníkovej geometrie a kombinatoriky.

Vzájomná komunikácia žiakov pri riešení otvorených matematických problémov

Jedným z hlavných prvkov tímovej spolupráce je vzájomná komunikácia členov tímu. Pri organizácii viacerých ročníkov súťaže bolo realizované pozorovanie žiakov pri ich tímovej spolupráci, konkrétne interakcie žiakov pri ich vzájomnej komunikácií podľa SEDA schémy (tabuľka 1) podľa Hennessy. Ako interakcia bol vybraný každý príspevok žiaka do vzájomnej diskusie, relevantný pre riešenie zadaného problému.

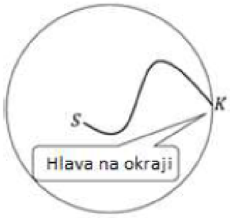
KÓD	POPIS INTERAKCIE ŽIAKOV	Kľúčové slovo
0	Žiadna vzájomná interakcia v komunikácii.	bez interakcie
1	Vyzvanie na zdôvodnenie alebo spracovanie záverov.	záver
2	Vysvetlenie alebo objasnenie svojho zdôvodnenia.	vysvetlenie
3	Diskutovanie, nadviazanie na vyslovené myšlienky.	diskusia
4	Vyzvanie pre nové nápady alebo pre vyjadrenie sa k nápadom.	nápad
5	Reflexia na myšlienky, smer dialógu alebo na aktivitu.	reflexia
6	Spájanie myšlienok a argumentov do záverov.	argumentácia
7	Upevňovanie svojej pozície a koordinácia priebehu spolupráce.	pozícia
8	Riadenie alebo usmerňovanie dialógu alebo aktivity.	riadenie

Tabuľka 1: SEDA schéma [6]

Pre ukážku ďalej uvedieme vzájomnú komunikáciu medzi žiakmi zameranú na riešenie vybraného problému zo zadania Matematický B-deň: Hadíkovo hniezdo [5]:

„Predpokladajme, že máme kruhovú prikrývku s priemerom 20 cm. Nestačí, keď napíšete: Umiestnime Lenu tak, že jej hlava leží na kružnici a budeme ňou otáčať okolo tohto bodu dovtedy, kým Lena nie je kompletne skrytá pod prikrývkou.

Nebude to vždy pravda! Nakreslite obrázok Leny, nájdite taký jej tvar alebo polohu, kedy to nie je pravda (hadík Lena nie je kompletne prikrytý).“ (Obrázok 1)



Obrázok 1: Kruhová prikrývka s hlavou hada umiestnenou na obvodovej kružnici

Pre analýzu vzájomnej komunikácie bol vybraný tím žiakov, ktorí preukázali vo vysokej miere svoje komunikačné schopnosti. Žiaci otvorili k zadanému problému diskusiu, ktorej prepis je nižšie uvedený, pričom ku každému z úkonov v komunikácii, teda samostatného komentára žiaka, bol priradený kód na základe SEDA schémy, uvedenej v tabuľke 1.

(6) Daniel: Toto sa mi nepáči, ja by som to dal práve špirály radšej, lebo toto sa dá otočiť tak, aby to bolo v celej kružnici.

(5) Adam: Nedá sa to otočiť!

(4) Cyril: Dá!

(1) Adam: Ako to chceš otočiť, keď to ide najskôr von a potom dnu?

(2) Cyril: No otočíš to tak, aby to bolo dovnútra.

(5) Adam: Nebude to tu.. nikdy to nie je.. nebude to tu... vždycky ti bude niečo vy-

(7) Cyril: Adam, takto.. takto to vieš dať.

(2) Daniel: Keď bude telo vo vnútri, tak to bude čiara vo vnútri kruhu.

(4) Cyril: Keď to vieš otočiť o približne... o trochu viac ako o 90 stupňov, bude to vo vnútri?

(3) Boris: Uhm, keď to otočíš o nejakých 100 stupňov, tak to bude celé vnútri. Asi.

(4) Adam: Tak dajme špirálu!

(8) Boris: Nech sa páči, tak ten komu napadla špirála... Daniel, hej?

(3) Daniel: Dajme takú, že špirálu na oboch koncoch.

Boris: Hej!

(2) Daniel: Také „esko“ dáke. Lebo to potom pre oba konce platí!

V prvej časti ukážky možno pozorovať u žiakov konflikt o možnom riešení, ktoré navrhol Daniel, zadaného problému medzi Adamom a Cyrilom. Podstatnú časť vzájomnej interakcie žiakov tvorí diskusia, podporená o vzájomné vyzvanie členov tímu k nápadom a zdôvodneniu svojich záverov. Do riadiacej pozície v rámci tímu sa čiastočne staval Boris, ktorý počas ostatného trvania diskusie pri konflikte zaujímal skôr pasívnu pozíciu. Daniel nakoniec uzatvoril diskusiu konkrétnym riešením, ktoré považoval za vhodné.

(4) Daniel: A ty si tam tú hlavu jasne definoval alebo to máme zas .....

(3) Cyril: Ale.. na to nezáleží, či?

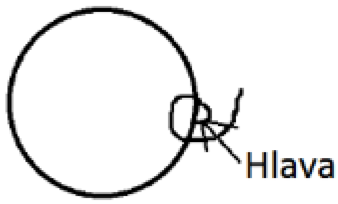
(8) Adam: Ale definované máš, že hlava musí ležať na kružnici, takže.. ako má to byť tu!

(1) Daniel: Áno... len, že či si vopred nemôžeme preddefinovať, čo je hlava. Preto som chcel, aby to bolo také „esko“, aby to na oboch koncoch nešlo.

(4)	Boris:	Hej, nemôžeš zobrať hlavu akože.. z oboch.. z oboch strán? Že si vezmeš jeden koniec špirály..
(7)	Adam:	Ale v tomto Béčku je jasne napísané, že tá hlava má ležať na kružnici!
(5)	Boris:	Na jej obvode, nie?
(7)	Adam:	Na jej obvode, čiže keď to bude už takto zas určené, tak už nemôžeš brať druhý koniec, pretože je to chvost.
(1)	Boris:	A nemôžeš si to sám určiť, kde je čo?
(4)	Cyril:	Ty si môžeš sám určiť, ktorá je hlava. Záleží na tom, ktorý z tých dvoch je hlava.
(7)	Adam:	V tomto Béčku máš jasne povedané, že tá hlava má byť na kraji.

Na základe predchádzajúcej diskusie vytvorili žiaci k uvedenému problému nasledujúce písomné riešenie:

Máme kruh s priemerom 20 cm a 15 cm krivku, ktorý umiestnime tak, že jeden jej krajný bod bude ležať na obvode tohto kruhu (nazvime takýto bod fixný) s tým, že krivku budeme otáčať okolo jej fixného bodu dovtedy, pokiaľ nebude celá vnútri kruhu. Ukážeme tvar krivky, kedy táto metóda nefunguje.



Obrázok 2: Riešenie žiakov vybraného problému

Ako možno vidieť, v prípade, že krivka je tvaru špirály tak, že jej fixný bod je jej stredom, nikdy nebude celá v kruhu. Danú špirálu by sme vedeli ešte prekresliť do podoby kruhu kde už jednoznačne vidno, že krivka bude kruh so stredom na obvode prikrývky a nech ju otočíme akokoľvek, časť bude vždy prečnievať von.

Na záver

V ukážkach nepriameho pozorovania vo vzájomných interakcií žiakov boli pozorovateľné úkony v komunikácií, ktoré priamo súvisia s matematických skúmaním alebo riešením otvorených matematických problémov. Z pozorovania vzájomnej komunikácie sa ukazuje, že diskusia má kľúčovú úlohu k dynamickej spolupráci v rámci tímu.

Pomocou analýzy prepisov vzájomnej komunikácie žiakov je možné identifikovať oblasti významné úkony v komunikácii, ktoré charakterizujúce štýl interakcie študentov s otvorenými úlohami v matematike. Práve otvorené úlohy poskytujú vhodný základ na rozvoj zručností potrebných pre zmysluplnú tímovú spoluprácu aj vo vyučovaní matematiky [7].

Literatúra

[1] PISA 2015. Collaborative Problem Solving Framework. [online]. OECD, 2017. Dostupné na internete:

http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/Draft%20PISA%202015%20Collaborative%20Problem%20Solving%20Framework%20.pdf

[2] National Research Council (2011). Assessing 21st century skills. Washington DC: National Academies Press, 2011. 154 s. ISBN 978-0-309-21793-4.

[3] Häkkinen, P., Järvelä, S., Mäkitalo-Siegl, K., Ahonen, A., Näykki, P., & Valtonen, T. (2017). Preparing teacher-students for twenty-first-century learning practices (PREP21) : a framework for enhancing collaborative problem-solving and strategic learning skills. Teachers and Teaching: Theory and Practice, 23 (1), 2017, pp. 25-41. DOI: 10.1080/13540602.2016.1203772

[4] Kenderov, P. S. (2006). Competitions and mathematics education In Proceedings oh the International Congress of Mathematicians, Vol. 3, 2006, p. 1583-1598. ISBN 978-3-03719-022-7.

[5] Matematický B-deň 2018: Hadíkovo hniezdo [Online] 2018. Zadanie súťaže. Dostupné na internete: http://www.primas.ukf.sk/download/bday/B-den_2018_zadanie_SK.pdf

[6] Hennessy, S. a kol. 2016. Developing a coding scheme for analysing classroom dialogue across educational contexts In Learning, Culture and Social Interaction, Vol. 9. pp. 16 – 44, 2016.

[7] Chan, M. Ch. E., Clarke, D. (2017). Structured affordances in the use of open-ended tasks to facilitate collaborative problem solving. In ZDM, Vol 49. pp. 951-963,

PaedDr. Kristína Bulková, PhD.
Ústav školní pedagogiky
Fakulta humanitních studií
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíne
Štefánikova 5670
CZ – 760 01 Zlín
e-mail: bulkova@utb.cz

doc. PaedDr. Soňa Čeretková, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
SK – 949 74 Nitra
e-mail: sceretkova@ukf.sk

AKO SI UČITEĽ MATEMATIKY PORADIL (?) S DIŠTANČNÝM VZDELÁVANÍM

CSACHOVÁ LUCIA, JUREČKOVÁ MÁRIA

ABSTRAKT. *Pod pojmom dištančné vzdelávanie sa v odbornej literatúre rozumie „vzdelávanie na diaľku". Ale ako môže vyzerať takáto forma vzdelávania pre základné a stredné školy, to na začiatku karantény na jar 2020 vedel málokto. V príspevku sa venujeme aktivitám a skúsenostiam učiteľov matematiky z tohto obdobia.*

Dištančné vzdelávanie

12. marca 2020 bolo rozhodnutím ministerky školstva prerušené vyučovanie na školách a školských zariadeniach od dátumu 16. 3. 2020 na dva týždne z dôvodu rozšírenia ochorenia COVID-19. V usmernení bolo nariadené, aby riaditelia škôl zabezpečili samoštúdium žiakov prostredníctvom elektronickej komunikácie s pedagógmi. V ďalších rozhodnutiach už nového ministra školstva bolo predĺžené uzavretie škôl a školských zariadení až do odvolania, pričom štúdium na prvom, druhom i treťom stupni vzdelávania (a samozrejme na vysokých školách) malo prebiehať dištančnou formou. Čo pod dištančným vzdelávaním mal chápať školský manažment, učitelia ale i deti, to vysvetlené nebolo. Podľa rozhovorov so spolupracujúcimi učiteľmi a viacerými rodičmi žiakov sa predstavy o dištančnom vzdelávaní diametrálne líšili. Tak to aj vyzeralo v praxi. Niektorí učitelia len informovali žiakov, ktoré úlohy z učebníc alebo pracovných zošitov majú riešiť a presunuli „vysvetľovanie" na rodičov alebo starších súrodencov (v skutočnosti to potom bolo domáce vzdelávanie a nie dištančné). Iní sa postupne učili pracovať s rôznymi aplikáciami a platformami, aby mohli mať so žiakmi „normálne" hodiny. A vyskytli sa aj učitelia, ktorí s veľkým zápalom od začiatku využívali informačno-komunikačné technológie a pripravovali bohaté materiály, aby žiakom zjednodušili proces vzdelávania.

V odbornej literatúre sa uvádzajú rôzne vymedzenia[2], čo *dištančné vzdelávanie* je. Všetky sa ale zhodujú na tom, že je to forma vzdelávania, pri ktorej žiak a učiteľ komunikujú „na diaľku" (napr. Beldarrain, 2006; McIsaac, 1996; Morabito, 1999; Gazdíková, 2003). V prípade, že komunikácia prebieha v tom istom čase, tak hovoríme o *synchrónnom* dištančnom vzdelávaní, v ostatných prípadoch o *asynchrónnom*.

V príspevku opisujeme niektoré výsledky z dotazníka zameraného na priebeh vzdelávania z matematiky na 2. a 3. stupni v karanténnom období na jar 2020, pričom v centre našej pozornosti bola činnosť učiteľa. Pôvodne sme si mysleli, že zistíme, či si učitelia matematiky poradili (alebo neporadili) s dištančným vzdelávaním. V skutočnosti je odpoveď na túto otázku oveľa zložitejšia a ovplyvnená mnohými faktormi.

Učitelia matematiky a dištančné vzdelávanie

Metódou zberu dát bol anonymný online dotazník, ktorý nám vyplnilo 33 učiteľov matematiky 2. a 3. stupňa vzdelávania v priebehu mesiaca jún. Až 20 zúčastnených respondentov (61 %) patrilo medzi začínajúcich učiteľov matematiky s dĺžkou praxe 1 – 5

[2] Rôznorodosť definícií môže byť zapríčinená aj rýchlym rozvojom informačno-komunikačných technológií a schopnosťami učiteľov a žiakov využívať ich vo vzdelávaní.

rokov[3], a takisto 20 učiteľov (61 %) uviedlo, že matematika predstavuje viac než 50 % ich úväzku. Následne prebehol ešte neštruktúrovaný rozhovor s 5 učiteľmi.

Priemerný čas, ktorý učitelia strávili prípravou na vyučovanie matematiky počas týždňa, sa líšil. Samozrejme to záviselo od ich skúseností, počtu tried, ktoré učili, počtu hodín matematiky za týždeň, ktoré mali odučiť, a formy hodín. V dotazníku 5 učiteľov uviedlo, že príprave na vyučovanie matematiky venovali týždenne 20 a viac hodín. V jednom prípade bol priemer až 36 hodín týždenne.[4] Na otázku, koľko hodín priemerne odučili za týždeň, učitelia odpovedali, že počet hodín bol v rozsahu 1 až 15[5].

Komunikácia so žiakmi a vyučovanie matematiky

Až 32 z 34 (teda 94,1 %) učiteľov v dotazníku uviedlo, že na komunikáciu so žiakmi používali platformu edupage.sk. Najskôr zadávali úlohy z učebníc, ktoré mali žiaci v domácom prostredí riešiť, potom pridávali rôzne materiály, ktoré sami vytvorili alebo našli na rôznych učiteľských portáloch. Postupne sa učitelia naučili využívať ďalšie funkcie tejto platformy ako napríklad tvorba testov, o ktorých pred karanténou nevedeli. Na ďalšiu komunikáciu so žiakmi používalo 27 učiteľov (79,4 %) maily. Bolo to najmä v prípade, že žiaci učiteľom mailom posielali vypracované a oskenované zadania, alebo ak chcel učiteľ kontaktovať konkrétneho žiaka.

Až 31 učiteľov (93,9 %) ale prešlo hneď na začiatku karantény alebo po krátkom čase na online, tzv. *face-to-face* formu vyučovania, pri ktorej prebiehali „normálne“ hodiny matematiky, ale vo virtuálnom prostredí. Žiaci sa s učiteľom mohli vidieť, komunikovať s ním, ale aj navzájom medzi sebou. Pre tento spôsob spočiatku využívali aplikáciu Messenger bežnú pre súkromnú komunikáciu, s ktorou mali sami skúsenosti ale aj väčšina žiakov. Nevýhodou bolo ale obmedzenie počtu zúčastnených, takže bolo potrebné triedu rozdeliť na viacero skupín (napr. Školníková, 2020). Neskôr sa učitelia postupne naučili pracovať s novými aplikáciami, ktoré sú vhodnejšie pre face-to-face vzdelávanie (Zoom, MS Teams, Webex, ...). Táto zmena bola potrebná (napríklad z kapacitných dôvodov), ale v niektorých prípadoch spôsobovala zmätky, kým si obidve strany zvykli na nové prostredie. Percentuálne zastúpenie učiteľov (z celkového počtu 33) používajúcich jednotlivé aplikácie alebo platformy sú uvedené v Tab. 1. Dôvodom pomerne vysokého počtu použitých aplikácií a platforiem mohla byť aj chýbajúca štandardizácia zo strany vedenia školy alebo ministerstva školstva. Je ale chvályhodné, že učitelia sa počas karantény naučili pracovať aj s takými platformami, ktoré sa síce využívali, ale skôr v prostredí firiem na porady, a nie v školskom prostredí.

[3] Oslovili sme najmä našich bývalých študentov učiteľstva matematiky (denného i rozširujúceho štúdia). Počet oslovených učiteľov bol vyšší (asi 60). 5 učitelia nám napísali, že radi by dotazník vyplnili, ale z rôznych dôvodov na ich škole prebiehalo dištančné vzdelávanie (a nielen v matematike) na nízkej úrovni. Jedna z učiteliek uviedla, že v pondelok rozniesla pracovné listy žiakom priamo do schránky domu, ale ďalší pondelok nemala čo „vyzbierať“. Deti vôbec neriešili úlohy z pracovných listov, nechcelo sa im alebo ich stratili.

[4] Táto učiteľka v následnom rozhovore uviedla, že veľa materiálov vytvárala v noci, keď jej vlastné školopovinné deti spali. Aktívnejší učitelia sa snažili takto pokračovať vo vzdelávaní svojich žiakov na úkor svojho voľného času a spánku.

[5] Až 6 učiteľov (18,8 %) uviedlo 15 odučených hodín matematiky do týždňa.

Aplikácia / platforma	*Edupage.sk*	*Mail*	*Messenger*	*MS Teams*	*Zoom*	*Skype*	*Webex*	*Iné*[6]
Percentuálne zastúpenie učiteľov (%)	94,1	79,4	55,9	26,5	20,6	17,6	11,8	20,6

Tabuľka 1 Prehľad aplikácií a platforiem, ktoré učitelia matematiky používali na komunikáciu so žiakmi počas jarnej karantény a s percentuálnym zastúpením učiteľov

V 2 prípadoch, kedy sa vyučovanie matematiky nerealizovalo formou face-to-face, to bolo z rôznych dôvodov. Okrem slabého internetového pokrytia v daných oblastiach, ktoré by bolo nedostatočné pre spojitý priebeh videohovorov, to bol často nezáujem zo strany detí, resp. ich rodín. Týkalo sa to oblastí s vysokým zastúpením žiakov zo sociálne znevýhodneného prostredia, z ktorých mnohí nemali k dispozícii počítač/notebook, tablet, ani mobilný telefón s internetom.

Nástroje pre tvorbu výukových materiálov

Okrem odučených hodín učitelia čas strávili prípravou na hodiny a vytváraním rôznych materiálov, ktoré mali pomôcť žiakom vo vzdelávaní. Najčastejšie to boli pracovné listy s úlohami, ktoré učitelia sami vytvorili (26 učiteľov, 76,5 %), pracovné listy s úlohami z učebníc (24 učiteľov, 70,6 %) a prezentácie s novým učivom (25 učiteľov, 73,5 %). Preto učitelia najviac používali pri tvorbe materiálov Word (30 učiteľov, 88,2 %) a PowerPoint (26 učiteľov, 76,5 %), v 11 prípadoch (32,4 %) použili aj Excel. Pre nás veľmi prekvapivé bolo nahrávanie videozáznamov s novým „učivom“ alebo postupmi riešenia úloh (až 22 učiteľov, 64,7 %), ktoré učitelia posielali priamo žiakom cez mail alebo ich „zavesili“ na YouTube. Jeden učiteľ na gymnáziu dokonca online vyučovacie hodiny nahrával a umiestňoval ich na YouTube, aby aj tí študenti, ktorí sa nemohli z rôznych dôvodov hodiny zúčastniť, si ju mohli pozrieť. 17 učiteľov (51,5 %) uviedlo, že vytvorili rôzne projekty, na ktorých žiaci pracovali.

Záver

Karanténa zapríčinená pandémiou koronavírusu na jar 2020 otestovala pripravenosť škôl a učiteľov, ale i celého školského systému na dištančné vzdelávanie. Každá inovácia na začiatku obyčajne prináša problémy spôsobené skutočnosťou, že ľudia ešte nie sú zvyknutí na nový spôsob a chýbajú im osobné skúsenosti. V prípade dištančného vzdelávania online formou na Slovensku sú tieto „začiatočnícke“ problémy sprevádzané technickými problémami a problémami vyplývajúcimi z našich spoločných vzdelávacích modelov a systémov. Väčšina učiteľov uvádzala technické problémy pri dištančnom vzdelávaní, ktoré sťažovali výuku počas karantény. Okrem nedostatočného pokrytia a nízkej kvality internetového pripojenia, to boli aj problémy s inštalovaním aplikácie či platformy na strane žiakov, problémy s mikrofónom či kamerou. Vyskytli sa ale aj prípady, kedy sa do skupiniek pridali cudzí ľudia (ak žiaci preposielali odkaz na skupinu napríklad kamarátom).

Napriek tomu, že mnohým učiteľom sa podarilo vyučovať matematiku na úrovni adekvátnej modernej doby, jedna vec v procese chýbala – osobný kontakt medzi učiteľom a žiakmi. Jeden z učiteľov uviedol: „ V podstate som vedel simulovať prakticky celý vyučovací proces. ... V celom tomto modeli chýbala jedna kľúčová vec: počas hodín som

[6] Medzi iné „aplikácie“ učitelia uvádzali webové stránky: bezkriedy.sk, matika.in.sk, programalf.com.

ja nevidel, čo robia žiaci, nebol som s nimi v procese ich premýšľania, nie vždy som bol schopný odhaliť chyby, ktoré v usudzovaní robia. Osobný kontakt chýbal – ten je nezastupiteľný. Aj pre vyučovanie matematiky. Nie som typ „prednáškového“ učiteľa, sám potrebujem interakciu so žiakmi a s touto interakciou viem pracovať. Tento vzácny zdroj informácii mi chýbal.“

Ak by sme predsa chceli odpovedať na otázku, či si učitelia matematiky poradili s dištančným vzdelávaním počas karantény na jar 2020, mohli by sme povedať, že väčšine učiteľov, ktorí sa zúčastnili nášho dotazníka, sa to podarilo. Záležalo to na ich vnútornej motivácii, na chuti naučiť sa niečo nové a zvládnuť výchovno-vzdelávací proces na virtuálnej úrovni, ale aj na vedení škôl, aké podmienky pre túto formu vzdelávania stanovili. Napríklad či a do akej miery má vzdelávanie v jednotlivých predmetoch prebiehať synchrónnou, face-to-face formou, prípadne či je možné „viesť“ hodiny asynchrónnou formou, kedy učitelia pripravili žiakom výukové materiály (napr. prezentácie, pracovné listy, ...), ktoré žiaci v čase nimi zvolenom použili pre štúdium.

Aj súčasná jesenná doba potvrdzuje, že je veľmi dôležité zamerať sa na vzdelávanie budúcich i súčasných učiteľov v oblasti rôznych spôsobov dištančného vzdelávania. Je vhodné zúčastniť sa rôznych webinárov, na ktorých sú vysvetlené aspoň základné postupy a pravidlá práce pre online vyučovanie prostredníctvom rôznych aplikácií (platforiem). Aby pri opakovaní karantény nebolo prerušené vzdelávanie.

Literatúra

[1] Beldarrain, Y.: Distance Education Trends: Integrating new technologies to foster student interaction and collaboration, Distance Education 27(2), Florida Virtual School, USA, 2006, pp. 139-152.

[2] Gazdíková, V. Základy dištančného elektronického vzdelávania. Trnava, PF UK, 2003.

[3] McIsaac, M. S., & Gunawardena, C. N.: Distance education [Electronic version]. In D. H. Jonassen (Ed.), Handbook of research for educational communications and technology: A project of the Association for Educational Communications and Technology, pp. 403–437. New York, 1996.

[4] Morabito, M. G.: Online Distance Education: Historical perspective and practical application. (Dissertation thesis.) American Coastline University, 1999.

[5] Školníková, J.: Vyučovanie matematiky v čase mimoriadnej situácie. (Záverečná práca.) Pedagogická fakulta, Katolícka univerzita v Ružomberku, 2020.

RNDr. Lucia Csachová, PhD.
Katolícka univerzita v Ružomberku
Pedagogická fakulta
Hrabovská cesta 1
SK – 034 01 Ružomberok
e-mail: lucia.csachova@gmail.com

doc., RNDr. Mária Jurečková, CSc.
Katolícka univerzita v Ružomberku
Pedagogická fakulta
Hrabovská cesta 1
SK – 034 01 Ružomberok
e-mail: maria.jureckova@ku.sk

MATEMATICKÉ PRECHÁDZKY V TERÉNE I ON-LINE

ČERETKOVÁ SOŇA

ABSTRAKT. *Tvorba matematických úloh o reálnych objektoch vhodných pre matematickú prechádzku reálnu i on-line. Práca s aplikáciou MathCityMap, oboznámenie sa s portálom MathCityMap a projektom MoMaTrE. Predstavenie reálnych a on-line matematických prechádzok, ktoré boli vytvorené v rôznych mestách a miestach na Slovensku.*

Matematická prechádzka v reálnom prostredí

Matematická prechádzka vo vonkajšom, reálnom, prostredí predstavuje súbor matematických úloh o skutočných objektoch nachádzajúcich sa v rozumnej pešej vzdialenosti, spravidla v okruhu s maximálnym polomerom štyri kilometre. Hlavná myšlienka tvorby a realizácie matematickej prechádzky spočíva v tom, že práve prostredníctvom vybraných objektov v reálnom prostredí sa dá matematika prežívať v štandardných i v neštandardných vzdelávacích situáciách. Žiaci majú možnosť zaoberať sa matematikou konkretizovanou na daný reálny objekt a jeho vlastnosti, charakteristické prvky či vzťah k iným reálnym objektom v okolí a riešiť tak úlohy na stanovených miestach matematickej prechádzky. Žiaci, počas riešenia úloh matematickej prechádzky v reálnom prostredí, pracujú v malých skupinách po troch alebo štyroch.

Projekt a portál MathCityMap

Cieľom projektu MathCityMap je poskytnúť učiteľom, žiakom i jednotlivcom ľubovoľného veku, príležitosť odhaliť zaujímavé predmety a objekty v reálnom okolí v novej, matematickej, perspektíve. Je zrejmé, že matematika, ako školský predmet či matematické poznatky a vedomosti, sú často vnímané ako abstraktné, nepoužiteľné a nereálne, vyskytujúce sa iba v učebniciach. Veľmi často sa, najmä pri povrchnom vyučovaní matematiky, zabúda na to, že matematické poznatky sú výsledkom kultúry ľudstva: útvary, predmety, plochy, objekty, dekorácie, mozaiky, architektúra a architektonické prvky na budovách... To všetko vymyslel a realizoval človek. Na objavenie matematických zaujímavostí a faktov vo svojom okolí sa preto potrebujeme prechádzať s otvorenými očami a so záujmom a pozornosťou. MathCityMap poskytuje takýto zaujímavý pohľad a cibrí matematickú pozornosť a matematické kompetencie riešiteľov.

Okrem mobilnej aplikácie MathCityMap (MCM) je k dispozícií webový portál: www.mathcitymap.eu.

Tento webový portál umožňuje užívateľom zaregistrovať sa a stať sa nielen riešiteľom prechádzok, ale i aktívnym tvorcom úloh a prechádzok. Každá prechádzka je na portáli archivovaná. Riešenie úloh, ktoré prechádzka obsahuje, je dostupné v mobile, tablete i v tlačenej verzii.

V jarných mesiacoch roka 2020, v čase keď bolo na školách prerušené vyučovanie z dôvodu epidémie COVID-19, autori portálu vytvorili možnosť tvoriť a realizovať virtuálne prechádzky.

V nasledujúcom texte vysvetlíme podstatu tvorby úloh a realizáciu prechádzok v reálnom i virtuálnom prostredí.

Kritériá pre tvorbu MCM úloh

Jedinečnosť. Úloha je uvedená fotografiou objektu, ktorý je predmetom úlohy. Súčasťou vlastností fotografie je aktívna lokalizácia miesta pomocou mapových GPS údajov. Inak povedané: Fotografiu je potrebné snímať tak, aby súčasťou vlastností fotografie boli zemepisné súradnice miesta, kde sa objekt nachádza.

Fyzická prítomnosť pri objekte. Údaje potrebné k vyriešeniu úlohy je možné získať iba fyzickou prítomnosťou pri objekte. To znamená, že fotografia objektu a zadanie úlohy sú komponované tak, že neposkytujú také informácie o objekte, ktoré sú potrebné na vyriešenie úlohy. (Kritérium neplatí pre úlohy prechádzok [MCM@home], pretože tvorba prechádzok sa prispôsobila obmedzeniam počas karantény spôsobenej COVID-19 na jar 2020.)

Aktivita. Riešiteľ musí byť pri riešení úlohy fyzicky aktívny a musí vykonať nejakú fyzickú činnosť (napr. merať a počítať). (Kritérium neplatí pre úlohy prechádzok [MCM@home], pretože tvorba prechádzok sa prispôsobila obmedzeniam počas karantény spôsobenej COVID-19 na jar 2020.)

Viaceré spôsoby riešenia. Úloha by mala byť riešiteľná viacerými rôznymi spôsobmi.

Zmysluplnosť. Úlohy by mali byť zaujímavé a zmysluplné, zadanie úlohy by nemalo pôsobiť umelo. Zadanie úlohy by malo ukázať aplikovateľnosť matematických poznatkov v praxi a nereflektovať tzv. pseudoaplikácie.

Nápovedy. Každá úloha musí obsahovať aspoň dve nápovedy, návody, ktoré riešiteľovi riešenie úlohy priblížia. Nápovedu je možné zobraziť počas riešenia úlohy priamo v aplikácii.

Kľúčové slová. Úloha musí obsahovať prepojenie so školskou matematikou prostredníctvom kľúčových slov. Okrem toho je každá úloha charakterizovaná aj odporúčaným školským ročníkom tak, že vedomosti žiakov z matematiky v danom ročníku, by mali byť na vyriešenie úlohy postačujúce.

Formáty odpovede. Riešenie úlohy je číslo alebo označenie polohy odoslaním GPS súradníc. Ak je riešením úlohy číslo, autor úlohy má tri možnosti ako riešenie definovať: interval, presná hodnota alebo výber z viacerých možností.

Pomôcky. Na vyriešenie úlohy by okrem meracích nástrojov nemali byť potrebné špeciálne pomôcky.

Vzorové riešenie. Každá úloha obsahuje vzorové riešenie, vrátane požadovaných nameraných údajov. Vzorové riešenie je možné získať prostredníctvom portálu (pre tlačenú verziu prechádzky vo formáte pdf). Učiteľ môže vzorové riešenie využiť napríklad na diskusiu so žiakmi o viacerých možnostiach riešenia úlohy alebo tiež na analýzu žiackych chýb. Vzorové riešenie je možné zobraziť aj v aplikácii, po troch zadaných neúspešných pokusoch, nesprávnych výsledkoch.

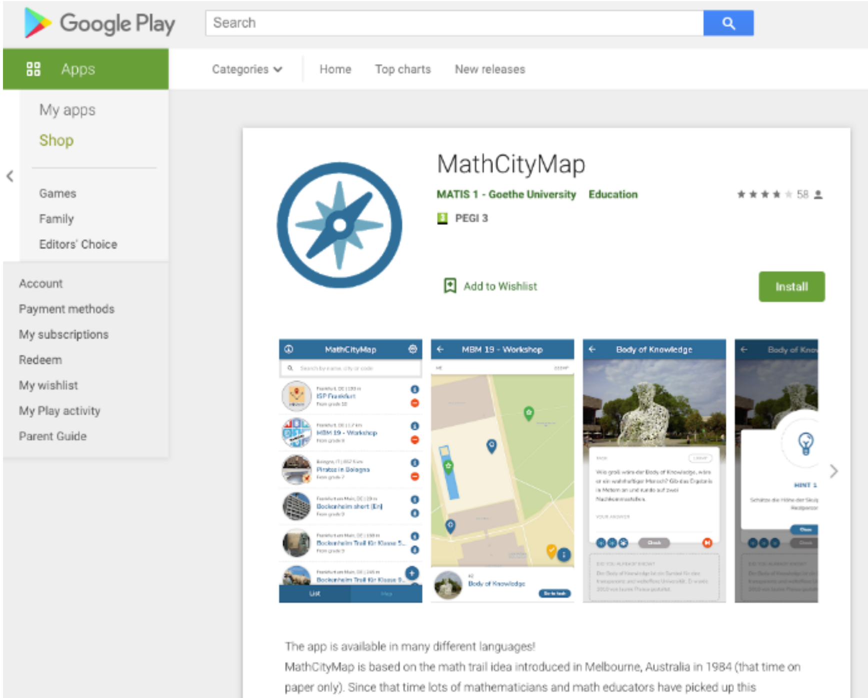
Odkazy na videá na oboznámenie sa s princípom MathCityMap prechádzok:

https://www.youtube.com/watch?v=A8wq_LJJ4Gg

https://mathcitymap.eu/sk/video-riesenie-matematickych-uloh-o-realnych-objektoch-v-terene/

Aplikácia MathCityMap

Bezplatná inštalácia aplikácie MathCityMap je dostupná prostredníctvom niektorého obchodu s aplikáciami v mobilnom telefóne alebo v tablete.



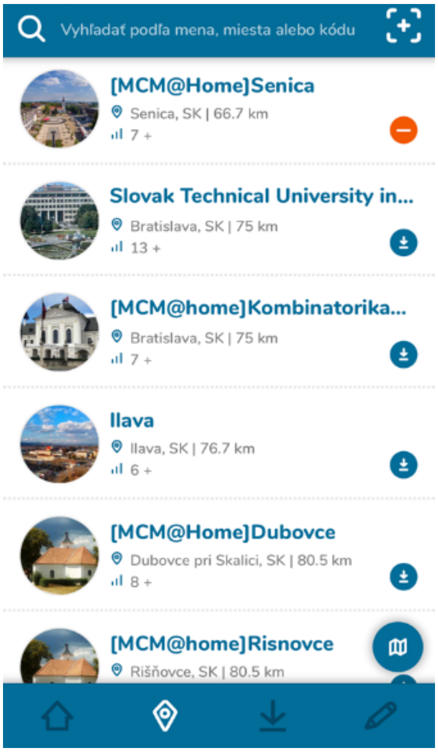
Obrázok 1: Bezplatná inštalácia aplikácie MathCityMap

Po otvorení aplikácie v mobilnom telefónu alebo tablete je možné okamžite zistiť, či sa vo vašom fyzickom geografickom okolí nachádza reálna alebo virtuálna prechádzka a to pomocou príkazu **Prechádzať trasy**.

Prechádzka, ktorej kód poznáme sa vloží pomocou ikony Pridať trasu. Tabuľka 1 uvádza názvy a kódy [MCM@home] prechádzok, ktoré sa dajú realizovať bez návštevy miesta a riešiteľ môže úlohy každej uvedenej prechádzky riešiť individuálne.

Názov prechádzky	**Kód**
[MCM@home]Skalica	692760
[MCM@home]Dubovce	342540
[MCM@home]Rišňovce	452645
[MCM@home]Holíčsky zámok	392602
[MCM@home]Kombinatorika okolo prezidentského paláca v Bratislave	342691
[MCM@home]Pribinovo námestie Nitra	142598
[MCM@home]Vrátna	562529
[MCM@home]Objemy a povrchy v lesoparku Žilina	152588
[MCM@home]Dvory nad Žitavou	292584

Tabuľka 1: Prechádzky vytvorené v období marec – jún 2020



Obrázok 2: Úvod práce s aplikáciou na mobilnom telefóne. Displej mobilného telefónu po otvorení aplikácie MCM a oznam existujúcich prechádzok lokalizovaných v okolí

Ako vytvoriť MCM úlohu a MCM prechádzku na portáli MathCityMap

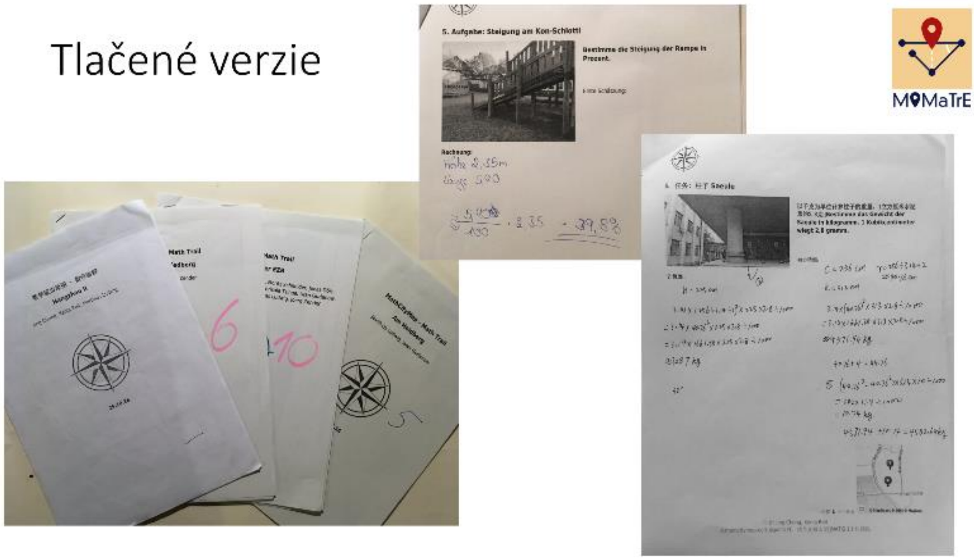
Každá MCM prechádzka sa skladá minimálne z piatich úloh. Úlohy, aj prechádzky, sa vkladajú do editovacej časti portálu MCM. Portál má slovenskú verziu. Užívateľ, autor úloh a prechádzok, sa na portáli zaregistruje a vytvorí si na svoje konto, potrebné je uviesť meno, e-mail a heslo, ktorým sa užívateľ na portál bude prihlasovať.

Práca s portálom mathcitymap.eu intuitívna. Po niekoľkých odladených úlohách autor získa skúsenosť a patričnú zručnosť v práci pri editovaná úloh a prechádzok.

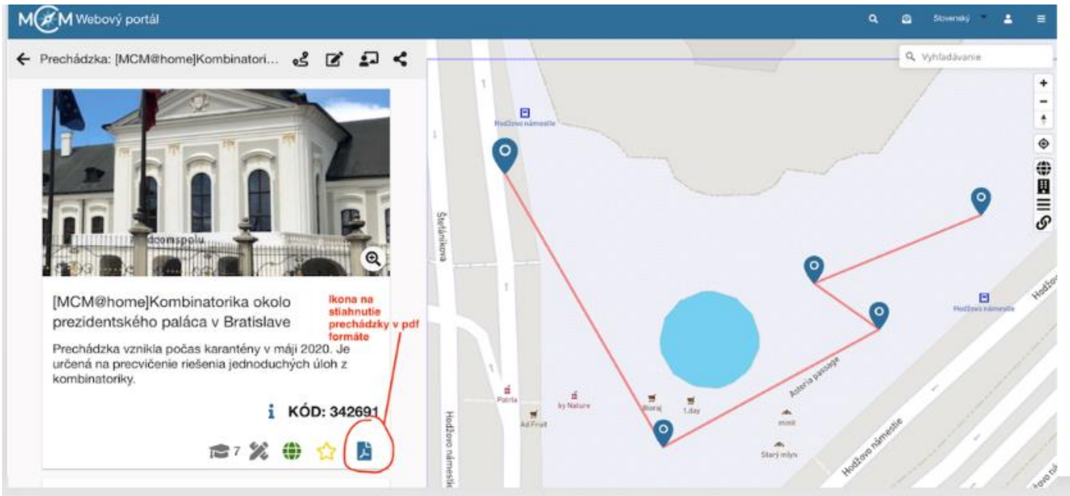
Portál tiež ponúka možnosť vytvoriť digitálnu triedu a sledovať skupiny žiakov pri realizovaní prechádzky v teréne.

Pri realizovaní [MCM@home] prechádzok môžete od žiakov žiadať zaslanie obrázku displeja mobilného telefónu po vyriešení úloh a na základe počtu získaných bodov žiaka ohodnotiť.

Portál umožňuje stiahnuť každú prechádzku v pdf formáte, vytlačiť (každá úloha je na samostatnom liste papiera) a rozdať žiakom na riešenie v papierovej podobe, bez nutnosti použitia tabletov alebo mobilných telefónov.



Obrázok 3: Tlačené verzie prechádzok aj s ukážkami žiackych riešení



Obrázok 4: Ikona na stiahnutie prechádzky v pdf formáte

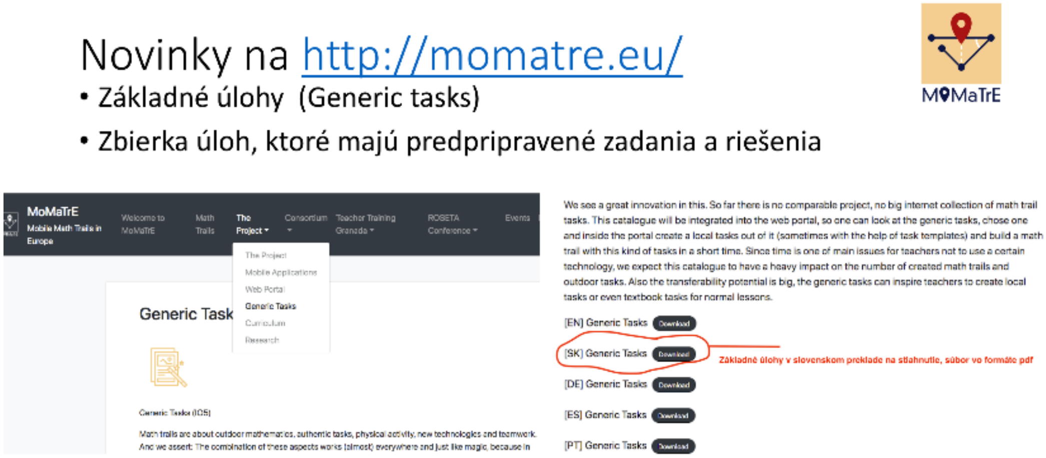
V teréne	**Na portáli https://mathcitymap.eu/sk/** Vytvoríte si svoje konto s menom a heslom
Urobíte vhodnú **fotografiu** objektu, o ktorom bude úloha. Mal by to byť objekt, ktorý je na mieste trvalý a trvanlivý, t.j. existuje šanca, že sa ten objekt bude na tom istom mieste nachádzať aj niekoľko rokov. Fotografiu je následne potrebné upraviť na rozlíšenie **1024x768 pixelov.**	Fotografiu objektu nahráte na úvod zadania úlohy.
Fotografia **musí obsahovať GPS súradnice** objektu (zemepisná šírka a dĺžka).	Objekt sa automaticky umiestni na mapu. GPS súradnice sa tiež automaticky doplnia.
Môžete urobiť aj viac fotografií objektu, ktoré pomôžu ilustrovať zadanie úlohy.	Doplňujúce fotografie (video) sa môžu nahrať na portál ako nápoveda a, alebo, ako komentár k riešeniu.
Počas práce v teréne si starostlivo zapisujte dôležité údaje o objekte, ktoré budú súčasťou zadania, riešenia úlohy a nápovedy úlohy.	Zapíšete zadanie úlohy.
	Zapíšete riešenie. Ak je úloha štandardná (wizzard), riešenia aj odpovede sa vytvoria automaticky.
	Systém vás upozorní, ak v zadaní úlohy niečo chýba.
	Vytvorenú úlohu odošlete na zverejnenie.
	Počkáte si na spätnú väzbu od hodnotiteľa.

Tabuľka 2: Postup pri tvorbe úlohy na portáli MathCityMap

Portál MathCityMap umožňuje vytvoriť prechádzku (trasu) z jednotlivých vybraných úloh o reálnych objektoch v danom reálnom prostredí pomerne jednoducho a intuitívne. Prechádzka môže byť zverejnená iba po schválení každej úlohy danej prechádzky. Pri prechádzkach [MCM@home] (realizované on-line) je postup tvorby úloh a prechádzok identický. Autor vždy musí daný objekt fyzicky navštíviť.

Projekt MoMaTrE

Podporou portálu MathCityMap je web stránka projektu MoMaTrE (Matematické prechádzky s mobilom po Európe). Na obrázku 5 je vyznačený link, kde sa nachádzajú základné MCM úlohy v slovenskej verzií s detailným návodom, ako danú úlohu na portáli vytvoriť.



Obrázok 5: Web stránka projektu MoMaTrE so základnými úlohami o reálnych objektoch pre MCM prechádzky

Záver

Matematické prechádzky riešené pomocou aplikácie MCM majú u žiakov veľký úspech. Aplikácia spĺňa všetky kritériá modernej digitálnej personalizovanej komunikácie s užívateľom. Výber reálnych objektov v okolí školy alebo v meste, mieste, kde sa škola nachádza otvára žiakom nový pohľad na známu realitu. Každá úloha ukazuje užitočnosť a dôležitosť matematických vedomostí. Matematická prechádzka môže byť zaujímavým spestrením vyučovania matematiky i v čase dištančnej formy vzdelávania. Pocit pri riešení úloh o známych objektoch, podporený digitálnymi technológiami, má silný pozitívny emocionálny náboj nielen pre riešiteľa ale i pre tvorcu či hodnotiteľa jednotlivých úloh.

Literatúra

[1] www.mathcitymap.eu

[2] https://www.youtube.com/watch?v=A8wq_LJJ4Gg

[3] https://mathcitymap.eu/sk/video-riesenie-matematickych-uloh-o-realnych-objektoch-v-terene/

[4] https://www.ukf.sk/verejnost/aktuality/udalosti/3937-vyberte-sa-na-matematicke-prechadzky?highlight=WyJcdTAxMGRlcmV0a292XHUwMGUxIl0=

doc. PaedDr. Soňa Čeretková, PhD.
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
SK – 949 74 Nitra
e-mail: sceretkova@ukf.sk

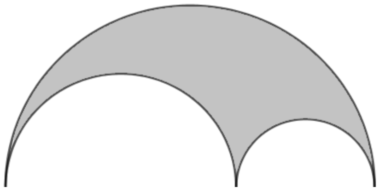
INŠPIRATÍVNY ARBELOS

ČERŇANOVÁ VIERA

ABSTRAKT. *Predložený príspevok prináša niekoľko podnetov pre tvorivú činnosť žiakov a študentov prostredníctvom arbelosu. Tento takmer zabudnutý rovinný útvar bol popri trojuholníku a ďalších pravidelných i nepravidelných n-uholníkoch, kružnici a iných kužeľosečkách objektom skúmania starogréckych matematikov.*

Poznal ho už Archimedes

Arbelos bol známy už starogréckym matematikom. Je to rovinný útvar ohraničený tromi polkružnicami, z ktorých každé dve sa dotýkajú v jednom bode. Pritom ich stredy ležia na tej istej priamke a polkružnice sú umiestnené v tej istej polrovine vzhľadom na túto priamku.



Obrázok 1

Arbelos upadol na mnoho storočí do zabudnutia, aby zažil svoje znovuobjavenie v posledných 100-200 rokoch, najmä však počas posledných desaťročí. Nárastu jeho popularity prispieva v značnej miere aj rozvoj zobrazovacích a výpočtových softvérov. V súčasnosti je k dispozícii stále viac článkov a internetových zdrojov (zväčša v angličtine), ktoré sú venované arbelosu, napr. [1], [2]. Tento útvar má obdivuhodne veľa fascinujúcich vlastností - dalo by sa povedať „nesčíselné množstvo“, keďže nadšenci objavujú stále nové a nové. Niektoré z nich je možné objaviť alebo preskúmať pomerne jednoducho, so základnými vedomosťami z geometrie. Viaceré vlastnosti arbelosu prenikajú do aritmetiky, čím umožňujú riešenie niektorých aritmetických úloh pomocou grafického znázornenia. Práve preto, ako i vďaka svojmu pôvabnému vzhľadu, je arbelos vhodný pre podporu tvorivého vyučovania.

Každá sekcia tohto príspevku je venovaná niektorej vlastnosti arbelosu, prípadne vlastnosti, ktorú je možné dať do súvislosti s arbelosom. Úlohy pre žiakov (číslované položky) sú podnetmi pre heuristické vyučovanie. Sú vhodné pre prezenčné vzdelávanie, s určitými úpravami i pre dištančné, resp. pre zmiešaný spôsob.

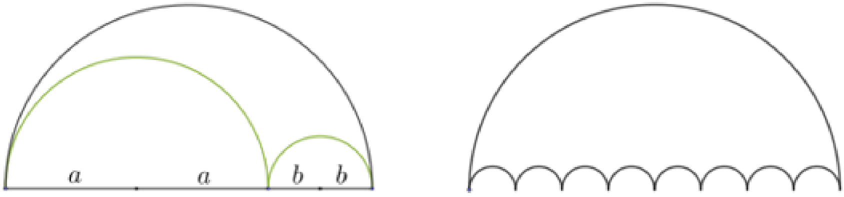
Obvod

Obvod arbelosu je súčtom dĺžok našich troch polkružníc. Označme polomery menších polkružníc a, b. Tieto polkružnice budeme volať *vnútorné,* ich polomery nazveme *vnútorné polomery* arbelosu. Polomer veľkej polkružnice je $(a+b)$, jej dĺžka je $\pi(a+b)$. Túto polkružnicu nazveme *vonkajšia*. Súčet dĺžok vnútorných polkružníc je $\pi a + \pi b$, čo je toľko isto ako dĺžka vonkajšej polkružnice.

1. Vypočítajte obvod arbelosu s vnútornými polomermi a, b.
2. Porovnajte obvod arbelosu a obvod kruhu s polomerom $(a+b)$.

Na začiatku objavovania vlastností arbelosu v triede odporúčam zvoliť konkrétne hodnoty, napr. $a = 2,\ b = 6$. Pre žiakov, najmä pre mladších, bude veľkým objavom, keď zistia, že súčet dĺžok polkružníc s polomermi 2 a 6 je taký istý ako dĺžka polkružnice s polomerom 8. Ďalším veľkým objavom bude zistenie, že taký istý výsledok vyjde pre vnútorné polomery 5 a 3, prípadne 4 a 4 či iné, ktoré spolu takisto dávajú 8.

3. Ako ovplyvnia hodnoty a, b výsledný obvod arbelosu, ak zachováme priemer vonkajšej polkružnice, čiže ak je súčet $2a + 2b$ konštantný?



Obrázok 2

U stredoškolákov je možné využiť arbelos ako vhodnú propedeutiku pre limity a súčet nekonečného radu. Poďme na to takto: Vytvorme menší arbelos pod jednou z vnútorných polkružníc – napríklad pod tou s polomerom a. Súčet dĺžok týchto nových vnútorných polkružníc bude πa. Predstavme si teraz, že polkružnicu s polomerom a zmažeme, zostanú len tie dve menšie „pod ňou" a polkružnica s polomerom b. Takže budeme mať spolu tri polkružnice, ktorých priemery majú v súčte $2a + 2b$ ... a ich dĺžky opäť dávajú presne toľko, koľko je dĺžka najväčšej polkružnice. Podobne by sme mohli znova a znova rozdeliť hociktorý z priemerov už existujúcej vnútornej polkružnice, a túto polkružnicu nahradiť dvoma menšími, ako keby sme vytvárali nový arbelos.

Aby sme si zjednodušili výpočet, rozdeľme priemer vonkajšej polkružnice na niekoľko (n) rovnakých dielikov. Obrázok 2 vpravo ich má deväť. Súčet dĺžok malých polkružníc bude vo všeobecnosti $n \cdot \pi \cdot \frac{a+b}{n}$, čiže opäť $\pi(a + b)$.

Obsah

Tentokrát budeme hovoriť o polkruhoch. Obsah arbelosu dostaneme, ak od obsahu najväčšieho polkruhu odpočítame obsahy dvoch menších, teda $\frac{\pi}{2}(a + b)^2 - \frac{\pi}{2}a^2 - \frac{\pi}{2}b^2$.

4. Nájdite vzorec pre obsah arbelosu s vnútornými polomermi a, b.
5. Nájdite arbelos, ktorého obsah je taký istý ako súčet obsahov malých polkruhov.
6. Nájdite arbelos, ktorého obsah nie je taký istý ako súčet obsahov malých polkruhov. Môže byť väčší? Môže byť menší?
7. Pri pevne danom $a + b$ (napr. $a + b = 6$) rozhodnite, ktorých arbelosov z otázok 5. a 6. existuje viac.

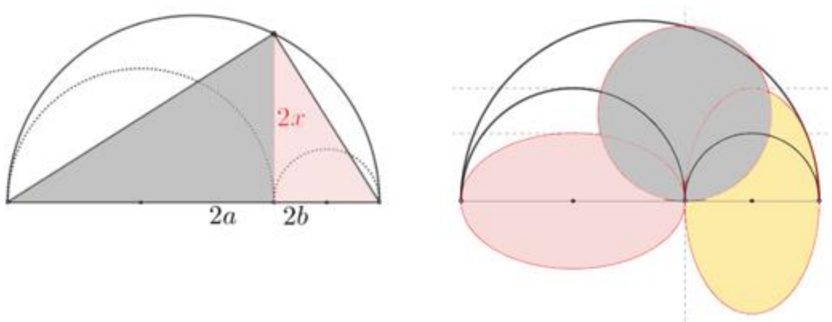
Kružnica a elipsa

Vráťme sa k obsahu arbelosu, ktorý je $S = \pi ab$. Ak platí $a = b$, tak $S = \pi a^2$, čo je obsah kruhu s polomerom a. Nechajme sa inšpirovať a skúsme nájsť kruh, ktorý má taký istý obsah ako všeobecný arbelos, čiže πab. Takýto kruh má polomer $\sqrt{ab}$.

8. V arbelose s vnútornými polomermi a, b nájdite úsečku dĺžky $\sqrt{ab}$.

9. V arbelose s vnútornými polomermi a, b nakreslite kružnicu s polomerom $\sqrt{ab}$, pričom koncové body jedného jej priemeru sú: spoločný bod malých polkružníc a nejaký bod na vonkajšej polkružnici arbelosu.

Úlohy 8 a 9 patria k tým ťažším, poďme ich vyriešiť. Použijeme Talesovu kružnicu. Do vonkajšej polkružnice vpíšeme pravouhlý trojuholník ako na Obrázok 3 vľavo: spoločný bod vnútorných polkružníc je pätou kolmice spustenej z vrcholu pri pravom uhle. Táto kolmica (výška) rozdelí trojuholník na dva trojuholníky, ktoré sú s ním podobné, a teda sú podobné aj navzájom. Teraz použijeme podobnosť trojuholníkov alebo Euklidovu vetu o výške. Ak sme ešte Euklidovu vetu nepreberali, táto aktivita s arbelosom je vhodnou motiváciou. Dostaneme $\frac{2a}{2x} = \frac{2x}{2b}$, odtiaľ $x^2 = ab$ a napokon $x = \sqrt{ab}$. Uvedená výška má teda dĺžku $2\sqrt{ab}$, preto je priemerom hľadanej kružnice. Túto peknú vlastnosť arbelosu nájdeme ako Lemu 4 v slávnej *Knihe liem* [3], ktorej autorstvo sa pripisuje Archimedovi.



Obrázok 3

Nasledujúca aktivita 10 sa vymyká z aktuálneho curricula pre stredné školy. Nič nám však nebráni prezradiť študentom, čo je to elipsa, a že πab je obsah elipsy s polosami a, b. Potom už bude v ich silách nájsť v arbelose takúto elipsu.

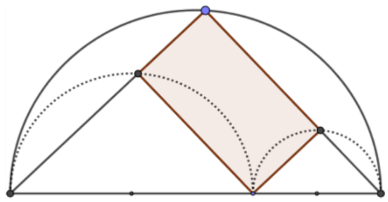
10. K arbelosu s polomermi vnútorných polkružníc a, b nakreslite elipsu s takým istým obsahom, ako má arbelos.

Obrázok 3 vpravo zobrazuje arbelos, kruh a dve elipsy. Každý z týchto štyroch útvarov má rovnaký obsah.

Vpísané obdĺžniky

Nasleduje ďalšia pekná vlastnosť arbelosu, ktorú je možné preskúmať na hodinách matematiky.

11. Dokážte, že každá úsečka, ktorá spája niektorý bod na vonkajšej polkružnici (okrem dvoch krajných bodov) so spoločným bodom vnútorných polkružníc, je uhlopriečkou obdĺžnika, ktorého zvyšné dva vrcholy ležia na vnútorných polkružniciach arbelosu.



Obrázok 4

Dôkaz pomocou troch Talesových kružníc uvádzame ako dôkaz bez slov (Obrázok 4).

Pri tejto príležitosti môžeme rozšíriť poznatky žiakov: Tvrdenie „Ak má štvoruholník tri pravé uhly, tak aj štvrtý uhol je pravý“ platí v Euklidovskej geometrii. Existujú však iné geometrie, v ktorých toto tvrdenie neplatí.

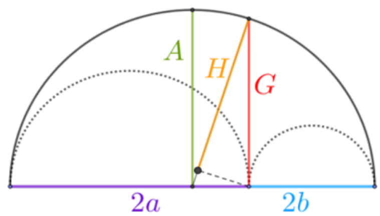
Priemery dvoch kladných čísel

Bola by škoda nevyužiť ďalšiu pôsobivú vlastnosť arbelosu: aritmetický a geometrický priemer čísel $2a$ a $2b$ sa v ňom dajú veľmi jednoducho znázorniť. V predchádzajúcich aktivitách sme sa s nimi už stretli, no neupozornili sme na to.

Aritmetický priemer je $A = (2a + 2b)/2 = a + b$. Toto je polomer vonkajšej kružnice.

Geometrický priemer je $G = \sqrt{2a \cdot 2b} = 2\sqrt{ab}$. Stretli sme sa ním v aktivitách 8 a 9. Je to priemer kružnice, ktorá má taký istý obsah ako arbelos.

Ako bonus prikreslíme do arbelosu harmonický priemer. Medzi priemermi je v školskej matematike pomerne zaznávaný, čo je skutočne škoda. Vyskytuje sa okolo nás častejšie, než si uvedomujeme. Harmonický priemer čísel $2a, 2b$ je $H = \frac{2}{\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}}$.



Obrázok 5

12. Overte, že aritmetický, geometrický a harmonický priemer dvoch kladných čísel sú zviazané vzťahom $A \cdot H = G \cdot G.$
13. V arbelose s vnútornými polomermi a, b znázornite úsečky s dĺžkami $A, G, H,$ ktoré sú aritmetickým, geometrickým a harmonickým priemerom čísel $2a, 2b$.
14. Pomocou arbelosu graficky dokážte, že $A \geq G \geq H$ platí pre priemery ľubovoľných dvoch kladných čísel. Platí niekedy rovnosť?

Poďakovanie

Tento príspevok vznikol v rámci projektu KEGA 001UMB-4/2020 Implementácia blended learningu do prípravy budúcich učiteľov matematiky a informatiky.

Literatúra

[1] Boas, H. P.: *Reflections on the Arbelos*, Amer. Math. Monthly 113(3), 236-249, 2003, https://doi.org/10.1080/00029890.2006.11920301

[2] Bogomolny, A.: Arbelos - the Shoemaker's Knife, 1996-2018, https://www.cut-the-knot.org/proofs/arbelos.shtml

[3] Archimedes (?): *Liber Assumptorum,* dostupné (v angličtine) na stmarys-ca.edu/sites/default/files/attachments/files/Book_of_Lemmas.pdf

RNDr. Viera Čerňanová, PhD.
Katedra matematiky a informatiky
Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity
Priemyselná 4
SK – 918 43 Trnava
e-mail: vieracernanova@hotmail.com

MATEMATIKA VO VIDEOHRÁCH A ŠKOLSKÁ MATEMATIKA – AKO TO VNÍMAJÚ STREDOŠKOLÁCI

ČUJDÍKOVÁ MÁRIA

ABSTRAKT. *Môj príspevok bol malou sondou do duše stredoškolákov. Ako tí z nich, ktorí hrajú videohry vnímajú, že sa pri nich stretávajú s matematikou? Čo presnejšie ako matematiku vo videohrách identifikujú a aký majú k takejto matematike postoj? A ako vnímajú matematiku v hrách v porovnaní so školskou matematikou?*

Vo svojom dizertačnom výskume vychádzam zo slov Paperta [4,5] a Gee [2,3], že videohry nás môžu veľa naučiť o učení sa. Verím, že tento druh voľnočasovej aktivity nás môžu veľa naučiť aj o učení sa matematiky a o tom, ako matematiku vnímajú žiaci strednej školy. V rámci príspevku som prezentovala zistenia, ku ktorým som prišla pri skúmaní, čo žiaci vnímajú ako matematiku pri videohrách, ktoré hrajú a ako vnímajú túto matematiku v porovnaní s matematikou v škole. Podrobnejšie si o tom môžete prečítať v [1].

Literatúra

[1] Čujdíková, M.: *Videohry, matematika a strata času.* In PhD existence 10: "Člověk a čas": 1. vyd., Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2020, ISBN 978-80-244-5731-4, s. 270-279. Dostupné na https://psych.upol.cz/fileadmin/userdata/FF/katedry/pch/verejnosti/konference/PhdExistence2020.pdf

[2] Gee, J. P.: *What videogames have to teach us about learning and literacy.* New York: Palgrave Macmillan, 2003, ISBN 1-4039-6538-2

[3] Gee, J. P.: *Good video games and good learning,* Madison: University of Wisconsin, 2007, ISBN 978-1-4331-5023-4

[4] Papert, S.: *The Parent Trap.* In Time Magazine. New York, 1995, Dostupné na http://papert.org/articles/parent_trap.html

[5] Papert, S.: *Does Easy Do It? Children, Games, and Learning.* In Game Developer, 1998. Dostupné na http://www.papert.org/articles/Doeseasydoit.html

Mgr. Mária Čujdíková
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
SK – 842 48Bratislava
e-mail: cujdikova1@uniba.sk

AKO VYTVORIŤ HRU NA VYUČOVANIE

DILLINGEROVÁ MONIKA

ABSTRAKT. *V článku prechádzame cez detskú hru, spoločenskú hru k didaktickej hre. Pozrieme sa na jednoduché herné princípy v spoločenských hrách a pokúsime sa pomocou nich vytvoriť fungujúcu hru na vyučovanie.*

Hra

Ak sa pozrieme na vývoj dieťaťa, zisťujeme, že sa od narodenia niečo učí. Prvé prejavy naučeného sú skôr fyzického charakteru: „Pozri ako vie držať hlavičku, ako pekne papá z lyžičky, ako chytí hračku, vie sa posadiť, vie sa postaviť, lezie, chodí, ...“ To sú tie, ktoré vedome hodnotíme pred inými. Prichádza i k rozvoju rozumových schopností – dieťa rozpoznáva obrazy vône, zvuky (vie, kto sa označuje slovom mama, tata...). Napokon začína všetky tieto jemu prístupné vnemy napodobňovať. Nerobí to preto, že ho to niekto učí. Robí to preto, že to považuje za zábavu a pre seba dôležité.

Práve ten pocit, že je preň niečo dôležité je tým najlepším hnacím motorom v učení. Odborne ho nazývame vnútornou motiváciou. Okrem vnútornej motivácie poznáme ešte vonkajšiu motiváciu. Napríklad keď si rodič vezme do rúk knižku s obrázkami zvierat a pýta sa: Čo je to za zvieratko? A ako robí mačička?

Napodobňovanie mačičky nie je vnútornou potrebou dieťaťa, ale dieťa je motivované svojim kladným vzťahom k rodičovi. Rodičova reakcia (pochvala a pod.) tvorí vonkajšiu motiváciu činnosti dieťaťa.

Činnosť opakovania mňaučania je pre dieťa hrou. Má svoje pravidlá. Buď je podnetom pre zamňaukanie obrázok mačky, rodičova otázka, alebo mačka na ulici... Dieťa zisťuje, že ak na správny podnet zamňauká, rodič s ním príjemne komunikuje. Neskôr začína dieťa vymýšľať svoje pravidlá. Zamňauká bez podnetu a čaká na reakciu. Opäť sme v hre, kde sa z pôvodného dôsledku stáva podnet. Obvykle rodič reaguje hľadaním mačky v dohľade dieťaťa, prípadne komentárom, že tu žiadna mačička nie je a pod.

Ak by sme mali tieto hry charakterizovať, začína sa napodobňovaním. Rodič ukazuje mačičku, mňaučí a snaží sa, aby to dieťa zopakovalo. Dieťa sa snaží rozpoznať vzorový príklad (rodič ukázal mačičku v knižke, povedal mačička a zamňaukal) a tvorí analógiu s predkladaným zadaním (obrázok mačky, slovo mačička, mačka na dvore).

Keď dieťa zvládne napodobňovanie, prechádza sa k selekcii – rodič ukazuje rôzne zvieratká a čaká, ktoré dieťa správne určí. Dieťa pritom nemusí vedieť povedať meno zvieraťa, stačí ak u mačky zamňauká, u psa zahavká a pod. Počet vzorových príkladov sa zväčšil a dieťa musí hľadať v pamäti, ktorý to je teraz. Samotné poznatky sa kryštalizujú a dieťa jasne rozozná mačku od psa, hoci ho nikto neučil znaky mačky, či znaky psa. Nikto mu zatiaľ nehovoril o tvare lebky, chrupe, zaťahovacích pazúroch, charakterových vlastnostiach, schopnostiach reagovať na povely a pod.

U dieťaťa samotného postupne dochádza k automatizácii. Na z pohľadu rodiča správny podnet dáva okamžite a neomylne vždy správnu reakciu.

V poslednej fáze ide o kontrolu vedomostí, ktorú spúšťa dieťa samo. Uisťuje sa, že mňaukanie je to, čo charakterizuje mačku, a reakcia rodiča je predpokladaného typu.

V škole je dôležité kopírovať tento prirodzený postup učenia sa. Do kopírovania patrí tvorba klímy, dostatočné opakovanie vzorového príkladu, postupné zvyšovanie náročnosti, automatizácia vedomostí i overovanie a kontrola. Skĺbiť uvedené činnosti môže hra.

Pre deti aj dospelých existuje komerčná spoločenská hra. Zvyčajne ju kúpime, samostatne naštudujeme pravidlá, vysvetlíme budúcim spoluhráčom a môžeme hrať. V mnohých spoločenských hrách je akýsi vzdelávací potenciál. No vzdelávanie nie je cieľom. Ani to tak nechápeme a nevnímame. Podstatou týchto hier je, že nás bavia a chceme ich hrať sami od seba. Teda máme veľkú vnútornú motiváciu.

Ďalším typom hier sú didaktické hry. Didaktická hra je aktívna práca všetkých žiakov v triede, ktorej zámerom je naplnenie edukačných cieľov vyučovania v pre žiakov motivačnom a pozitívne pôsobiacom prostredí[7].

Pre žiakov do školy teda budeme chcieť vytvoriť didaktickú hru. Iniciatíva Spiel fördert Schule [8] z Nemecka robila v rokoch 2003-2004 veľký výskum s hrami na školách. V školských družinách boli zriadené „knižnice“ s hrami. Žiaci ich mohli hrať priamo v družine, požičiavať si ich domov a súčasťou knižníc boli aj hry, ktoré využívali učitelia počas vyučovania. Z ich záverov vyplynulo 7 dobrých dôvodov pre hry v školách či rodine:

Hranie hier:

1. podporuje rozvoj inteligencie,
2. napomáha rozvoju osobnosti,
3. podporuje rozvoj sociálnych vzťahov,
4. rozvíja motorické schopnosti,
5. podporuje schopnosť koncentrácie,
6. napomáha rozvíjať reč,
7. podporuje rozvoj kreativity.

Nesporným bonusom pri hraní hier je veľká zábava.

Atribúty hry

Ak sa chystáte vytvoriť pre žiakov hru na vyučovanie, sú pre vás dôležité nasledujúce atribúty:

- Cieľ hrania – rozvoj kompetencií
- Forma hrania hry
- Víťazná stratégia
- Medzipredmetové vzťahy
- Časová náročnosť
- Herný materiál
- Téma

CIEĽ HRANIA

Pri tvorbe hry si musíme uvedomovať, ktoré kompetencie budeme rozvíjať. Teda samotnú hru musíme stavať tak, aby žiaci žiadané kompetencie naozaj svojou hernou činnosťou rozvíjali. Nielen kompetencie sú však pre nás dôležité. Niekedy ide v hre o precvičenie poznatkov (algopreteky), zautomatizovanie pojmov (doplňovačky a krížovky), propedeutiku nových pojmov a poznatkov...

---

[7] http://comae.sk/Hry/co_je_to_didakticka_hra.html

[8] Hra podporuje školu http://www.fachgruppe-spiel.de/Broschuere_neutral_.pdf

FORMA HRANIA HRY

Do foriem patrí v prvom rade, či ide o hru jednotlivcov alebo skupín, či dokonca kooperatívnu hru. Ako najznámejšia matematická hra jednotlivcov sa javí známy Algopretek[9].

Okrem neho môžete tvoriť rôzne iné rýchle zadania príkladov, v ktorých jednotlivec nie je priamo sankcionovaný za nevyriešené úlohy. Musí však existovať odmena. Či už to dáte ako výstup na Mt. Everest, alebo preplávanie kanála La Manche, je na vás. Pri výstupe, viete jasne zdôvodniť, že ten, kto dosiahol nejaký vyšší tábor (prepočítal sa do výšky), má redší vzduch, a teda zložitejšie úlohy. Cieľom všetkých je zdolať horu. Niekto ju zdolá rýchlejšie, niekto pomalšie. Po konečnom počte pokusov však každý získa odmenu vo forme známky odpovedajúcej najvyššiemu bodu, kam sa dostal. Pritom každý prepočítal (alebo sa o to aspoň pokúsil) rovnaké množstvo príkladov, len išlo o rôzne úrovne.

Ak chcete hrať hru v skupinách, môžete skúsiť za tému zvoliť futbal, hádzanú a pod. Každý hráč tímu má na svojom drese číslo. V osudí sú príklady, ktorých výsledky sú opäť tieto čísla. Na začiatku rozhodca vyberie z osudia príklad - loptu. Obe skupiny ho počítajú a tá skupina, ktorá ho ako prvá vypočítala, získava loptu. Vyťahuje ďalší príklad ktorí počítajú v oboch tímoch hráči s číslom z výsledku predošlého príkladu. Ak niektorá skupina trikrát po sebe získala loptu, znamená to, že útok bol úspešný a žiaci dali gól. Hráči, ktorí majú počítať, sú vždy pri tabuli a okrem nich počíta aj tím. Keby totiž obaja vypočítali príklad nesprávne, získa loptu ten tím, ktorý bude mať viac správnych výpočtov... Týmto spôsobom sú zapojení všetci. A na každom jednotlivcovi záleží.

Na hodine sa dajú hrať aj turnaje v ktorých hrajú dvaja proti sebe. Dohrať takýto turnaj na jednej hodine býva časovo a organizačne veľmi náročné. Preto sa volí tzv. vypadávací systém. Vypadávanie má za dôsledok, že niektorí žiaci „nemajú čo robiť".

Ďalším aspektom v rámci tvorby mechanizmov je forma využitia poznatkov, forma ťahu hráča. Veľa ovplyvňuje náhoda. Chceme ju v hre, či skôr nie? Ako sa s náhodou vysporiadame? Máme možnosť na ňu reagovať?

VÍŤAZNÁ STRATÉGIA

Poznáme mnohé hry, v ktorých je víťazná stratégia známa (NIM[10], Zed-ká a pod). Žiakom ju neprezradíme ale snažíme sa, aby si ju všimli, aby ju objavili sami. Ak vo vzájomných partiách nevedia stratégiu odhaliť, niekedy stačí zopár verejných partií učiteľ verzus najúspešnejší hráč spomedzi žiakov.

Používanie hier s víťaznou stratégiou motivuje žiakov rozmýšľať o ťahoch dopredu a tvoriť si prehľad o budúcich možných ťahoch.

Hry, ktoré nemajú víťaznú stratégiu, ponúkajú viac možností aj pre slabších žiakov. Napriek tomu vzhľadom na cieľ hrania môže ísť o plnohodnotnú didaktickú hru. Takými sú napríklad rôzne doplňovačky a krížovky. Nie je dôležité, ktoré slovo sa doplní ako prvé. Dokonca niekedy nie je nutné doplniť všetky slová a i tak žiak riešenie objaví.

MEDZIPREDMETOVÉ VZŤAHY

Niekedy je jednoduchšie spraviť didaktickú hru (napr. kvíz), ktorá preberá poznatky viacerých predmetov. Jednotliví žiaci majú potom viac možností dôjdenia k cieľu. Ak sa im nedarí v matematickej časti, môžu skúšať cez prírodopis, dejepis, jazyk...

ČASOVÁ NÁROČNOSŤ

Odhad časovej náročnosti je najzložitejší. Niekoľko rád je však potrebných:

[9] Totkovičová, 2003

[10] http://en.wikipedia.org/wiki/Nim

- Nezabúdajte na čas na pravidlá.
- Čas potrebujete aj na vyhodnotenie a zapisovanie výsledkov.
- Čas na pravidlá má byť zlomkom herného času.
- Pri prvom hraní si nechajte rezervu na riešenie prípadných nejasností.

HERNÝ MATERIÁL

Herný materiál je ďalším z atribútov, ktoré musí mať tvorca hry na zreteli. Je dôležitý, lebo si musíme uvedomiť, že pre celú triedu budeme potrebovať niekoľko takých hier. Teda náklady na jednu hru násobíme počtom hier, ktoré na vyučovanie potrebujeme. Zvyčajne do materiálu nepočítame písacie potreby, tie môžu žiaci použiť vlastné. Tak isto nebudeme započítavať bločky na zápis priebehu hry alebo víťazných bodov hráčov. Ostalo nám teda na zváženie: kocky, karty, panáčikovia, herný plán, prípadne nejaké suroviny (reprezentované fyzickými modelmi).

Ak zvolíme karty, môžeme tvoriť vlastné, alebo recyklovať tie najznámejšie – teda sedmové alebo žolíkové karty. Pri vlastných kartách z tvrdého papiera potom musíme počítať s ich krátkou životnosťou. Na druhú stranu dobre vytvorené hry majú v sebe silný náboj a žiaci si môžu chcieť vytvoriť vlastné karty.

V prípade kociek nás môže odrádzať hlučnosť pri hádzaní. Keď si predstavíme do triedy 8 sád po 4 kockách a že by ich žiaci naraz hodili – nechali dopadnúť na lavicu... Zjavne budeme musieť riešiť zmäkčenie priestoru na hádzanie. Kocky nám však poskytujú veľa možností práce s náhodou.

Herný plán je najzložitejší na prípravu. Táto záležitosť už naozaj chce dobrú grafiku. Treba rozmýšľať, čo sa bude na pláne diať, aký doplnkový materiál teda potrebujeme. Herný plán dáva zvyčajne dobrý prehľad o stave hry a hráčovi, ktorý je blízko k víťazstvu.

Okrem už spomenutých výhod a nevýhod má herný materiál aj ďalšie – početnosť materiálu a s ním spojenú časovú náročnosť na rozbalenie a zbalenie hry, prípadne triedenie tohto materiálu.

TÉMA

Existujú hry, ktoré nemajú tému. Nazývane ich abstraktné. Keď sa však opýtate škôlkara ako sa hrali, odpovie témou: na otecka a mamičku, na staviteľa, stavali sme dom, piekli sme koláče, na naháňačku. Pre hru je téma dôležitá. Vhodne zvolená téma je pre žiaka predstaviteľná a hra mu dáva zmysel. Môžeme hru zasadiť do sveta rytierov a princezien, u starších možno zabodujú speváci a speváčky. Malí prírodovedci možno ocenia tému zo života hmyzu...

Matematická hra

Matematická hra sa vyznačuje tým, že je splnené aspoň jedno z nasledujúcich kritérií:

- pravidlá obsahujú isté matematické pojmy
- na vykonávanie predpísaných ťahov sú potrebné isté matematické znalosti
- kombinačné a najmä kauzálne úvahy umožňujú takú analýzu hry, z ktorej vyplýva pre niektorého z hráčov optimálna stratégia alebo aspoň čiastočný návod na výhru

Okrem toho si musíme uvedomiť, aký má hra didaktický cieľ. Môže ísť o fixovanie nového pojmu. Vtedy by sme mohli voliť hru v ktorej je potrebné hľadať tento pojem, prípadne pri geometrických pojmoch vyberať objekt ktorý má dané vlastnosti a pod. Môže ísť o aplikáciu metódy. To znamená, že budeme od hráča chcieť aby v rámci hry použil danú metódu viacnásobne. Ak sa učíme násobenie celých čísel, bude teda potrebné násobiť a podľa hodnoty výsledku sa napríklad vyhodnotí, alebo spustí ďalšia akcia hráča. Tieto hry počítajú s tým, že sme pojem zaviedli a metódu vopred vysvetlili. Našim záujmom môže byť aj hra, ktorú použijeme v rámci propedeutiky alebo počas výkladu na ilustráciu metódy alebo pojmu. Často sa stretávame s hrami, ktoré trénujú priestorovú predstavivosť. V neposlednom rade úvahy o stratégiách niektorých (aj nematematických) hier majú svoj matematický obsah. Sú vhodné napríklad na ilustrovanie metódy nekonštruktívneho dôkazu, alebo dôkazu sporom.

S ohľadom na vyššie uvedené by sme mohli uviesť niektoré spoločenské hry a ich matematický obsah:

- HeckMeck z žížalek - práca s náhodou, sčítanie, propedeutika násobilky
- Mini Hazard - kladné a záporné čísla, maximum, minimum konečnej množiny
- Take it easy - pravdepodobnosť, sčítanie, propedeutika násobilky, maximalizácia súčtu
- Ubongo - planimetria, útvary, orientácia, obsah; vo verzii 3D aj priestorová predstavivosť, stavby z kociek
- Blokus - planimetria, útvary, orientácia, obsah
- Set - kombinatorika, množiny, spoločná vlastnosť, odlišná vlastnosť
- Únik z blázninca - hlavolamy matematické aj nematematické
- Monopoly - Počítanie percent, úrokov a pod.

Tvorba hry

Ak už uvažujeme nad tvorbou hry, môžeme sa inšpirovať hernými mechanizmami existujúcich hier. Z množstva mechanizmov, opísaných na stránkach[11] venovaných hrám, uvádzame iba niektoré:

- Dedukcia
- Aukcia
- Postreh
- Hádzanie kockami
- Nasadzovanie panáčikov
- Komunikácia / vyjednávanie
- Hranie / predvádzanie
- Kontrola územia
- Pamäť
- Vytváranie vzorov / geometria a stereometria
- Simulácia
- Rozprávanie
- Kooperácia
- Štichy / zdvihy
- Pohyb a 3D pohyb
- Vykladanie kariet
- Splnenie víťaznej podmienky
- ...

V rámci workshopu sme si vybrali kartovú hru a z mechanizmov posledné dva uvedené. Pre jednu skupinu hráčov budeme potrebovať 1 balíček žolíkových kariet. Vyberieme iba číselné karty a esá. Máme teda 4 sady čísel od 1 do 10 a tieto tvoria herný balíček. Okrem toho pridáme matematický obsah vytvorením kartičiek s víťaznou podmienkou. Na víťaznú podmienku nám stačí rozstrihať jeden výkres na 16 kartičiek.

Ako ďalší krok sme uviedli rámcové pravidlá:

---

[11] https://boardgamegeek.com/browse/boardgamemechanic

- Hráči dostanú na začiatku hry *n* kariet do ruky, zvyšné tvoria doberací balíček.
- Naše špeciálne kartičky budú obsahovať matematický cieľ. V prípade hry na percentá by na nich mohol byť základ a počet percent.
- Hráč vo svojom ťahu umiestni doprostred stola niekoľko – *p* kariet z ruky.
- Všetci hráči si skontrolujú cieľ.
- Ak má niektorý hráč splnený cieľ, uloží karty zo stredu na odhadzovací balíček a pred seba položí cieľovú/é kartičky.
- Hráč na ťahu si doberie karty na ruku, aby ich zase mal *n*.
- Ak je doberací balíček prázdny, zamieša sa odhadzovací balíček. Ten tvorí nový doberací balíček.

Ak bol cieľ splnený, doplní sa nový.

Hra končí jednou z dvoch možností:

- už sa nedá doplniť cieľ,
- hráč si nemôže dobrať karty, lebo doberací aj odhadzovací balíček je prázdny.

Otázky

Následne bolo nutné hru došpecifikovať. Dohodli sme si, že budeme robiť špecifikáciu pre hru s percentami. Vytvorili sme sadu otázok, ktoré mali hru vyjasniť a účastníci workshopu na ne odpovedali. Otázky sú zároveň vodítko, čo sa môže meniť, ak vymyslená hra pri realizácii ukáže nejaké úskalia. Tomuto procesu hovoríme dolaďovanie hry a často trvá dlhšie než samotné vymyslenie rámca hry ako ho vidíte v pravidlách vyššie. V zátvorke za otázkou sú nami počas worshopu zvolené odpovede.

1. Koľko kariet má hráč na ruke? (3)
2. Koľko kariet položí v jednom ťahu? (2)
3. Na koľko kôpok sa kladú karty do stredu? (2)
4. Ako sa vyhodnocujú karty v strede? (každá kôpka zvlášť)
5. Ak hráč položí viac ako jednu kartu, vyhodnocuje sa po každej, alebo až po druhej? (po každej)
6. Je základ aj percento uvedené na jednej špeciálnej kartičke, alebo sú to dve nezávislé kartičky? (dve nezávislé)
7. Je cieľ spoločný a teda ide o rýchlosť, alebo sú ciele individuálne? (spoločný cieľ – rýchlosť – lepšia kontrola)
8. Ak sú kartičky nezávislé, je základ pre dané kolo spoločný a percento individuálne – skryté? (všetko spoločné)
9. Koľko je 27% zo 60? Budeme zaokrúhľovať? (áno, zaokrúhľovať)
10. Čím končí hra? (obe možnosti z pravidiel)
11. Kto je víťazom? (Kto má najviac splnených cieľov, vyhral.)

Nakoniec sme tvorili dvojice základ a počet percent. Tu bolo nutné si uvedomiť, aké hodnoty môžu vznikať na kôpkach. Túto časť však už prenecháme čitateľom.

Záver

Počas workshopu bola vytvorená jedna hra, spomenuli sme aj počítanie s celými číslami, či pravdepodobnosť. Pre obe témy sme načrtli ako by sa dalo postupovať, ako vyhodnocovať kôpky. Ďalšie doladenie hier bolo ponechané na účastníkov workshopu.

Poďakovanie

Príspevok bol napísaný s podporou grantu KEGA: 014UK-4/2020 Podpora vzdelávania učiteľov matematiky na základných a stredných školách prostredníctvom zdieľania inovačných materiálov, foriem a metód vyučovania.

Literatúra

[1] http://comae.sk/Hry/co_je_to_didakticka_hra.html, online, cit. 28.10.2020

[2] http://www.fachgruppe-spiel.de/Broschuere_neutral_.pdf, online, cit. 28.4.2007

[3] Totkovičová, M. 2003. Algopreteky 1. vyd. Bratislava : Metodicko-pedagogické centrum mesta Bratislavy, 2003. 40 s. ISBN 80-7164-362-9.

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Nim, online, cit 1.10.2020

[5] https://boardgamegeek.com/browse/boardgamemechanic, online, cit 1.10.2020

RNDr. Monika Dillingerová, PhD.
Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: dillingerova@fmph.uniba.sk

HODINA 3D GEOMETRIE S TABLETMI

DJUBAŠÁKOVÁ BARBORA

ABSTRAKT. *V krátkom príspevku sa dozviete ako použiť Mobile Learning a teda tablety na vyučovaní matematiky. Predstavíme Vám model kompletnej vyučovacej hodiny na tému "Stavby z kociek, nárys, pôdorys a bokorys". Dozviete sa ako a kedy použiť tablet s vhodnou aplikáciou, aj to aké môžu nastať problémy počas vyučovacej hodiny.*

Na úvod

V rámci dizertačnej práce som sa zaoberala efektívnym začleňovaním matematických mobilných hier do vyučovacieho procesu, teda vyučovacou metódou **Mobile Learning**. Vo svete, ale aj u nás bol zavedený pojem mobile learning, resp. m-learning, pre učenie pomocou mobilných dotykových zariadení, teda tabletov a smartfónov. Neumajer a kol. (2015, s. 21) hovoria o m-learningu ako o „akejkoľvek podobe či forme učenia, ktorá prebieha prostredníctvom mobilných zariadení alebo s ich pomocou." Dôležité je, že ide o učenie, ktoré sa môže uskutočňovať kdekoľvek a kedykoľvek, čiže aj mimo školy. V konečnom dôsledku chápanie pojmu mobilné vzdelávanie nemožno obmedziť len na používanie mobilných zariadení. Je to skôr výsledok, ktorý vzniká prostredníctvom vhodného a kreatívneho používania týchto technológií.

Dnes mobilné technológie predstavujú mikropočítače s malými rozmermi, ktoré sú podľa nášho názoru neodmysliteľnou súčasťou života ľudí. Rozvoj mobile learningu je teda nevyhnutný a stále pokračuje. Okrem toho aj pedagogika sa stále rozvíja a formuje. Z mnohých strán počúvame o kontextovom vyučovaní zameranom na žiaka. Vzdelávanie je vsadené do reálneho prostredia, ktoré mobilné technológie podporuje a využíva. Mobile learning podľa Crompton „stelesňuje vzdelávanie zamerané na žiaka, v ktorom bude čoskoro študent všadeprítomný na učení sa" (2013, s. 12).

Mobile Learning vo vyučovaní

Mobile learning vo vyučovaní je ešte stále predmetom mnohých výskumov. Ukazuje sa, najvhodnejší spôsob začlenenia je v spojení s niektorou z ďalších vyučovacích metód ako skupinové alebo kooperatívne vyučovanie, situačná hra, konštruktívne vyučovanie, brainstorming a pod.

Implementáciu mobile learningu do vyučovania matematiky skúmali mnohí výskumníci a zhodli sa na tom, že „ani učitelia, ani žiaci netrávia veľa času technickými problémami, tablety sú vždy funkčné" (A. Kluge, J. Dolonen, 2015, s. 119). Podľa nás je to jedna z podstatných podmienok kvalitného vyučovania v mobile learningu. Súčasná mladá generácia pracuje s mobilnými technológiami prirodzene, častokrát ich vedia ovládať lepšie ako samotní učitelia. Z tohto dôvodu sa netreba obávať metakognitívneho skĺznutia vo vyučovaní.

Výhodou mobile learningu pre žiakov je individuálnosť, vďaka ktorej môžu riešiť úlohy im primeraným tempom. Odporúčanie je, aby každý študent mal k dispozícií mobilné zariadenie. Na druhej strane aj kooperatívny spôsob vyučovania v tomto modeli má svoje plusy. Žiaci vo dvojiciach majú možnosť rozprávať sa, navzájom si pomáhať, sú aktívni a častokrát dosiahnu správne riešenie rýchlejšie. Na základe nášho skúmania môžeme potvrdiť, že žiaci v jednej lavici spolupracovali, pomáhali si, šikovnejší vysvetľoval slabšiemu, aj keď každý mal svoj tablet.

Shaun Wilden (2017) píše o dôležitosti výberu samotnej aplikácie, ktorá bude použitá vo vzdelávaní. Zdôrazňuje výber aplikácie (hry), ktorá pomôže študentom učiť sa efektívnejšie ako klasickým vyučovacími metódami. Podľa Wildena (2017) aj pri výbere aplikácie platí, že ˝menej je niekedy viac˝. Aplikácia by mala sledovať aktuálny cieľ vzdelávania, nebyť obsahovo zameraná na iné učivo, v prvých fázach implementácie časovo a manuálne nenáročná. Mali by sme sa zamyslieť nad tým, čo chceme, aby sa žiaci naučili a zvážiť najjednoduchší spôsob ako to dosiahnuť. V neposlednom rade netreba zabúdať ani na motivačný charakter, a aj na dostupnosť (voľno-stiahnuteľnosť) aplikácie.

V nasledujúcej tabuľke 1 uvádzame niekoľko ďalších výhod a nevýhod, ktoré sme zaznamenali počas nášho experimentálneho skúmania.

Výhody implementácie ML	Nevýhody implementácie ML
lepšia miera dokončenia a vyššia miera udržania	potreba technického vybavenia školy a pravidelná kontrola funkčnosti týchto zariadení
individuálne tempo pre každého žiaka	začiatočná dôkladná príprava učiteľa
priestor na individuálnu prácu učiteľa so žiakom	disciplinovanosť žiakov
možnosť opakovaného prechádzanie aplikáciou/hrou	
možnosť opravy/vylepšenia svojho výsledku/skóre	
okamžitá spätná väzba pre žiakov	

Tabuľka 1: Výhody a nevýhody implementácia mobile learningu do vyučovania

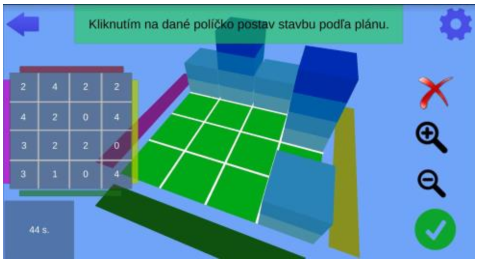
Napriek tomu, z nášho pohľadu, pozitíva prevyšujú negatíva tejto vyučovacej metódy. Dôležité je vnútorné presvedčenie a motivácia učiteľa pracovať aj s modernými technológiami a edukačnými aplikáciami. Zavádzanie noviniek (nových postupov) do vyučovania môže byť spojené s nedisciplinovanosťou žiakov. Rovnako ako pre nás je to niečo nové, tak aj pre nich. Žiaci sú zvedaví, chcú preskúmať nové možnosti a práca na tablete môže zabrať viac času ako sme plánovali. Trpezlivosť by však mala byť povahovou črtou každého učiteľa. Na začiatku si treba so žiakmi stanoviť jasné pravidlá pri práci s tabletom, vymedziť presný čas práce na ňom a oboznámiť ich aj s priebehom ostatnej časti hodiny. V konečnom dôsledku si myslíme, že treba pripraviť nie len učiteľa, ale aj žiakov na vyučovanie v mobile learningu, aby učenie bolo efektívne pre obe strany.

Vyučovacia hodina s tabletmi

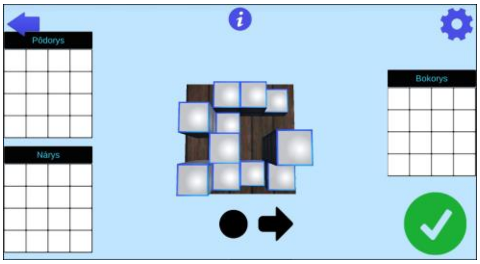
Počas výskumu realizovaného v rámci dizertačnej práce sme pripravili a následne odpozorovali viacero hodín matematiky s použitím tabletu. V tomto príspevku vám bližšie predstavíme hodinu matematiky určenú pre 7.ročník základnej školy, na ktorej žiaci pracovali s tabletom a mobilnou aplikáciou „Apps in Math“[12]. Konkrétne s hrami Manhattan a Brooklyn, ktoré sa nachádzajú v kategórií Geometria v spomínanej aplikácií.

[12] Aplikácia je voľne stiahnuteľná pre operačné systémy Android a iOs.

V hre Manhattan je úlohou žiaka podľa plánu a kódovania vytvoriť stavbu z kociek a naopak, vytvoriť plán s kódovaním na základe stavby. Výchovno-vzdelávacím cieľom tejto hry je rozvoj priestorovej predstavivosti, aby žiak vedel postaviť jednoduchú stavbu z kociek na základe návodu (náčrtu, nákresu, kódovania) a naopak. Hra (obrázok 1) celkovo obsahuje tri módy: mód učenia sa, mód stavania a mód plánu stavby. Výhodou hry je, že ju žiak môže hrať opakovane aj doma a nebude mať stále rovnaké zadanie. Učiteľovi odporúčame pozorovať žiakov pri hre, zistiť kde robia najčastejšie chyby a na tie sa zamerať pri ďalších cvičeniach. Keďže táto hra je vhodná aj pre žiakov 5. ročníka ZŠ, tak je podľa nás vhodné ju v 7. ročníku zaradiť do motivačno-expozičnej časti vyučovacej hodiny. Cieľom by bolo, aby si žiaci pripomenuli a obnovili poznatky z nižšieho ročníka. Rovnakým spôsobom sme ju do vyučovacej hodiny implementovali aj v rámci výskumu.



Obrázok 1: Hra Manhattan



Obrázok 2: Hra Brooklyn

Výchovno-vzdelávacím cieľom hry Brooklyn je, že žiak vie nakresliť nárys, pôdorys a bokorys telies zostavených z kvádrov a kociek. Teda úlohou žiaka je k vygenerovanej stavbe z kociek nakresliť príslušný plán – nárys, pôdorys a bokorys (obrázok 2). Táto hra má len jeden mód a to mód hrania. Žiakom sa počas hry neustále generujú nové zadania stavieb. Podobne ako predchádzajúca hra aj táto sa zameriava na rozvoj priestorovej predstavivosti u žiakov. Ponúka väčšiu banku zadaní stavby z kociek v rozmeroch 4 x 4 x 4. Hru odporúčame zaradiť do fixačnej časti hodiny po hre Manhattan.

Model vyučovacej hodiny

V priebehu jednej vyučovacej hodiny sme sa rozhodli implementovať obe spomínane hry. V jednej experimentálnej triede v rámci úvodnej motivačno-expozičnej fázy hodiny a v druhej triede vo fixačnej fáze hodiny. V oboch prípadoch sa žiaci hrali ako prvú hru Manhattan. Dôvodov prečo sme sa rozhodli použiť obe hry počas jednej hodiny bolo viacero. Hodina bola zameraná na 3D-geometriu, konkrétne stavby z hranolov, tvorba plánu s kódovaním, nárys, pôdorys a bokorys. Po druhé žiaci už boli skúsenejší s prácou na tabletoch počas vyučovania, správali sa disciplinovane. Po ďalšie ide o časovo nenáročné hry, na ktoré žiakom stačí po 10 minút hrania, teda celkovo maximálne 20 minút práce na tablete. V neposlednom rade hra Manhattan mala za cieľ žiakom pripomenúť učivo, ktoré už preberali v nižšom ročníku, a po krátkej diskusií pokračovať s hrou Brooklyn, ktorá už bola zameraná na nové učivo. Diskusiu medzi jednotlivými hrami (po každej hre) určite odporúčame. Jej cieľom pre učiteľa by malo byť overenie miery porozumenia učivu obsiahnutého v hre a poskytnutie priestoru na otázky žiakov. Okrem práce na tablete žiaci počas vyučovacej hodiny aj riešia úlohy rôzneho typu zamerané na tému hodiny. Podrobný opis priebehu hodiny uvádzame aj v modeli vyučovacej hodiny, ktorý sme vytvorili k obom vyučovacím hodinách. Každý model obsahuje kompletnú tabuľku so zaradením hodiny v rámci tematického celku, výchovno-vzdelávacie ciele a kompetencie, východiskové poznatky, vyučovacie metódy, vyučovacie prostriedky a opis štruktúry vyučovacej hodiny s využitím tabletu a aplikácie "Apps in Math". Modely k viacerým hrám zo spomínanej aplikácie sú súčasťou dizertačnej práce autorky príspevku pod názvom „*Efektivita aplikácií pre mobilné zariadenia vo vyučovaní matematiky*“, a taktiež budú dostupné na webovej stránke oddelenia Didaktiky matematiky FMFI UK a v publikovanej brožúre.

Zhodnotenie vyučovacích hodín s hrami Manhattan a Brooklyn

Obe vyučovacie hodiny prebiehali plynule bez problémov. Počas hodiny sme zaznamenávali nadšenie a radosť zo strany žiakov, boli disciplinovaní a počúvali naše pokyny. V prvej triede používali žiaci tablety úvodných 20 minút, v druhej v opakovacej časti hodiny. V oboch prípadoch sa ako prvú hrali hru Manhattan, ktorá má len dva levely. Okrem toho má aj mód učenia, ktorým mali žiaci prvej triedy taktiež prejsť, v druhej to bolo dobrovoľné. Výsledné skóre záviselo od časového limitu, za ktorý prešli level a od počtu pokusov riešenia. Keďže hra má len dva levely, žiaci oboch tried nimi prechádzali opakovane, a tak si mohli vylepšiť svoje výsledné skóre. U niektorých žiakov prvej triedy sme spozorovali, že na začiatku otáčali tabletom akoby to bola interaktívna hra. V tejto skupine boli aj žiaci, ktorým sa vyučujúca venovala individuálne, prihlásili sa z dôvodu, že sami nevedeli nájsť chybu vo svojom riešení. Po rozhovore s učiteľkou sme sa dozvedeli, že žiaci si neotáčali stavbu a tak nevideli zadný rad. V priebehu 10 minút hru zvládli všetci, aj viac ako jeden krát. V druhej triede im dokonca 10 minút bolo až príliš. Žiaci vo dvojiciach alebo štvoriciach súťažili, kto získa lepšie skóre, kto to vyrieši rýchlejšie. Hra Manhattan nebola ani pre jednu triedu náročná, ako sme už písali, žiaci sa s učivom v tejto hre už stretli v piatom ročníku.

Predtým ako žiaci prešli na druhú hru, vyučujúca viedla s nimi ešte krátku diskusiu o hre Manhattan. Diskutovali o pojmoch stavba, plán, kódovanie stavby, otáčanie stavbou a pod. Žiaci hľadali aj využitie a prepojenie s reálnym životom. Následne pani učiteľka diskusiou nadviazala na ďalšiu hru Brooklyn, ktorú žiaci na jej pokyn mohli začať hrať. Keďže táto hra má len mód hrania, v prvej triede bol problém s pojmami nárys, pôdorys a bokorys. Niektorí ich počuli prvýkrát. Podarilo sa im objaviť ikonku s písmenom i. Tam našli informáciu o tom, čo tieto pojmy znamenajú. Slabší žiaci sa pýtali učiteľky alebo svojich spolužiakov. Zamerali sme sa na jednu dvojicu, kde sa jeden žiak pýtal toho druhého, čo tam má zle. Ten mu ukázal, čo je nesprávne a dokonca mu aj podrobne vysvetlil, prečo to mal nesprávne a ako to má byť. Upozornil ho na to, že do plánu nemá vyznačovať len to ako vyzerá spodný rad. V druhej triede bol s novými pojmami menší problém, keďže im ich učiteľka zaviedla počas expozície učiva. Čas 10 minút bol dostatočný, v druhej triede do 5 minút mali všetci hru prejdenú. Samozrejme mohli ju hrať opakovanie, hra im vygenerovala novú stavbu.

Podľa nášho názoru a dosiahnutých výsledkov počas výskumu sú obe hry vhodné do motivačno-expozičnej alebo aj do fixačnej časti hodiny. Nie len kvôli módu hrania hru Manhattan spolu s Brooklynom odporúčame aj do úvodnej časti hodiny. Myslíme si, že sú dobrým motivačným začiatkom hodiny. Nie sú to časovo náročné hry, učiteľ môže hneď nadviazať výkladom učiva a riešením úloh frontálne alebo v rámci dvojíc. Žiaci môžu hrami prechádzať aj viackrát, tým si precvičujú a upevňujú svoje poznatky. Učiteľ môže hry použiť aj na nasledujúcej hodine vo forme súťaže, kto dosiahne najvyššie skóre, kto vyrieši najviac zadaní a pod. Implementácia dvoch hier v rámci jednej hodiny je však možná iba s hrami s podobným obsahom učiva, ktoré nie sú časovo náročné z hľadiska doby hrania. Odporúčame však medzi hrami vytvoriť priestor na krátku diskusiu, frontálne si overiť mieru porozumenia, poprípade vysvetliť, čo žiakom nebolo jasné.

Záver

Žiaci pracovali na hodinách aktívne, tešili sa na hodinu s tabletmi, boli z toho priam až nadšení. Počas pozorovania sme si všimli, že žiaci sa sústredili na hru, neregistrovali keď sme na nich rozprávali alebo sa pýtali podobné otázky rôzni žiaci, takže sa nevnímali ani navzájom. Dovolíme si povedať, že aj siedmaci sú ešte stále "hravé deti". Prevládala medzi nimi súťaživosť, každý sa chcel dostať v rámci hry čo najďalej a následne zdolať v celkovom skóre svojho spolužiaka. Myslíme si, že súťaživosť v triede nebola chápaná negatívne. Šikovní žiaci ako výhodu uvádzali, že nemusia čakať na učiteľa kým im skontroluje riešenie, ale môžu riešiť ďalej, majú okamžitú spätnú väzbu. Výhodou bolo aj opakované hranie hier. Ak niekto prešiel celú hru skôr, tak mohol začať hrať odznova, hra mu generovala nové údaje, takže žiak nemal pocit, že hrá stále to isté. Opakované hranie bolo plusom aj pre slabších žiakov, určitý level mohli hrať viackrát a učiteľ im nemusel vymýšľať nové a nové zadania úloh.

Ak by sme to mali zovšeobecniť, myslíme si, že v rámci metódy mobile learning je vhodné použiť hry, ktoré sú tematický zamerané na učivo, nevyžadujú veľa času na prípravu, ani na hru. Teda žiak je schopný v priebehu 15 až 20 minút prejsť celou hrou. Odhadujeme, že po prejdení hry budú mať žiaci menší problém odložiť tablet. Pre žiakov na základnej škole by mali byť hry v slovenčine, aby sa pre niektorých žiakov cudzí jazyk nestal bariérou. Hry určené do opakovacej časti by mali byť zamerané na precvičenie učiva, hravého charakteru so stupňujúcou obťažnosťou úloh, aby neboli monotónne a nudné pre žiakov. Tieto hry by nemali obsahovať učiaci mód a príliš veľa vysvetľujúcich informácií. Na druhej strane do motivačno-expozičnej fázy je podľa nás vhodné zaradiť hry, ktoré toto obsahujú. Hry, ktoré sú objaviteľského charakteru, sú jednoduchšie, majú pomaly sa stupňujúcu obťažnosť a hlavne musia na žiakov pôsobiť motivačne. Na základnej škole najlepšie hravo – zbieranie pokladov, žetónov a pod.

Literatúra

[1] DJUBAŠÁKOVÁ, B.: *Efektivita aplikácií pre mobilné zariadenia vo vyučovaní matematiky* [Dizertačná práca], Bratislava, Univerzita Komenského, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, 2020

[2] CROMPTON, H.: *Mobile Learning: New Approach, New Theory*. In Berge and Muilenburg (ed.) *Handbook of Mobile Learning.* New York, Routledge Taylor and Francis Goup, 2013, ISBN 978-0-415-50369-3

[3] NEUMAJER, O., ROHLÍKOVÁ, L., ZOUNEK, J.: *Učíme se s tabletem. Využití mobilních technologií ve vzdělávání.* Praha, Wolters Kluwer, 2015, ISBN 978-80-7478-768-3

[4] WILDEN, S.: *Mobile Learning*. Unite Kingdom, Oxford University Press, 2017, ISBN 978-01-9420-039-4

[5] KLUGE, A., DOLONEN, J.A.: *The good and the bad of a new math language.* In Crompton and Traxler (ed.) *Mobile Learning and mathematics: Foundations, design and case studies*. Florence, KY: Routledge, 2015, ISBN 978-04-1574-281-8

PaedDr. Barbora Djubašáková, PhD.
FMFI UK, Mlynská Dolina 6284
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: barbora.djubasakova@gmail.com

RADOSŤ Z MATEMATIKY

DOMÁNYOVÁ MÁRIA

ABSTRAKT. *V príspevku sa zameriavam na potenciál matematiky robiť jej vyučovanie radostným a tvorivým, pričom zohľadňujem bipolárnosť vyučovacieho procesu – predovšetkým v tom zmysle, že potešenie a radosť majú zažívať nielen žiaci / študenti, ale aj ich učitelia. Uvádzam príklady menej známych matematických úloh, ktoré to umožňujú. Využívam bohaté skúsenosti zo svojej pedagogickej praxe a skúsenosti z vedenia „improvizovaného matematického fóra“.*

Téma, ktorá rezonuje čoraz viac

Téma radosti zo získavania – ale aj sprostredkovávania – matematických poznatkov nie je nová. Vo vyučovaní matematiky tu bola prítomná vždy, avšak s meniacou sa dobou a od týchto zmien sa odvíjajúcimi výchovno-vzdelávacími cieľmi sa dostáva čoraz viac do popredia. Patrím k pedagógom, ktorí v silu pozitívnej motivácie, a hlavne v účinnosť „radosť vzbudzujúcich momentov“ vo vyučovaní matematiky vždy verili a veria, a rada by som sa s vami podelila o svoje skúsenosti. Som presvedčená, že väčšia pozornosť venovaná tejto téme môže byť na prospech ako žiakom, tak aj nám učiteľom, a v neposlednom rade aj samotnej matematike ako vyučovaciemu predmetu.

Je všeobecne známym faktom potvrdeným výskumami, že v radostnej atmosfére sa žiakom lepšie učí a poznatky si aj na dlhšiu dobu zapamätajú. A naopak: Atmosféra negatívnych pocitov, strachu, obáv, pociťovania vlastnej nedostatočnosti „dokáže“ poznávací proces veľmi výrazne blokovať. Radosť teda môže byť účinným pomocníkom pri vyučovaní. Otázkou je, či sa tento prostriedok v praxi dostatočne využíva. Odpoveď na túto otázku je, žiaľ – i keď aj tu existujú našťastie výnimky – v celoplošnom meradle negatívna. Z rôznych medzinárodných meraní i meraní uskutočnených našimi inštitúciami vyplýva, že iba jednociferné percento žiakov na Slovensku (cca 7%) sa učí preto, že ich to baví. Je to veľká škoda predovšetkým z hľadiska osobnostného rozvoja žiakov. Matematika ako predmet má potenciál súčasný stav v zmysle proklamovaných cieľov zmeniť k lepšiemu, je však potrebné, aby učitelia vo svojich prípravách na vyučovanie venovali pozornosť aj týmto hľadiskám.

„Rozradosťujúce momenty“ vo vyučovaní matematiky možno vzbudzovať ako organizáciou výučby, tak aj vhodnou voľbou použitých úloh. Vo svojom dnešnom príspevku sa zameriam najmä na výber vhodných úloh.

Základným predpokladom na to, aby žiaci mohli riešenie úloh radostne prežívať, je ich zaujatie úlohou. Učiteľ by sa mal snažiť vybrať vhodné úlohy, prípadne ich upraviť – v zmysle maximalizovania možných radosť vzbudzujúcich momentov – a podať ich tak, aby boli pre nich príťažlivé. Keďže každý žiak je iný aj z hľadiska toho, čo ho upúta či zaujme, mali by sme sa snažiť o čo najväčšiu rozmanitosť inšpirujúcich momentov.

O čo sa snažíme a čo nám v tom môže pomôcť

Najskôr si pripomeňme, o ktoré momenty by sme sa mali vo zvýšenej miere snažiť. Sú to predovšetkým momenty

- radostného prekvapenia;
- potešenia;
- očarenia;
- nadšenia;

- uspokojenia;
- zábavnosti.

Na druhej strane sa v zmysle horeuvedeného snažíme eliminovať alebo aspoň znižovať negatívne pocity, ako sú napríklad

- pocity nedostatočnosti;
- sklamanie;
- rozčarovanie;
- hnev.

Čím môže úloha zaujať pri zadaní

Ako už bolo povedané, je veľmi dôležité, aby úloha žiakov zaujala. „Posvieťme si trochu“ na faktory, ktoré nám v tomto môžu pomôcť.

Už pri zadaní môže úloha zaujať svojou (možno zdanlivou) jednoduchosťou (pre účely odvolávania sa na tento faktor v úlohách ho označme **Z1**). Ide o výrazný faktor, ktorý inšpiruje mnohých žiakov (“Úloha sa zdá byť ľahká, to hravo dám.“).

Ďalším, do istej miery príbuzným faktorom, je neobvykle stručné zadanie (**Z2**). Toto môže mať až extrémnu podobu, kedy je uvedený iba jednoduchý obrázok bez slov (alebo temer bez slov) so stručným pokynom, čo treba zistiť, určiť, vypočítať a pod. Niektoré z takto zadaných úloh majú pre značnú skupinu žiakov priam magickú príťažlivosť.

Výrazným motivačným faktorom pri zadávaní úlohy môže byť aj reálny kontext blízky mentálnemu svetu žiaka / študenta (**Z3**).

Príjemným oživením zadaní môžu byť aj použité vtipné názvy či situácie (profesor Konkáv Konvexný, krajina Fantazmagórsko, pani Šetrná, ...) – tento moment označme ako **Z4**.

Mnoho úloh možno ozvláštniť spojením s príbehom – skutočným alebo fiktívnym („Stalo sa raz jednému nášmu študentovi ...“, „Istá moja známa ma raz požiadala ...“, ...). Cenné sú najmä historické príbehy, vrátane „historických omylov“. Túto skupinu motivačných momentov označme ako **Z5**.

Niektorých žiakov zaujmú úlohy, ktoré majú reálne praktické využitie. Osobitne, ak ide o formu pomoci niekomu (**Z6**).

Tvorivý učiteľ sám sleduje a „vychytáva“ momenty, ktoré sa mu u danej skupiny žiakov osvedčili – môže ísť o faktory, ktoré sme už spomenuli, ale aj mnohé iné – a pracuje s nimi v zmysle dosiahnutia stanovených cieľov.

Čím môže úloha zaujať pri riešení

Didakticky cenné sú úlohy, v ktorých možno dospieť k správnemu výsledku rôznymi cestami (**R1**). Radosť z nájdenia vlastného riešenia je jednou z najčistejších radostí, ktorú môžeme žiakom či študentom poskytnúť a súčasne ide o veľmi účinný faktor na posilnenie ich zdravého sebavedomia.

Paradoxne, pre istú skupinu žiakov môžu byť príťažlivé najmä úlohy s pomerne jednoznačným postupom riešenia (**R2**). Ani túto skupinu žiakov netreba ukracovať o zdroj ich uspokojenia. Možno z nich nevyrastú analytici, riešitelia problémov, no môžu sa z nich v budúcnosti vyprofilovať schopní manažéri a pod.

V rámci danej tematiky nemožno zabudnúť na fakt, že niekoho úloha zaujme – a často ide o silný moment pre dotknutého jedinca - i možnosťou aplikácie známeho „triku“ či „logickej skratky“ (**R3**).

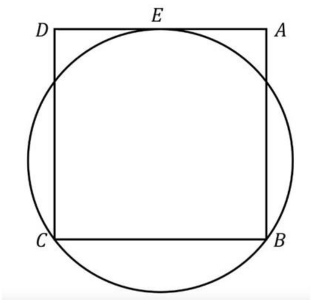
Napokon, úloha môže zaujať i výsledkom. Najmä vtedy, ak existuje veľa správnych, ale odlišných výsledkov (**V1**), alebo ak je výsledok niečím prekvapivý (**V2**). V tejto súvislosti je vhodné žiakom poskytnúť možnosť „tipnúť si na výsledok“ pred samotným riešením. Okrem rozradosťujúceho momentu pre tých, ktorí si tipli správne, je tu aj možnosť upozorniť na to, ako nás zmysly klamú a ako nám matematické poznatky a schopnosť riešiť úlohy môžu pomôcť pri „dopátraní sa pravdy“.

V ďalšom uvádzam niekoľko úloh, ktoré v sebe obsahujú nevšedné množstvo motivačných a rozradosťujúcich momentov pri použití vo vyučovacom procese. Ide o menej známe, prípadne vhodne upravené, ale aj úplne originálne úlohy (tie označujem písmenom **O**). Pri každej z úloh uvádzam pomocou horeuvedených označení, čím je tá-ktorá úloha cenná.

Príklady úloh

ŠTVOREC A KRUH (**Z1**, **Z2**, **R1**, **V2**)

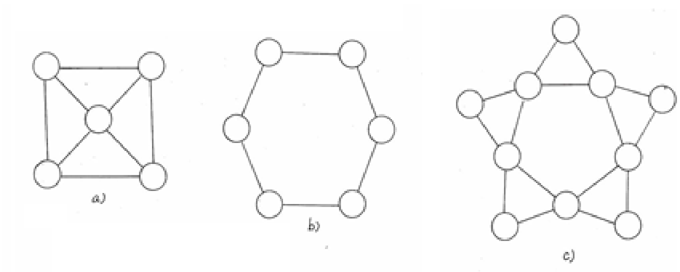
Na obrázku sú štvorec a kruh. Ktorý z nich má väčší obvod?



Obrázok 1

ČÍSLA V KRÚŽKOCH (**Z1**, **Z3**, **V1**)

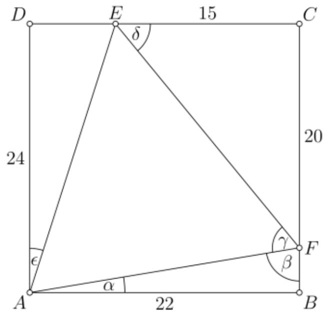
Do krúžkov v daných útvaroch vpíšte také prirodzené čísla, aby každé dve čísla spojené úsečkou mali spoločného deliteľa väčšieho ako jedna a každé dve čísla, ktoré priamo úsečkou spojené nie sú, boli nesúdeliteľné.



Obrázok 2

UHLY V OBDĹŽNIKU (R1, R3, O)

Usporiadajte uhly α, β, γ, δ, ε od najmenšieho po najväčší.



Obrázok 3

Z AHMESOVHO PAPYRUSU (Z5, Z6, R1, R3)

V roku 1 858 objavil Angličan Rhind v blízkosti chrámu Ramzesa II. v Tébach jeden z najstarších matematických textov spísaný egyptským pisárom Ahmesom. Ahmesov papyrus obsahuje okrem iného aj nasledujúcu úlohu.

Sto meríc obilia treba rozdeliť medzi piatich robotníkov tak, aby druhý robotník dostal o toľko meríc viac ako prvý, o koľko tretí dostal viac ako druhý, štvrtý než tretí a piaty než štvrtý. Prví dvaja robotníci majú spolu dostať sedemkrát menej meríc obilia než ostatní traja.

Koľko meríc obilia majú dostať jednotliví robotníci?

PATRIKOVE PONOŽKY (Z3, Z4, Z5, R1, R3, O)

Patrik mal v zásuvke 2 biele, 2 čierne, 2 sivé a 2 modré ponožky. Ponožky neboli spárované. V noci mu bola zima, a tak potme siahol do zásuvky, vybral náhodne dve ponožky a obul si ich. Po chvíli zistil, že mu je ešte stále zima, vytiahol náhodne ďalšie dve ponožky a nazul si ich na tie predošlé. Nestačilo to. Keďže mu bolo ešte stále zima, procedúru zopakoval ešte dvakrát, a tak zostala zásuvka s ponožkami prázdna a Patrik mal na každej nohe štyri ponožky. Konečne zaspal.

Určte pravdepodobnosť, že keď sa Patrik ráno zobudil, uvidel na svojich nohách ponožky rovnakej farby.

SŤAHOVANIE SÚBOROV (Z3, Z5, Z6, R1, R3, O)

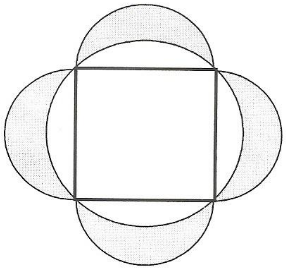
Tomáš sťahuje z internetu tri súbory; ich veľkosti sú 20 MB, 30 MB a 40 MB. Rýchlosť sťahovania je 384 kB/s. Mechanizmus sťahovania je taký, že každý zo súborov sa sťahuje rovnakou rýchlosťou, pričom súčet všetkých rýchlostí je celková rýchlosť sťahovania (v tomto prípade 384 kB/s). Celková rýchlosť sťahovania sa teda rovnomerne rozdelí na jednotlivé súbory. Po stiahnutí niektorého zo súborov sa v okamihu celková rýchlosť opäť rovnomerne prerozdelí. Určte počet minút sťahovania Tomášových súborov.

Poznámka: 1 MB = 1 024 kB

KVIETOK (Z1, Z3, R2, V2)

Štvorcu bol opísaný kruh a nad každou stranou štvorca ako nad priemerom bol vyznačený polkruh. Vznikli tak 4 "lupienky" (na obr. zvýraznené šedou farbou).

Čo je väčšie: obsah ústredného štvorca alebo obsah štyroch lupienkov?



Obrázok 4

DEKORATÉRKA (Z3, Z5, Z6, R1)

Mladá dekoratérka Denisa našla v škatuli 120 rovnako veľkých polystyrénových gulí a rozhodla sa ich pospájať do tvaru trojbokej pyramídy. Ak by sa to dalo, chcela by pri stavbe využiť všetky gule. Pri spájaní by jej veľmi pomohlo, keby vedela, koľko gulí má tvoriť najspodnejšiu vrstvu pyramídy. Poradíte jej?

Riešenia týchto úloh spolu s ďalšími cca 70 úlohami možno nájsť na Facebooku v skupine Učitelia matematiky, nápady, odkazy, rady (je možné ich nájsť podľa názvov) https://www.facebook.com/groups/uciteliamatematiky.

Literatúra

[1] Mária Dományová: Matematika 3, pracovný zošit pre gymnáziá a stredné školy, mesto-Bratislava, LiberaTerra 2018, ISBN 978-80-89792-56-6

[2] archív autorky a internetové zdroje

RNDr. Mária Dományová
dôchodkyňa (predtým Gymnázium Pavla Horova Michalovce)
Nad Laborcom 46
SK – 071 01 Michalovce

MATEMATICKÉ RÚŠKO

DOVIČÁK MARTIN

ABSTRAKT. *Súčasná situácia spätá s ochorením COVID-19 je pre nás učiteľov neočakávanou a náročnou zároveň. Stavia nás pred konkrétne úlohy vysporiadať sa s meniacimi sa opatreniami, ktoré sú v rozpore s našimi doterajšími skúsenosťami s odovzdávaním vedomostí a celkovou prácou s našimi študentami. Priblížiť a objavovať matematiku v dobe sociálnych sietí je cesta, ktorá je hodná diskusie. Stále je len na začiatku. Príspevok je sumarizácia najpoužívanejších aplikácií, s ktorými sa autor stretol a následne sa ich snažil propagovať na sociálnych sieťach.*

Sociálne aplikácie

Internet je dobrý sluha, ale zlý pán. Azda každý učiteľ sa stretol s tým, že upozornil svojho študenta na používanie mobilu počas vyučovacej hodiny. Je na zvážení každého učiteľa, aké nastaví pravidlá s digitálnymi technológiami na hodinách. Reakcie študentov sa môžu líšiť. Duhigg 2012 v publikácii Sila zvyku uvádza pohľad na závislosti nie na mobile, ale na notifikáciach. Študent má nutkanie pravidelne kontrolovať, či mu niekto niečo nekomentoval, nenapísal alebo nepridal like, či kudos. Najjednoduchším riešením by mohlo byť presvedčiť aby si tieto upozornenia vypli a mobil si pozreli až po vyučovacej hodine. Samozrejme mozog študenta pracuje a podvedome vie, že očakáva interakciu na sociálnych sieťach. To je už presne o sile zvyku a na to treba dostatok času, ak to chce učiteľ zmeniť. Zbaviť sa tejto závislosti,ktorá súvisí s neustálou kontrolou upozornení, nie je jednoduché. Duhigg tvrdí, že zlozvyk sa nedá prestať robiť len tak, bez toho aby sme ho minimálne nenahradili. To, čím ho nahradiť, nie je jednoduché. Azda najhoršie je, ak jednu sociálnu sieť nahradí druhá sociálna sieť. Autor nepozná ideálne riešenie na túto problematiku, ale na základe vlastných skúseností predkladá návrh, kde žiakovi ponúkne obsah na sociálnych sieťach práve učitelia, ktorý buď vytvoria alebo odporučia a žiaci ho môžu začať sledovať alebo odoberať.

Facebook

Najsťahovanejšou aplikáciou za posledných 10 rokov je práve facebook[13]. Môže slúžiť ako výborný nástroj na spoločnú komunikáciou s celou triedou, kde môžeme očakávať rýchlu digitálnu interakciu od žiaka. Je na každom učiteľovi, či využije tento priestor na spoločné diskusie, zadávanie úloh a i. Autor odporúča vytvoriť si skupinu s triedou, v ktorej môže zadávať domáce alebo iné úlohy. Časť študentov môže časom vymeniť zvyk rolovania facebookovej nástenky za riešenie zaujímavej úlohy z matematiky. Ďalším návrhom sú facebookové skupiny, kde sa žiaci môžu pridať. Autor je administrátor facebookovej skupiny:

“Zaujímavé príklady na spestrenie hodín matematiky”[14], do ktorej sa môže pridať každý používateľ facebooku alebo ju sledovať každý používateľ internetu. Účastník skupiny môže pridávať príspevky, ktoré schvaľuje administrátor skupiny. Samozrejme na facebooku nájdeme aj ďalšie skupiny, ktorých obsahom býva aj matematika, akými sú napríklad:

---

[13] https://svetapple.sk/apple/toto-su-najoblubenejsie-aplikacie-za-poslednych-10-rokov-pouzivate-ich/

[14] https://www.facebook.com/groups/778498102172263

- liberaTerra[15]
- Vedátor_sk[16]
- Matfyz je in[17]

Autor článku si myslí, že ak žiaci trávia priveľa času na digitálnych technológiach, tak dnešný učiteľ by mal vytvárať alebo odporúčať obsah aj v tomto prostredí, aby aj v rámci voľného času mali žiaci možnosť pracovať s kvalitným obsahom na sociálnych sieťach.

Instagram, Youtube a Tiktok

Ďalšími gigantami, ktoré patria medzi najsťahovanejšie aplikácie v rámci sociálnych sietí sú instagram, youtube a tiktok. Sociálne siete kde môžete pridávať fotky alebo videá. Na daných sociálnych sieťach sa môžu stretnúť s nepravdivými, zavádzajúcimi alebo iným druhom informácií, ktorých pravdivostnú hodnotu administrátori neoverujú. Toto tvrdenie platí samozrejme aj pre facebook a tu sa otvára priestor pre kritické myslenie študentov, ktoré môže rozvíjať aj učiteľ. Cieľom tohto príspevku nie je ponúknuť učiteľovi zaručený postup, ako prestať navštevovať dané sociálne siete, ale skôr nasmerovať študentov na sledovanie kvalitného obsahu na daných sociálnych sieťach a preto aj tu odporúčame overené stránky, ktoré sú aj pre mladú generáciu atraktívne:

- Instagram: MATFYZ memes[18]
- Instragam: Matfyz je in[19]
- Youtube: Matfyz je in[20]
- Youtube: Vedátor SK[21]
- Youtube: Matika za 3 minúty[22]

Aplikáciu TikTok, ktorá je populárna pre novú generáciu 15- ročnej mládeže, autor odporúča používať túto aplikáciu ako nástroj na aktiváciu kritického myslenia. Žiaci, ktorí používajú TikTok majú nájsť matematické videá a overovať ich pravdivosť. Ako príklad môžeme uviesť japonské násobenie[23]. Žiaci na tomto videu môžu analyzovať, či hodnotiť daný postup. Podobné videá vám budú aplikácie na základe umelej inteligencie opäť generovať. Tu tiež môže prísť k zlozvyku, ale ako uvádzame vyššie, cieľom tohto príspevku je, aby vám generovali dané aplikácie obsah, ktorý môže byť pre žiakov kvalitným prínosom alebo umožňuje rozvoj kritického myslenia tj. matematický obsah, ktorý ich núti hodnotiť dané postupy.

Aplikácie na tvorbu obsahu

Koronavírus nás spojil (ne)dobrovoľne rýchlym spôsobom k digitálnym technológiám. V tejto situácií je práca s digitálnymi technológiami neoddeliteľnou súčasťou učiteľa. Mať

---

15 https://www.facebook.com/liberaterra.sk
16 https://www.facebook.com/vedator.svk
17 https://www.facebook.com/MatFyzJeIn
18 https://www.instagram.com/matfyz_memes/
19 https://www.instagram.com/matfyzjein/?hl=sk
20 https://www.youtube.com/channel/UCqLHX-tRwt8dSgNgVSbyxLw
21 https://www.youtube.com/channel/UCMryZl6xsxq4s54FvTgdtbA
22 https://www.youtube.com/channel/UCiHga9sb2yTIpL2R4SD527g
23 https://www.tiktok.com/@mathswithmisschang/video/6811093496406002949

pripravený šuflík s dištančnou výučbou je kľúč k slobode. Samozrejme nájsť aplikácie, ktoré vieme použiť počas prezenčnej i dištančnej formy vyučovania nám opäť môžu pomôcť pri dištančnej výučbe. Autor ponúka 4 aplikácie, s ktorými sa stretol počas online vyučovania resp. doučovania.

1. mentimeter.com[24]
2. wheelofnames.com[25]
3. jeopardylabs.com[26]
4. answergarden.ch[27]

Mentimeter

Aplikácie si definujeme z hľadiska tvorby obsahu a náročnosti. Aplikácia mentimeter je podobná aplikáci SLI.DO, ale pri aplikácii mentimeter netreba mať nainštalovanú mobilnú aplikáciu na zadávanie odpovedí. Žiak vie na základe linku alebo qr kódu odpovedať na Vašu otázku. Po odpovedi im hneď môžete ukázať výsledok ich hlasovania resp. odpovedí.

Tvorba obsahu je zameraná na aktuálne hlasovanie, ranking triedy na položenú otázku. Náročnosť aplikácie nie je obtiažna a pri intuitívnom skúšaní sa nemáte kde pomýliť, kedže aplikácia zvýrazňuje modrou farbou, čo treba stlačiť aby ste sa dostali k zdieľaniu Vašej otázky. Samozrejme na internete nájdete širokú škálu možností, ktoré ponúka aplikácia.[28]

Wheel of names

Koleso šťastia hodnotím ako overenú aplikáciu, ktorá zaujme všetky kategórie. Tvorba obsahu je opäť na Vás a môžete tam pridávať aj obrázky. Náročnosť aplikácie opäť nie je obtiažna a zvládnete sa s ňou zoznámiť do 15 minút.

Jeopardylabs

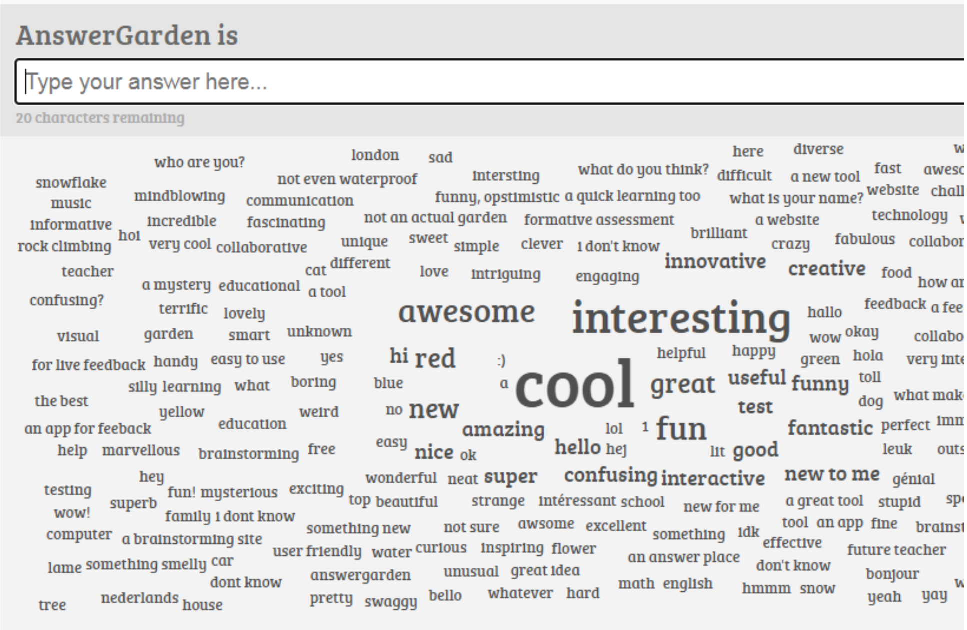
Aplikácia, vychádza z princípov známej televíznej hry "riskuj". Jeopardylabs je teda aplikácia, ktorá si vyžaduje dostatok času na vytvorenie kvalitnej súťaže - kvízu. Danú aplikáciu hodnotíme ako najzložitejšiu v rámci náročnosti, vzhľadom k tomu, že je k dispozícií viac alternatív na tvorbu matematického obsahu (ktoré nie sú intuitívne) a súčasne pri realizácií súťaže, treba kvíz riadiť a pridávať body manuálne jednotlivým žiakom resp. teamom. Na vytvorenie kvízu vám aplikácia ponúka vytvorenie piatich bodovo gradujúcich otázok v každej téme, ktorých je päť. Spolu teda máme 25 otázok, s tým, že v každej téme môžte stupňovať náročnosť otázky. Najjednoduchšia otázka je za 100 bodov a najzložitejšia za 500 bodov. Samozrejme to nie je striktné a učiteľ si môže vytvoriť svoje princípy hry.

Answergarden

Aplikácia na tvorbu spätnej väzby. V tomto prostredí si môžete nastaviť ľubovoľnú otázku, na ktorú Vám žiaci môžu odpovedať 20 znakmi. Zobrazenie odpovedí bude na odpoveďovej tabuli, ktorú si môžete vytlačiť a zavesiť si ju na svoju nástenku.

---

[24] https://www.mentimeter.com/
[25] https://wheelofnames.com/view/qz5-3h4/
[26] https://jeopardylabs.com/play/2020-09-09-2#.X1h-m0zySN8.gmail
[27] https://answergarden.ch/demonstration/
[28] https://www.youtube.com/watch?v=hNf-wQWlRlY



obrázok č.1 - ukážka zobrazovania odpovedí [29]

Všetky uvádzané aplikácie sú bezplatné k dátumu 23.10.2020.

Literatúra

[1] Duhigg Charless: *Sila zvyku*, Tatran, Bratislava, 2012, ISBN 978-80-222-0636-5

Mgr. Martin Dovičák, PhD.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského
Mlynská dolina F1
842 48 Bratislava.

[29] https://answergarden.ch/demonstration/

TRISEKCIA UHLA ZAUJÍMAVO

DRUŽBACKÝ ĽUBOMÍR

ABSTRAKT. Môj dedko hovorieval: „Nepoznám slovo: neviem a nemôžem." To je jedna z vecí, ktorú som od neho prevzal. A tak sa mi nechcelo povedať mojim žiakom, že trisekcia uhla sa nedá zostrojiť. Povedal som im: „Na internete je síce napísané, že sa to nedá, ale vy všetci veľmi dobre viete, že ja som veľký mág a ja to dokážem; dokonca bez uhlomera, bez pravítka a ešte aj bez kružidla. Veríte tomu?" Všetci odpovedali: „Nie, neveríme." Čo už, dnes deti skôr veria internetu ako svojmu učiteľovi. Ak ani vy tomu neveríte, prečítajte si tento príspevok a presvedčte sa. Naučím vás trisekovať uhol magickým spôsobom.

Existujú uhly, ktoré vieme trisekovať

Vedeli ste o tom, že existujú uhly známej veľkosti, ktorých trisekciu zvládnu aj žiaci na základnej škole. Stačí trochu porozmýšľať. Ak ste ich naučili prenášať uhol, robiť grafický súčet, rozdiel, násobok a podiel uhlov. Tak to bude pre nich veľmi zaujímavá činnosť. Navyše ak ich dáte do skupín a sľúbite im jednotku. Máte o perfektnú hodinu postarané.

Takže, ktoré to sú: napr. uhly, ktoré majú veľkosť: 90º, 45º, 180º, 135º. Nemusíte im dať všetky naraz, uvidíte ako im to pôjde.

Takže zadanie úlohy by mohlo vyzerať napr. takto: Rozdeľte uhol, ktorý má veľkosť 90º, na tri rovnako veľké uhly bez pomoci uhlomera.

Trisekcia uhla neznámej veľkosti

Potom, čo sa im podarí vyriešiť niektoré trisekcie uhlov známej veľkosti. Im zadajte túto úlohu: Zostrojte trisekciu uhla θ, ktorého veľkosť nepoznáme.

Keďže sa im už nejaké trisekcie podarili, nik nebude rozmýšľať spôsobom, že sa to nedá, (teda okrem tých, ktorí takto zmýšľajú o všetkom).

Čo o tom hovoria na internete

Keď usúdite, že sa natrápili dosť a na žiaden zázrak neprišli, tak prerušte ich prácu a prečítajte im, čo sa o tom píše na internete. Napr. na slovenskej wikipédii.

Trisekcia uhla je geometrická úloha, v ktorej treba prísť na postup ako sa geometrickým spôsobom (teda len za pomoci pravítka a kružidla) dá rozdeliť ľubovolný dutý uhol na tri zhodné uhly.

Trisekcia uhla patrí medzi trojicu geometrických úloh, ktorých riešením sa zaoberali už antickí Gréci (napr. aj Platón a jeho žiak Euklides):

- zdvojenie kocky,
- trisekcia uhla,
- kvadratúra kruhu.

Tieto úlohy sa nedajú riešiť pomocou jednoduchého kružidla a pravítka (Euklidovskej konštrukcie).

Čarovná veta

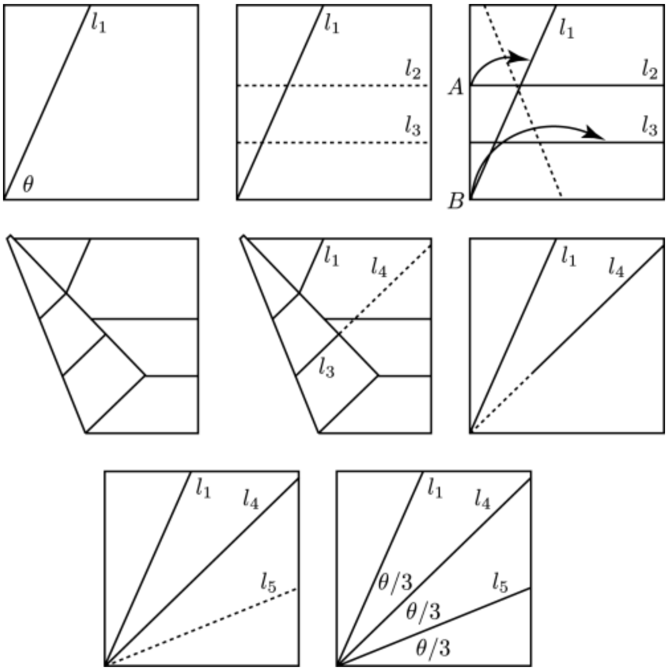
Hneď ako dočítate informácie na internete spustite túto čarovnú vetu:

„Na internete súce píšu, že sa to nedá, avšak vy veľmi dobre viete, že ja som veľký mág a ja to teda dokážem; dokonca bez uhlomera, bez pravítka a ešte aj bez kružidla. Veríte tomu?

Odpoveď bude zrejme: „Nie.“ („Áno“ by povedali jedine vtedy, ak by ste v triede nemali cynikov a boli by ochotní s vami hrať vašu hru.)

Zavolajte si ich k stolu a ukážte im tento postup.

Postup



Obrázok 1: Trisekcia uhla pomocou origami

Takže máme tu osem obrázkov, očíslujeme si ich takto v prvom riadku sú obr. 1., 2., a 3., v druhom riadku sú obr. 4. až 6. a v treťom riadku obr. 7. a 8.

Takže zoberiete si kancelársky papier, i keď lepší by bol papier origami. V prvom kroku zohnete papier tak, aby ste vytvorili ostrý uhol θ. V druhom kroku, môžete zohnúť papier v ktoromkoľvek mieste tak, aby ste dostali priamku l_2, ktorá bude rovnobežná s dolným (resp. horným) okrajom papiera. Priamku l_3, vy tvoríte tak, že pás papiera medzi dolným okrajom a priamkou l_2 zohnete presne na polovicu.

Vznikli nám tri dôležité body. Body A a B vidíte na treťom obrázku. Medzi nimi je však ešte jeden dôležitý bod. Budeme ho volať bod F.

Teraz zohneme papier tak, aby bod A sa nám zobrazil na druhé rameno nášho uhla □ a súčasne bod B, aby sa nám zobrazil na našej priamke l_3. Momentálne sme na obr. 4. a v tomto momente, keď ešte máme papier zohnutý, si perom poznačíme bod F, tadiaľ bude prechádzať priamka l_4.

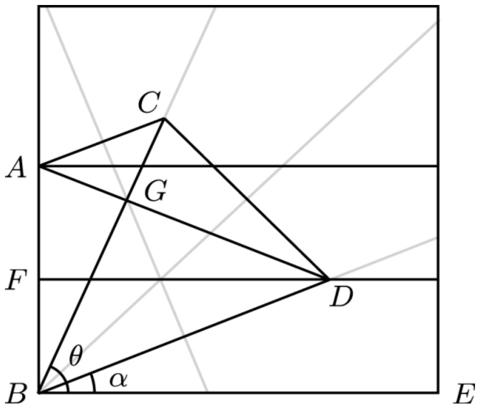
Uhol, ktorý zvierajú priamky l_1 a l_4 je tretina uhla θ. Takže teraz stačí vytvoriť polpriamku l_5 a to tak, že uhol pod ramenom l_4 zohneme na polovicu (urobíme jeho os).

Ak ste pracovali presne, stačí jednotlivé uhly prehnúť do vejárika a žiaci budú ohúrení akí ste veľký matematický mág.

Avšak nie každému to vyjde presne, problémy vám bude robiť hrubý kancelársky papier, ktorý je dosť nepoddajný, a dokonca aj na internete nájdete otrasné komentáre, že trisekcia uhla sa nedá urobiť ani týmto spôsobom, a že sa nám to len zdá. Takže neostáva nám nič iné, len urobiť matematický dôkaz.

Zdá sa nám to, alebo je to pravda?

Aj keď si to nik nevšimol, podarilo sa nám na papieri zostrojiť rovnoramenný lichobežník ABDC.



Obrázok 2: Trisekcia uhla pomocou origami

V kroku č. 3 sme zložili papier a úsečku AB sme vložili do konštrukcie ako úsečku CD. Úsečka AC je štvrtá strana rovnoramenného lichobežníka ABCD a úsečka AD je druhá uhlopriečka. Musíme ukázať, že $\theta = 3\alpha$.

Keďže BE a DF sú rovnobežné, potom ∠DBE, ∠BDF sú striedavé a teda |∠DBE| = |∠BDF|.

Keďže |AF| =|FB| a FD je kolmá na AB, potom trojuholník ABD je rovnoramenný,

kde DF je výška rovnoramenného trojuholníka ABD, potom |∠BDF| = |∠ADF|.

Teda α = |∠DBE| = |∠BDF| = |∠ADF|.

Štvoruholník ABCD je rovnoramenný lichobežník a ΔABD je rovnoramenný trojuholník, potom ΔABD aj ΔBCD sú zhodné rovnoramenné trojuholníky.

Teda |∠CBD| = |∠ADB|

Teda |∠CBD| = |∠ADB| = |∠BDF| + |∠ADF|.

Z toho vyplýva, že θ = |∠CBE| = |∠DBE| + |∠CBD| = |∠DBE| + |∠BDF| + |∠ADF|.

V 70-tych rokoch minulého storočia to matematicky dokázal Hisashi Abe.

Alex Bellos vo svojej knihe *Dobrodružstvá v zemi čísel* uvádza, že to dokázal nejaký americký matematik v 80-tych rokoch.[30]

Ďalšie varianty

Aby som vás nepripravil o všetku radosť z matematiky, nechávam pre vás dve úlohy bez uvedenia riešenia.

1. Zostrojte pomocou origami trisekciu uhla, ktorého veľkosť je menšia ako 45º.
2. Zostrojte pomocou origami trisekciu tupého uhla.

[30] Alex Bellos: *Alexova dobrodružství v zemi čísel*, Praha, Dokořán, 2015, ISBN 9788073635343, s.91.

Ak sa vám podarí prísť na nejaké správne riešenie, môžete sa o svoju radosť podeliť so mnou. Napíšte mi na môj mailový kontakt, ktorý je uvedený dole pod príspevkom.

Literatúra

[1] David Richeson: Division by Zero dostupné na stránke https://divisbyzero.com/2012/06/01/angle-trisection-using-origami/

[2] Zsuzsanna Dancso, www.numberphile.com, Numberphile is supported by the Mathematical Sciences Research Institute (MSRI): http://bit.ly/MSRINumberphile, Videos by Brady Haran dostupné na stránke https://www.youtube.com/watch?v=SL2lYcggGpc

[3] Alex Bellos: *Alexova dobrodružství v zemi čísel,*, Praha, Dokořán, 2015, ISBN 9788073635343

Mgr. Ľubomír Družbacký,
Ľubomír Družbacký GOOD IDEA,
popularizátor matematiky,
Zelenečská 103,
SK – 917 02 Trnava
e-mail: lubo.dr@gmail.com

PERSONÁLNY MANAŽMENT V ŠKOLSTVE

DRUŽBACKÝ ĽUBOMÍR

ABSTRAKT. *Najväčší problém súčasného školstva na Slovensku je obrovská fluktuácia učiteľov. Prečo k nej dochádza a ako riešiť otázky personálneho zabezpečenia vzdelávania, vám vysvetlím na obraze I. J. Repina: Burlaci na Volge. Vhodné pre zriaďovateľov škôl, riaditeľov, vedúcich pracovníkov ale aj samotných učiteľov. Osvedčené v praxi.*

Najväčšie dielo nevyváži zlý život,
život je väčší ako dielo,
život je najväčšie dielo.

Pavol Strauss

Spoločenská konvencia

V tomto príspevku by som chcel rozprávať o živote, o živote v zborovni. Začnem teóriou hier. Predstavte si takúto hru, ktorú budeme hrať na klasickej šachovnici 8 x 8 políčok, so všetkými 32 šachovými figúrkami, ktoré na začiatku postavíme na šachovnicu na ľubovoľné (alebo ak chcete náhodne vybraté) miesta. Najprv si stanovými jednoduché pravidlá:

Pravidlo č. 1: Biela figúrka bude spokojná, keď bude mať aspoň troch bielych susedov.

Pravidlo č. 2: Čierna figúrka bude spokojná, keď bude mať aspoň dvoch čiernych susedov.

Teraz nám už iba zostáva si takúto hru zahrať, s tým, že budeme striedavo ťahať bielymi a čiernymi figúrkami, dokiaľ nebudú všetky spokojné, resp. dokiaľ sa bude dať nespokojnou figúrkou pohnúť.

Môžete sa túto hru zahrať 10-krát alebo 100-krát a uvidíte, že väčšinou sa tie biele figúrky zgrúpia k sebe a podobne urobia aj čierne figúrky. Jeden z možných koncov vidíte na obr. č. 2.[31]

Obrázok 1 a 2: Spoločenská konvencia

---

[31] Binmore K.: *Teorie her.* Dokořán : Praha, 2014, ISBN 9788073635497, s. 82 – 83.

Burlaci na Volge

Obraz Burlaci na Volge namaľoval Ilia Jefimovič Repin v rokoch 1870-1873. Historici umenia radia tento obraz medzi vrcholné diela výtvarného realizmu. A aj keď vo všeobecnosti je prijímaný názor, že interpretácia námetu prekročila rámec žánrového diela, a že maliar dosiahol spoločenské zovšeobecnenie zobrazovanej témy, skutočný význam obrazu zostával do teraz zahalený rúškom tajomstva.

Samotný obraz predchádzalo množstvo štúdií, skíc, ba dokonca aj obrazov, v ktorých však symbolický význam nedosahuje také rozmery ako u konečného diela.

Verejnosť videla obraz v roku 1873 v Petrohrade na umeleckej výstave obrazov a sôch, ktoré mali byť poslané do Viedne na svetovú výstavu. Spätná väzba bola nekonzistentná. Napríklad Dostojevskij napísal: "Nemôžete ich nemilovať, ste bezbranný, nemôžete odísť bez toho, aby ste sa do nich nezamilovali." Repina chválili Kramskoy, Stasov a všetci tí, ktorí sa neskôr stali Pútnikmi.

Po výstave v Petrohrade sa obraz dostal na svetovú výstavu do Viedne. Akademické kruhy nazvali obraz "najväčším zneuctením umenia", "stratenou skutočne biednou realitou." Niektorí novinári videli na obraze „rôzne občianske motívy a podivné maličkosti, prenesené na obraz z novinových článkov ... z ktorých realisti čerpajú inšpiráciu“. Jeden z prítomných ministrov sa vyjadril o obraze takto: „No, povedzte mi, preboha, aký blázon vám poradil, aby ste namaľovali tento obraz? Vy, musíte byť asi Poliak? No, bohužiaľ -

Rus! Hodnota tohto starého spôsobu dopravy je podľa mňa už zredukovaná na nulu a čoskoro si naň nikto ani nespomenie. A vy namaľujete o tom obraz a vezmete ho na Svetovú výstavu do Viedne a myslím, že snívate o tom, že nájdete nejakého hlúpeho bohatého človeka, ktorý si bude chcieť tieto gorily kúpiť."

Ikonografický obraz

Realita sa však od umeleckého diela v mnohých rysoch výrazne líši. Predovšetkým v postoji burlakov. Ak chceli plavidlo potiahnuť vpred, muselo ísť o pevný synchrónny pohyb všetkých zainteresovaných vpred. A to na tomto obraze nevidieť. Jeden sníva, iný sa obzerá, ďalší sa sťažuje, iný si stíha zapáliť fajočku,… Jediné, čo je na tomto obraze realistické, je ťah štetcom. Ten obraz je o niečom úplne inom. O niečom, čo bolo aktuálne vtedy a je to aktuálne aj dnes. Ale Repin nikomu neprezradil, čo namaľoval. V skutočnosti ide o ikonografický obraz, ktorý zobrazuje ľudí, ktorí ťahajú loď proti prúdu. Loď predstavuje celú spoločnosť. Zaiste je viac povolaní, v ktorých ľudia ťahajú spoločnosť proti prúdu ľahostajnosti, lenivosti, hlúposti, závislosti, … Avšak svoje nezastupiteľné miesto tu majú práve učitelia. Áno, povolanie učiteľa je takáto otrocká robota, ťahať spoločnosť proti prúdu; to je najhlbšia podstata učiteľstva.

Jednotlivé postavy predstavujú jednotlivé charaktery ľudí, ktoré nájdete vo svojej zborovni. Koniec-koncov nájdete tam aj seba, a možno nie iba v jednej postave. Verím, že toto sebapoznanie vás posunie míľovými krokmi vpred a pomôže vám tak, ako pomohlo mne.

Sangvinik

V strede slnkom osvetleného vidíme mladého človeka, ktorý síce nosí na krku zlatý krížik, ale kríž, ktorý by mal niesť na svojich pleciach je preň príliš ťažký a už už sa ho chce zbaviť. Pozerá sa do diaľky a v mladíckej naivite vidí lepšie zamestnanie. Ak sa poriadne zahľadíte na jeho tvár, začujete jeho slová: „Tam, tam bude lepšie." Aj keď sa pozriete na jeho postoj, uvidíte, že on toho moc nepotiahne.

To je mladý človek. Ak ste vo vedúcej pozícii, majte pochopenie pre mladých ľudí. Dostať sa z univerzity do pracovného procesu, to je pre mladého človeka kultúrny šok. Zrazu pocíti silu prúdu, že to nepôjde tak ľahko. Že žiaci sa nebudú učiť len preto, že on im to povedal. Že učiteľstvo ani zďaleka nie je len o učení, ale že v zborovni naňho čaká obrovská kopa byrokracie. Že okrem toho učenia, treba aj hodnotiť a to jeho hodnotenia by hocikto rád ešte niečo povedal. A že je tu obrovská zodpovednosť za zdravie a život zverených detí. A, že tu treba aj vychovávať a rozsudzovať spory, atď.

„Když jsem hluboko do kapsy mněl“

Po jeho ľavej strane stojí starší človek, ktorý voľačo stíha počítať vo svojom mešci. Tu Repin zobrazil učiteľa, „když hluboko do kapsy mněl“.

Síce o posilnení postavenia učiteľa v spoločnosti sa už mnoho rokov hovorí veľa, reálne vyhliadky na zmenu zostávajú len zbožným prianím, krásnym snom, či naivitou. Práca učiteľa napriek svojmu otrockému charakteru zostáva nezaplatená. Tu vás prosím, vážení vedúci pracovníci, majte to vždy na pamäti. Nikdy sa nevyhrážajte v zborovni, že im všetkým siahnete na ich odmeny. Pretože niet tých peňazí, ktorými by ste dokázali ich prácu spravodlivo odmeniť. (Samozrejme, ak je potrebné niekoho napomenúť za pedagogický prešľap, tak to urobte, ale medzi štyrmi očami.) Taktiež treba jasne definovať prácu učiteľa. Tá nemôže vychádzať z vašich potrieb, alebo z potrieb školy, ale jedine z objemu finančných prostriedkov, ktoré ste mu reálne schopní vyplatiť ako odmenu za jeho vykonanú prácu. Len tak si zabezpečíte lojálnych zamestnancov, ktorí budú ochotní zostať na vašej škole dlhšie ako jeden školský rok. V tejto súvislosti sa dotknem aj krúžkovej činnosti. Nečudujte sa, že mnohí učitelia ju odmietajú robiť. Koniec-koncov už aj predavač novín na ulici si dokáže za hodinu privyrobiť viac ako učiteľ za hodinu krúžkovej činnosti. Avšak dôležité je pochopiť ešte jednu vec: že krúžková činnosť je práca naviac, niečo ako brigáda. A dospelý človek, či už muž alebo žena, ktorí majú rodinu, nepotrebujú dva alebo tri zamestnania, kde potroške niečo zarobia na prežitie. Nie, oni chcú jednu poriadne zaplatenú robotu. Ak svoju robotu nemajú zaplatenú, nečakajte, že vám budú ťahať vašu bárku v rámci dobrovoľnej výpomoci. To je namaľované na tom obraze.

Zbabelec

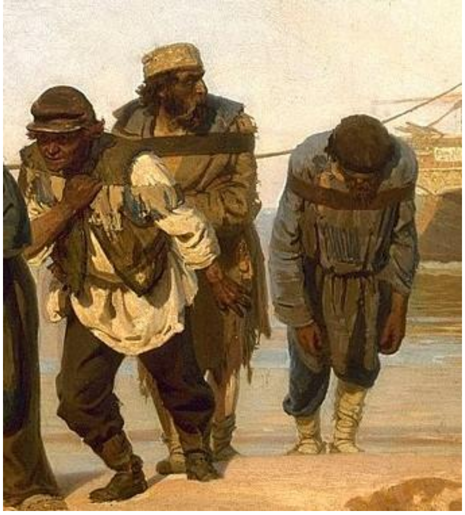
Za týmto človekom s mešcom sa schováva zbabelec.

Existuje veľmi veľa vedúcich pracovníkov, ktorí by chceli mať vo svojom učiteľskom zbore práve ľudí tohto typu, podľa možností, čo najviac zastúpených. Pretože to sú ľudia, ktorí držia hubu a krok. Avšak musím vás, spolu s Repinom, vyviesť z omylu. Títo ľudia vám vašu lodičku tiež moc nepotiahnu. Ak chcete dosiahnuť na vašej škole progres, musíte sa otvoriť diskusii, konfrontácii s inými názormi ako je ten, ktorý vás včera večer napadol. Neobklopujte sa zbabelcami a nepodporujte vo vašom učiteľskom zbore ľudí so sklopenými ušami. Obklopte sa kreatívnymi ľuďmi a dovoľte im kreatívne myslieť. Povzbudzujte ich v kreativite a chváľte každého, ktorý do diskusie prispeje svojim názorom; a to aj v prípade, že sa ho nakoniec nerozhodnete podporiť. Mnohé z myšlienok budú nerealizovateľné, ale práve v tomto bode je vaše miesto a vaša úloha. Vy to celé korigujte, hľadajte cestu, hľadajte spôsob, čo a ako by sa z toho dalo realizovať. Nebojte sa toho.

Prítomnosť, Minulosť a Budúcnosť

Na chvoste nášho voja vidíme tri postavy, ktoré spolu nejako súvisia. Ten prvý je nádherný, sústredí sa na svoju činnosť a v pokore kladie nohu a ťahá loď dopredu. To je človek, ktorý žije v prítomnosti. Druhý sa obzerá a spýtavým pohľadom sleduje, koľko sme už toho prešli. Ten tretí zúfalec, zúfalo hľadí do budúcnosti, a je ňou absolútne zdeptaný.

Tieto tri súcna vo svetovej literatúre najlepšie opísal C. S. Lewis vo svojich listoch Rady skúseného diabla. Niekoľko myšlienok:



„Prítomnosť je ten bod, v ktorom splýva čas s večnosťou. Ľudia vnímajú prítomný okamžik (a jedine ten prítomný okamžik) podobne, ako Boh vníma celú skutočnosť; len v tomto okamžiku sa im ponúka sloboda a realita.

Nepriateľ by si teda prial, aby sa nepretržite zaoberali buď večnosťou (teda ním samým), alebo Prítomnosťou;…

A my ich musíme odlúčiť od večnosti i od Prítomnosti. Preto niekedy človeka zvádzame k životu v Minulosti. To má ale obmedzenú cenu, pretože oni minulosť do istej miery poznajú; povahu má pevne danú a tým sa podobá večnosti.

Oveľa lepšie je povzbudiť ich k životu v Budúcnosti. K nej smerujú všetky ich vášne, takže myšlienky na Budúcnosť v nich vyvolávajú nádej a strach. Okrem toho oni Budúcnosť nepoznajú, takže pokiaľ ich donútime o nej premýšľať, budú myslieť na neskutočné veci. Skrátka: Budúcnosť sa podobá večnosti zo všetkého najmenej.

Preto takmer všetky neresti vychádzajú z Budúcnosti. Vďačnosť hľadá do Minulosti a láska do Prítomnosti; strach, lakomstvo, zmyselnosť a ctižiadosť hľadia vpred.

Nepriateľ má najradšej toho človeka, ktorý po celodennej práci pre dobro budúcej generácie všetko pustí z hlavy, zverí celú záležitosť Nebesiam a hneď je zase trpezlivý alebo vďačný podľa toho, čo práve súčasná chvíľa vyžaduje.

Ale my chceme, aby človeka desila budúcnosť ako čarodejnica…

My chceme, aby sa celá ich rasa večne naháňala za niečím nedosiahnuteľným – aby nikdy neboli v súčasnosti čestní, láskaví ani šťastní, ale aby všetko skutočné, čo v Prítomnosti dostávajú, hromadili k spáleniu pred oltárom Budúcnosti.“[32]

Povzbudzujte svojich učiteľov k životu v prítomnosti, len tam môžu zažiť šťastie. Nie je to vôbec jednoduché, stačí málo a človek uviazne na plytčine minulosti, či narazí na skaliská budúcnosti.

Melancholik

Vedľa mladíka si pot z čela utiera melancholik. Áno, to je človek, ktorý sa bude neustále sťažovať, a už ráno bude na smrť unavený. Poviete si: „Tak takých mám v zborovni najviac.“ Je to tragikomické, ale je to pravda. Prečo je to tak? Kardinál Tomáš Špidlík, veľký znalec slovanskej duše, hovoril: „Melanchólia to je slovanský problém.“ Zaiste to súvisí aj s našim podnebným pásmom. Ba dokonca aj v rámci maličkého Slovenska sa nájdu rozdiely. Zima na horách a zima na Podunajskej nížine je celkom iná. Keď je človek dlhé časové obdobie

[32] Lewis, C. S.: Rady zkušeného ďábla. Návrat domů : Praha, 2003, ISBN 80-7255-063-2, s.73-76.

obklopený sivou, hnedou a ich odtieňmi, to naozaj nerobí dobre na človeka umoreného psychicky náročnou prácou. Liekom je pohyb, slnko, umenie a humor. Človek, ktorý má psychicky náročnú prácu, potrebuje športovať. Zima celkom ináč prejde, keď si vyrazíte na lyžovačku. Nato však potrebujete financie. A sme opäť pri mešci. Učiteľ potrebuje peniaze na neustále štúdium, na nakupovanie kníh, a mal by byť schopný kupovať si aj drahé knihy, ale potrebuje aj peniaze na udržanie si svojho psychického zdravia, na letnú i zimnú dovolenku, na prevádzkovanie auta, na dôstojné bývanie, na živenie rodiny,... Učiteľ nemôže byť žobrák.

Flegmatik

V modrej košeli s fajočkou, klobúčik posadený do čela s ľahkým krokom si životom kráča flegmatik.

Ten pôjde svojim krôčkom. Ten sa nebude rozčuľovať, ani naháňať, tomu vyhorenie nehrozí. Bez veľkých emócií, s dobrým psychickým zdravím, šťastný to človek flegmatik.

Čo je toto za človeka?

Dlho som sa snažil pochopiť túto postavu, no nedarilo sa mi to. Skúmal som jeho šaty, jeho čiapku, jeho postoj, no najmä jeho tvár, jeho pohľad. Čo je toto za človeka? Vravím si, takéhoto človeka vari ani nepoznám. A už som sa chcel vzdať. Hovorím si, ešte budem musieť viac spoznať život, kým túto postavu pochopím. Možno tak za päť rokov… Ale štvalo ma to. A tak som si na pomoc zavolal svojho najstaršieho syna. Vysvetlím som mu všetky postavičky, ktorým som ako tak rozumel, niektorým len sčasti. On sa pozrel na ten obraz a hovorí mi: „Tatino, to je jednoduché. Pozri ja ti to vysvetlím. Ten burlak vpredu, o ktorom hovoríš, že má šaty ruského popa, to je Ježiš Kristus. No a ten kučeravý po jeho pravej ruke, to je lotor, ktorý je ukrižovaný z jeho pravej strany. A tento, ktorému nerozumieš, to je lotor ukrižovaný z jeho ľavej strany.“ A mal pravdu. Giacomo Biffi povedal: „Existujú iba dva spôsoby ako prežiť tento život: buď budeš ukrižovaný z pravej strany, alebo z ľavej strany Krista. Buď sa budeš kajať, alebo rúhať.“

Môj syn potom odišiel a ja som sa ešte 15 minút uprene díval do tváre tohto človeka, do jeho očí, keď zrazu mi prešiel mráz po chrbte a vykríkol som: „Ale veď to som ja cholerik!“

Tento človek sa díva von z obrazu na všetkých, čo popri obraze prechádzajú a svojimi očami na nich kričí: „Pozrite sa na mňa, ako ja ťahám!“

To sú ľudia, ktorí vždy všetko vedia urobiť najlepšie. Nenechajte sa rozhodiť povahou týchto ľudí, rešpektujte ju, trošku ju ignorujte, trošku ju kroťte, ak sa dá. Oni jednoducho takí sú. A podobne ako flegmatika, melancholika, či sangvinika nezmeníte mávnutím čarovného prútika, ani s cholerikom len tak nepohnete.

Koho zvoliť do vedúcej pozície?

Je nad slnko jasnejšie, že nie každý z týchto ľudí sa hodí na vedúcu pozíciu. Ale tí dvaja z ľavej a z pravej strany Krista, tí by prichádzali do úvahy.

Ak si však zvolíte cholerika, tak ten všetkých ostatných zotročí, pretože ten neustále kričí: „Pozrite sa na mňa, aký som ja dobrý.“ Nad toho niet. Takže ten život v zborovni bude dosť ťažký. Navyše si musíte uvedomiť, že mnohí z tých ľudí vzadu, sú už jednou nohou na odchode. Ak máte na škole vysokú fluktuáciu zamestnancov, pričom nemusí ísť len o pedagogických zamestnancov, tak je veľmi pravdepodobné, že tí ľudia odchádzajú, lebo nemôžu zniesť tlak onoho perfekcionistického cholerika.

Ak ste to práve vy, nevzdávajte to. Každý nejaký sme. Kroťte toho cholerika vo vás, čo to dá. Aj keď viem, že je to ťažké.

Ak by ste si zvolili toho kučeravého, ktorý hľadí na Krista a kopíruje jeho krok, to by ste mali vyhraté. Ten by bol fakt dobrý.

Bez ohľadu na vaše vierovyznanie...

Bez ohľadu na vaše vierovyznanie, v poprední na obraze je namaľovaný Kristus, ktorý istým krokom ťahá celú spoločnosť proti prúdu. Zo zadu to istia ešte dve osoby: Kapitán lode a Kormidelník; Otec a Duch Svätý. To je úplný výklad tohto obrazu.

Literatúra

[1] Ilia Efimovich Repin (1844-1930) - Volga Boatmen (1870-1873).jpg

[2] https://images.app.goo.gl/h2NMnbQxki8cFZPY8

[3] https://images.app.goo.gl/CAJQg9ndJgZ5h7cn6

[4] https://images.app.goo.gl/tjVpcaobNpCgE79w5

[5] https://images.app.goo.gl/ERKXSFBM3xJcRb8h8

[6] https://images.app.goo.gl/79ggW7dPug7of9Cj6

[7] https://vsuete.com/barge-haulers-volga-monument-samara/

[8] https://adsby.ru/sk/repin-ilya-efimovich-the-history-of-the-picture-burlaki-on-the-volga-the-truth-and-fiction-in-the-burlacs-on-the-volga-what-actually-was-burlak-labor.html

[9] Binmore K.: *Teorie her.* Dokořán : Praha, 2014, ISBN 9788073635497.

[10] Alex Bellos: *Alexova dobrodružství v zemi čísel,*, Praha, Dokořán, 2015, ISBN 9788073635343

[11] Lewis, C. S.: Rady zkušeného ďábla. Návrat domů : Praha, 2003, ISBN 80-7255-063-2.

Mgr. Ľubomír Družbacký,
Ľubomír Družbacký GOOD IDEA,
popularizátor matematiky,
Zelenečská 103,
SK – 917 02 Trnava
e-mail: lubo.dr@gmail.com

KRYPTOANALÝZA ČÍSLA 666

DRUŽBACKÝ ĽUBOMÍR

ABSTRAKT. *„V tomto je múdrosť: Kto má rozum, nech spočíta číslo šelmy. Je to číslo človeka a jeho číslo je šesťstošesťdesiatšesť“ Zjv 13,18. Bohužiaľ, niekoľko dlhých storočí sa to nikomu nepodarilo. A tak som si povedal: „A čo ja, nemám dostatok rozumu? A spočítal som číslo šelmy.“ Tento príspevok je naozaj plný prekvapivých nových vecí, zistení a objavov, dokonca aj pre mňa samotného. Ten názov sa mi páči, lebo je výstižný a pritom najmenej prezrádza, o čom celý tento príspevok je. Milujem moment prekvapenia a rád ho sprostredkovávam aj svojim poslucháčom, či tentokrát čitateľom. Avšak tu vám to musím celé priblížiť. Ide o kryptoanalýzu celého hebrejského alebetu. V príspevku sa dozviete množstvo nových informácii o hebrejskom alefbete a o jeho doteraz skrytom symbolickom význame. Ďalej vám v príspevku odhalím prvé tri kapitoly knihy Genezis, ako ste ich ešte nikdy nepočuli, ba dostaneme sa aj k židovskému humoru. Opíšem vám dramaticky príbeh ako som našiel Adama a Evu, ale i faraóna Exodu. Prezradím vám, kto je redaktorom príbehov v knihe Genezis a ako Izraelský národ stratil pravý význam alefbetu. Ďalej sa dozviete šokujúce informácie o hebrejskom číselnom systéme a v tejto súvislosti vám ukážem ako správne počítať egyptské rany a Desatoro, ktoré desatorom vôbec nie je. Priblížim vám teológiu Trojice tak, ako ste to určite nikdy nepočuli. Ukážem vám ako používa autor Apokalypsy symboly hebrejského alefbetu a prezradím vám aj jeho meno. No a nakoniec vám prezradím skrytý význam čísla 666. Možno si poviete, že je tam veľa teológie. Dobrý postreh. Ale ak by ste si prečítali Matematiku života od I. Stewarta, tak by ste zrejme povedali, že je tam veľa biológie. Teológovia si možno povedia, že je tam veľa matematiky, že tam nie je nič o viere. A ak by som to ukázal režisérom, tí by zase povedali, že je tam veľa matematiky a veľa teológie. Avšak ja som prišiel na to práve vďaka tomu, že v mojej osobnosti žijú teológ, matematik a režisér v harmonickej jednote. Ale nemyslím si, že som na tieto viac ako 3000 ročné záhady prišiel sám. Je to zjavená pravda.*

Príspevok by vydal aj na samostatnú knihu, preto ponúkame možnosť prečítania na adrese: http://www.wilma.sk/documents/8c135d88b98dd26cfaede6112f22f491

Mgr. Ľubomír Družbacký,
Ľubomír Družbacký GOOD IDEA,
popularizátor matematiky,
Zelenečská 103,
SK – 917 02 Trnava
e-mail: lubo.dr@gmail.com

STRACH Z MATEMATIKY

HORŇÁKOVÁ MARTA

Abstrakt: *Príspevok sa zaoberá príčinami strachu detí v školách z matematiky v kontexte včasného stresu, skúseností a daností dieťaťa a celkovej životnej situácie. Podčiarkuje dôležitosť rozpoznania závažností problémov a možnosti prevencie a terapie.*

Strach a učenie

Strach nie je dobrý partner pre učenie. Malý strach môže zmobilizovať úsilie, ale ak zosilnie, lebo dieťaťu sa dlhodobo nedarí mať úspech, získať pochvalu („emočný zisk") , nedarí sa mu ani dosiahnuť stav vnútornej rovnováhy (spokojnosti), zvyšuje sa v ňom vnútorné napätie a stres. Treba vedieť, že neustále konfrontovanie dieťaťa so svojimi chybami, ak zároveň nemá dosť predpokladov aby splnilo očakávanie okolia, vyvoláva sociálny stres aj vtedy, ak sa dieťa nestretne s výčitkami a sklamaním u dospelých. Veľký stres mobilizuje nervový systém pre obranu, reakcia je útek (do pasivity, šaškovania, alebo fantázie - ak nemôže odísť z triedy) a následne hormóny blokujú procesy učenia. Pre učenie je potrebný opačný stav – uvoľnenie, pohoda, sociálna opora.

Mozog nie je vybavený, aby vedel pracovať v chronickom a silnom strese a súčasne sa učiť novému (Adámek, 2014). Učiteľ niekedy v snahe deti primäť k spolupráci, napomína, zvýši hlas, pohrozí. Ale dieťa, ktoré má dlhšiu cestu pre naučenie, potrebuje podporu, nie ďalší stres, aby sa mohlo rozvíjať. Pomáha učenie v skupine detí postavené na skúsenostiach v bežnom živote, dávanie inšpirácie, vytváranie príležitosti skúmať účinok a následok, objavovať súvislosti a riešiť problémy v tíme (brain storming). To vedie k premýšľaniu: čo?, prečo? a ako je dôležité, čo zmeny znamenajú, ako sa veci môžu vyvinúť a pod.

Všetci sa učíme iba zo skúsenosti. Každé dieťa je skúsenostne, vývinovo, emočne, mentálne niekde inde. Rozdiely medzi nimi môžu byť aj veľmi veľké. Rozmanitosť v súčasnom modely vyučovania brzdí a zaťažuje. Učiteľ bojuje s nezáujmom, svojim sklamaním, hľadá niečo „úžasnejšie", farebnejšie, najlepšie digitálne, aby zaujal, stupňuje tlak. To ale situáciu dieťaťa s bariérami pre učenie spravidla nerieši. Adámek už pred desaťročím upozorňoval na potrebu hľadať možnosti, ako zohľadniť nastavenie dieťaťa, aby mohol nastať súlad medzi vnútornými potrebami dieťaťa a vonkajšími podnetmi a požiadavkami. Inak sú dôsledky pre dosť dieťa kruté. Inkoherencia podnetového prostredia (Adámek, 2014 s. 152), spolu s emočnou záťažou (nezvládnuteľná úloha, sklamanie učiteľa, zlé hodnotenie, sklamanie doma), a emočnou depriváciou (neprijatie dieťaťa, presvedčenie o jeho neschopnosti) patria k najrizikovejším zdrojom vývinovej psychopatológie v kontexte duševných porúch a ochorení.

Skúsenostné učenie mení kognitívne funkcie – všetko naučené sa zapíše do génov a neskôr je to možné využiť. Mozog sa permanentne mení v závislosti od toho, čo človek robí. Je to najdynamickejší orgán v našom tele. Dlho sa myslelo, že duševná práca mozog nemení. Ale v posledných rokoch sa dokázalo, že narastajú synapsy tam, kde sa mozog využíva. Naopak to čo sa nepoužíva, veľmi rýchlo zaniká. Zanikanie synáps podporuje stres (Spitzer , 2012), ale aj vývinové etapy. Najmasívnejšie zanikanie mozgových spojení nastáva v puberte – mozog si robí miesto pre nové poznatky Vďaka tomu sa môže špecializovať - stávame sa tým, čo robíme.

Príčiny neúspechu v matematike

Spravidla sa nedá hovoriť len o jednej príčine – je ich tak veľa, že možno sa iste nepodarí povedať všetky. Niektoré majú korene v genetickom vybavení, iné v prenatálnom a ranom vývine, iné v prostredí, alebo sú spojené s jedinečným spôsobom učenia. Z nášho pohľadu môže ísť o:

- Dôsledok včasného stresu počas prenatálneho a raného obdobia - ktorý mení vytváranie neurotransmiterov (dopamín, nordadrenalín, serotonín) a dieťa sa stane citlivejšie na vnímanie stresu (zvýšenie hlasu, náznak nespokojnosti, netrpezlivosti, neúspech), cíti sa ohrozené, reaguje obranou, odmietaním. Napr., myelizované časti mozgového kmeňa, ktorý spája obe mozgové hemisféry sa v dôsledku včasného a masívneho zaplavenia stresovými hormónmi oslabujú, bunky glií, ktoré majú funkciu zásobovania, pracujú nedostatočne a dieťa sa preto rýchlejšie unaví, klesá jeho pozornosť, nevie spracovať informácie. (Teicher et al. 200, s. 9) Včasné zanedbávanie spôsobuje aj zvýšený výskyt laterality a zníženie integrácie oboch hemisfér, tým sa narušuje kooperácia (ruka-ruka, oko-ruka), dieťa prežíva viac stresu, klesá imunita, stúpa sklon k chronickým ochorenia. Zhoršuje sa koordinácia pri pracovných postupoch, aj keď tam nie je žiadne neurologické poškodenie. Dieťa má problém už so sčitovaním, odčitovaním, s orientáciou v úlohách, s ich prepisom do zošita.
- Emočné preťaženie, traumatizácia – ak dieťa žije v náročných podmienkach v rodine (so psychicky alebo inak vážne chorým, závislým rodičom), a zažíva emočnú depriváciu, nie je jeho mozog riadne pripravený pre učenie. Napr. stačí, ak nemá správnu výživu, možnosť v noci dostatočne dlho a bez rušenia spať. Mozog je oveľa aktívnejší v noci, kedy sa naučené ukladá. Povrchný a prerušovaný spánok tomu bráni. Matka povie: „Doma to vedel, učili sme sa, nechápem, že to tu nevedel.“ Učiteľ neverí, matka nedôveruje, obaja vinia dieťa z nezdaru a ono stráca u nich aj sociálnu oporu.
- Málopodnetné prostredie, ktoré neumožňuje dieťaťu získať skúsenosti, na ktorých by mohlo stavať v škole. Dieťa, ktoré nemá skúseností z hier a radosť z objavovania, nechápe súvislosti, jednoducho nevie pre seba vyťažiť z ponuky vzdelávania. Potrebuje ponuku, ktorá zohľadní to, kde ono je. Podobne deti, ktoré prídu hladné a zle oblečené – majú aktívne základne potreby a potreba poznávať je v úzadí.
- Deti so zdravotným problémom majú učenie ťažšie, prichádza u nich skôr k únave, diskomfortu, nerovnováhe. Ak majú bolesti, svrbenie, záchvaty kašľa, vstávajú unavené a ich mozog v škole nemôže vykonať dobre svoju prácu.
- Funkčné oslabenie, ktoré vedie k ťažkostiam ako vývinové poruchy učenia. Sú dôsledkom oslabenia príjmu a spracovania vnemov z vonkajšieho prostredia Poruchy hmatového vnímania sťažujú orientáciu na ploche, v priestore, v ovládaní nástroja na písanie (prílišný tlak), pri udržiavaní poriadku okolo seba, vedú k rýchlemu nástupu únavy. Deti sú často odmietané okolím pre pomalosť, neobratnosť, negativizmus. Majú problém s pochopením slovných úloh, výkladu učiteľa, s prepisovaním z tabule. Ak je oslabená zraková alebo sluchová diferenciácia, poruchy rovnováhy, oslabuje sa aj pamäť, lebo to, čo si nevieme presne uvedomiť, nevieme si ani zapamätať.

  Poruchy učenia sú fascinujúcou témou – každé dieťa je iné a je skutočnou výzvou pre učiteľa. S poruchou učenia v matematike dyskalkúlia/akalkúlia sa stretávame v knihách zriedka, ale v praxi vari každý učiteľ už mal také dieťa.

  Porucha reči - vývinová dysfázia, sťažuje dieťaťu nielen vyjadrovanie pre slabú slovnú zásobu, ale aj porozumenie hovorenej a písanej reči. Tie najnápadnejšie deti sú podchytené a dostane sa im pomoci, ale je mnoho deti s miernejším stupňom poruchy, ktoré nie sú ani zachytené: dieťa nevie, že iné deti počujú inak a naučí sa nedostatky kompenzovať ak to len ide. Často ide o veľmi tvorivé deti. Príklad – žiak už v 1.triede plynne a so správnou intonáciou čítal, počítal do sto, ale očividne bol v triede stratený – díval sa do okna a nikdy nevedel, čo pani učiteľka povedala. Bol tichý a preto až po pol roku, keď sa začal zajakávať, bolo zjavné, že má nejaký problém. To už mal rozvinutú aj školskú neurózu: Dostal tlmivé lieky, ktoré ho ešte viac vzdialili od diania v triede. Až keď bol štvrták sám povedal (nahnevaný, že prečítal pol knihy, ale stále nevie o čom to bolo), že čítanému vôbec nerozumie. Matematický príklad si potreboval 3-4 razy prečítať, aby vedel o čom je. Z toho dva razy nahlas – to v škole nemohol. Veľmi trpel – počas školského roku ani nerástol. Mal vysoké IQ a schopnosť naučiť sa veľké celky, ale nie malé časti učiva, čo v praxi znamenalo, že sa v jeden deň pripravil len na jednu hodinu.

- Postavenie žiaka do pozície slabého, zaostalého „chúďatka“. Tieto deti sa potom utiekajú do pasivity a prestanú bojovať (patologická adaptácia), reagujú aj svojim telom - utlmí sa ich hladina serotogénnej aktivity. Klesá prah odolnosti, ľahšie agresívne vybuchnú, lebo sa cítia pritlačené k múru. Vnímajú sa ako zle hodnotné. Seligman (Adámek, 2014) tento model naučenej bezmocnosti charakterizoval ako:

- emocionálny rozvrat
- redukciu motivácie
- kognitívny deficit

s následkami:

depresia ⟷ patologická adaptácia

Obrázok 1. Model naučenej bezmocnosti

Aby sme boli presní - funkčné oslabenia sa nachádzajú v každom mozgu, záleží len od ich vzniku, miesta, rozsahu a nakoľko a v ktorej oblasti sťažujú fungovanie. Ich cvičením možno dosiahnuť ich prelomenie.

Pripomeniem známy príbeh (Doidge, 2012. s. 39-45) Barbary Arrowsmith Youngovej (nar. 1951 v Ontáriu) Ako dieťa mala diagnózu nerovnomerný vývin a jej schopnosti sa javili v škále od genialnych po úplne zaostalé. S tým bolo spojené množstvo praktických nedostatkov. Barbora ťažko vyslovovala slová, zle vnímala priestor (narážala), zabúdala svoje veci, nerozumela súvislostiam Nechápala gramatiku, ani matematické pojmy, nepoznala hodiny, zle čítala, nechápala pravidlá. Vedela si zapamätať napr. že 5x5 je 25, ale nechápala prečo, Veľmi usilovne sa učila texty a fakty naspamäť a tak prechádzala triedami, Mala geniálnu pamäť, ale ničomu nerozumela: žila akoby v hmle vo vedomí „nezvládam“. Začala študovať vývin dieťaťa, aby lepšie porozumela sebe. Kým niekto prečítal 1-2 razy text, ona musela aj dvadsaťkrát, aby aspoň čiastočne pochopila, o čom to je. Spala 4 hodiny denne. Keď mala 28, čítala článok o tom, že aktivita môže zmeniť štruktúry v mozgu. Začala sa začať so svojou najslabšou funkciou – poznávanie hodín. Mnoho týždňov denne cvičila niekoľko hodín a potom zrazu začala chápať hodiny, následne pochopila aj gramatiku a matematiku. Všimla si, že začala chápať význam rozhovorov medzi ľuďmi – začala žiť. Založila školu pre deti s poruchami učenia. Vypracovala podporné metódy. Zistila, že obkresľovanie zložitých línií stimuluje neuróny v premotorickej oblasti a následne sa zlepšujú základné oblasti: reč, písanie i čítanie. Učenie naspamäť z nahrávok pomáhalo deťom zlepšovať sluchovú pamäť, tréning neverbálnych sociálnych signálov zase podporoval funkciu plánovania a kontroly vlastného správania. Zistila, že pokiaľ sa podporia slabé funkcie a prelomí sa istá bariéra, ľudia získajú prístup k schopnostiam, ktoré predtým boli pre nedosiahnuteľné.

Čo možno urobiť už dnes?

Veľa sa dá urobiť i bežnej triede. Pokiaľ je zrejmé, že dieťa je bezradné, stráca odvahu a prejavuje známky dyskomfortu (váľa sa, vzdychá, neudrží pohľad, nedáva pozor) je podľa Adámeka 2014, s. 6) potrebné pomôcť dieťaťu nájsť rovnováhu – pomáha príbeh, humor, hra, pieseň, pohyb. Adámek vyslovil požiadavku, aby sa dnešný pedagóg naučil rozpoznávať vonkajšie signály preťaženia, aby poznal možnosti obnovy rovnováhy a vedieť subklinicky intervenovať, ak už prišlo k narušeniu stability dieťaťa, alebo k niektorým poruchám správania.

- V citovo exitovanom stave (úzkosť, dezorientácia, strach zo zlyhania, z trestu) treba dieťa najprv upokojiť a až potom očakávať spoluprácu. Ak je pre strach myslenie a prežívanie zúžené. tak schopnosť dieťaťa vidieť, myslieť, plánovať, domýšľať dôsledky svojho správania je limitovaná. Dieťa si pomáha tak, že podľahne nutkaniu hýbať sa (vyskakuje, vyrušuje) – pohyb vždy pomáha znižovať stres. Môže tiež skratovo reagovať v závislosti od jeho schopnosti (frustračnej tolerancie) vyrovnávať sa zo psychickým tlakom, lebo človek sa správa ako dynamický systém (Adámek, 2014).
- Predchádzať neurotizácii – ku ktorej dochádza ak dieťa veľmi chce a nemôže uspieť.

Úloha musí byť ťažká, ale zvládnuteľná. Deti vedia profitovať, ak pracujú v skupine, kde si pomáhajú. Príliš ľahké úlohy nevedú k dopamínovej odmene ani vtedy, ak je dieťa pochválené. Opakovanie rovnakých úloh, ktoré už dávno zvláda vedie k nude a strate záujmu.

- Dbať na pohodu a priateľskú klímu, pre úzkostné deti posilniť pocit bezpečia (neusádzať ich s deťmi, ktorí stále dobiedzajú, zamedziť posmievaniu a ostrakizmu), umožniť oddýchnuť si, utiahnuť sa do kútika.
- Problémy, ktoré sa objavia riešiť nielen odbornými zamestnancami ale aj s rodičmi. Nie nakladať na nich úlohy, ale zapojiť do spolupráce. (Ako riešite doma, keď sa stane, že.... Ako sa dieťa správa, keď je unavené?)
- Nedávať diagnózy, nenálepkovať, neľutovať. Brať každé dieťa s potenciálom, ktorý možno podporiť. Dávať nádej.
- Učenie previazať so situáciami z bežného života, aby deti vedeli naučené využiť. Inak to musia zabudnúť. (To je zákon mozgu: use it or los it)

Ak má dieťa problémy, neurológ Utz (2006) odporúčal neriešiť problém, ale zamerať sa na samotné možnosti riešenia a viesť k samostatnosti. To znamená odpozorovať a podporovať vlastné stratégie dieťaťa, dávať mu priestor pre výber z možností, pre rozhodovanie, pre objavovanie významov. Neustále konfrontovanie s chybami, s neúspešnosťou a nemožnosťou splniť očakávanie okolia, vyvoláva sociálny stres aj vtedy, ak sa dieťa nestretáva s priamym odmietaním

Pokiaľ už mali deti nabrali zlé skúsenosti, a vytvorili si obranné, alebo útočné schémy správania, potrebujú (Utz, 2006) dlhší čas (mesiace až 1-2 roky), aby sa ich nervový systém zotavil a aby sa im vytvorili nové neuronálne siete na základe dobrých skúsenosti, aby sa mohli správať zrelšie. Ani odborní zamestnanci neurobia s nimi zázraky na počkanie, to ale nie je dôvod, aby deti nedostali pomoc.

Postupy	Ciele
• Neodstraňovať problémy jednotlivého dieťaťa, ale zamerať sa na možnosti riešenia situácií . • Viesť k samostatnosti - odpozorovať a podporovať vlastné stratégie dieťaťa. • Dať priestor pre výber z možností, pre rozhodovanie, pre objavovanie významov. • Umožniť zapojiť sa, dať zážitok MY.	Zabrániť: • neustálemu konfrontovaniu s chybami, • strachu pre nemožnosť splniť očakávanie okolia, • vyvolávaniu sociálneho stresu pri odmietaní, • neurotizácii (poruche výkonu).

Obrázok 2: Pomoc odborných zamestnancov – liečebných pedagógov

Stále máme nádej, že raz aj liečební pedagógovia budú pomáhať riešiť učiteľom tieto problémy a že ich bude dosť. Lebo vždy znova musíme potrebu svojho odboru obhajovať a usilovať o prežitie. Vy potrebujete nás a my vás – ide o tímovú prácu.

Poďakovanie

Príspevok bol súčasťou projektu KEGA č. 0702UK-4/2019 Formovanie sa učiaceho spoločenstva v inkluzívnej materskej a základnej škole.

Literatúra:

[1] ADÁMEK, M. 2014. *Neuropedagogika.* Pardubice: FF UP. 2014. ISBN978-80-7395-829-9.

[2] ANDERLÍKOVÁ, L. 2014. *Cesta k inkluzi. Úvahy z praxe a pro praxi*. Praha: Triton, 2014, ISBN 978-80-7387-765-1.

[3] BACHE,. CH. M. 2015. *Živá třída. Vyučování a kolektívni vědomí*. Praha : Carpe Momentum. 2015. ISBN978-80-905334-2-4.

[4] BIELACZYC, K., COLLINS, A. 1999. *Learning Communities in Classrooms. A Reconceptualization of Educational Practice.* In: C. M. Reigeluth (Hrsg.): *Instructional design theories and models.* (Vol. II), Lawrence Erlbaum, London. s 269–292, 1999, ISBN 0-8058-2859-1.

[5] DOIDGE, N. 2012. *Váš mozek se dokáže změnit*. Brno: CEREBRUM PRESS. 2012. ISBN 978-80-264-0111-7.

[6] DOIDGE, N. 2012. *Váš mozek se dokáže uzdravit*. Brno: CEREBRUM PRESS. 2017. ISBN 978-80-264-1432-2.

[7] GRAWE, K. 2007. *Neuropsychoterapie*. Praha: Portál, 2007. ISBN 978-80-7367-311-6.

[8] GUGGENBÜHL-CRAIG, A. 2010. *Nebezpečí moci v pomáhajícich profesích*. Praha . Portál, ISBN 978-80-7367-809-8.

[9] HORŇÁKOVÁ, M. 2017. Komunikácia v inkluzívnej škole. Bratislava: UK v Bratislave, 2017, 115 s., ISBN978-80-2234416-0

[10] RAUNDORFER, A. 2006. *Ideen machen Schule. Eine innovative Schulen im Porträt.* Wien : Lit Verlag GmbH. 2006. ISBN 3-8258-9492-4.

[11] MEDINA, J. 2010. *Pravidla mozku dítěte.* Brno: Computer Press, 2010, ISBN 978-80-251-3619-6.

[12] MONTESSORI, M. 1985. *Grundlagen meiner Pädagogik*. Heilderberg , 1985. bez ISBN

[13] OSTATNÍKOVÁ, D. 2016. *Neurobiologická východiska ikluzívní pedagogiky*. In Lechta, V. (ed.). 2016. Základy inkluzívní pedagogiky. Praha: Portál, 2016, s. 110-123. ISBN 978-80-262-1123-5.

[14] POKORNÁ, V. 2010. *Vývojové poruchy učení v dětství a dospělosti*. Praha: Portál, 2010. ISBN978-80-7367-773-2.

[15] REIGELUTH, C.M. 1999. *Instructional design theories and models.* (Vol.II) Londýn : Lawrence Erlbaum, s. 269-292. 1999. ISBN 0-8058-2859-1.

[16] RAMACHANDRAN, V.S. 2013. *Mozek a jeho tajemství, aneb pátraní neurologů po tom, co nás činí lidmi.* Praha: Dybbuk. 2013. ISBN. 978-80-7438-080-8.

[17] SPECK, O. 2004. *Hirforschung und Erziehung. Eine pädagogische Auseinandersetzung mit neurobiologischen Erkenntnissen.* München Basel: Ernst Reinhardt Verl. 2008, 96 s. ISBN978-3-497-01959-5.

[18] SPITZER, M.. *Lernen. Die Entdeckung des Selbstverständlichen.* Hamburg : Archiv der Zukunft, 2006, ISBN 13 978-3-407-85832-0.

[19] THIES, W. 2014. *Inklusiver Unterricht muss guter Unterricht sein – und guter Unterricht ist inklusiv. Olpe 2014.*

[20] UTZ, H. E. 2006. *Zur Aktualität der Neurowissenschaften: Zwischen Machbarkeitsglauben, gediegener Aufklärung und der Fundierung bewärter heilpädagogischer Prinzipien.* Heilpädagogik.de, 2006/ 4, s. 3 –11

[21] UTZ, H. E. 2006. *Zur Aktualität der Neurowissenschaften: Zwischen Machbarkeitsglauben, gediegener Aufklärung und der Fundierung bewärter heilpädagogischer Prinzipien.* Heilpädagogik.de, 2006/3., s. 3-9, 2006/ 4, s. 3 –9

[22] WALSER, CH., 2010. *Auswirkungen von chronischem Stress auf das Gehirn und Lernen.* In: Schweizerische Zeitschrift für Heilpädagogik. Jg.16, 11-12/10. s. 6-11

prof. PhDr. Marta Horňáková, PhD.
Katedra liečebnej pedagogiky
PdF UK v Bratislava
Šoltésovej 4, Bratislava
Emali: m.hornakova.prokopy@gmail.com

KRITICKÉ MYSLENIE: INTEGRÁCIA FAKTOV A REALITY

HVORECKÝ JOZEF

ABSTRAKT. *Pod kritickým myslením mnohí predstavujú myslenie v duchu formálnych pravidiel a požadujú navýšenie hodinovej dotácie Logiky a Matematiky. Problematika je však zložitejšia. Treba si uvedomiť, že bez interakcie medzi osobami a ich poznatkami poznanie zostáva povrchné. K cieľu nás dokáže viac priblížiť sokratovský dialóg a podpora medzipredmetových vzťahov. Ukážeme, ako ich realizovať vo výučbe zábavným spôsobom.*

Úvod

Žijeme v dobe falošných správ, hoaxov a dezinterpretácie faktov. Za ideálnu zbraň voči takému mylnému chápaniu reality sa považuje kritické myslenie. Mnohí si pod ním predstavujú myslenie v duchu formálnych pravidiel a požadujú navýšenie hodinovej dotácie Logiky a Matematiky. V článku ukazujeme, že takéto chápanie problému je zjednodušené, preto nemusí viesť k želanému výsledku. Žiadna vedná disciplína sama o sebe nemá moc spasiť svet. Samozrejme, existujú postupy, ktoré nás dokážu k želanému cieľu priblížiť. V článku sa zameriame na dva z nich – sokratovský dialóg a podpora medzipredmetových vzťahov – s konkrétnymi ukážkami použiteľnými pri výučbe.

Cieľom vzdelávania by malo byť dosiahnuť stav, pri ktorom si žiaci a študenti osvoja tri základné činitele:

- Overené a poznatkami podložené dáta tvoria intelektuálny základ kritického myslenia.
- Na to, aby bol človek pripravený správne, rýchlo a s čo najmenšou námahou vykonávať intelektuálnu činnosť, potrebuje okrem poznatkov aj zručnosť, získanú predchádzajúcou skúsenosťou.
- K správnej aplikácii poznatkov treba mať pozitívny a uvážlivý postoj k ich využívaniu vo všetkých životných situáciách.

Tradičné postupy vzdelávania postavené na autorite učiteľa a na memorovaní ním odovzdávaných poznatkov nespĺňajú tieto očakávania. Reforma vzdelávania musí by postavená na diskusii učiteľa so žiakmi a na ich vzájomnom porozumení. Myslenie v duchu aristotelovskej logiky je významnou pomôckou. Umožňuje odhaliť nelogické tvrdenia a zjavné rozpory v názoroch hovoriaceho. V školskom prostredí najčastejšie vychádza z predpokladu, že zúčastnené strany – učitelia a žiaci – sa snažia spoločne o spoznanie objektívnej skutočnosti.

Lenže práve v oblasti falošných správ tento krok sám o sebe nestačí. Vtedy je totiž partner presvedčený o správnosti svojich tvrdení a nie je ochotný hľadať v nich chybu. „Mať v tvrdeniach chybu“ a „pokúsiť sa ju odhaliť“ sú totiž dve odlišné aktivity. Vtedy vstupuje do hry kombinácia schopností empatie a asertívnosti.

Všimnime si tieto riziká na jednej z definícií v článku [1]. Podľa nej je kritické myslenie “*používanie tých kognitívnych zručností a stratégií, ktoré zvyšujú pravdepodobnosť želaného výsledku. Tento termín je používaný na opis myslenia, ktoré je užitočné, odôvodnené a zamerané na cieľ*.“ Z toho vyplýva, že aj kritické myslenie nesie v sebe veľký podiel subjektivity. Ten môže vyplývať z viacerých faktorov, medzi ktoré patria:

- Vzdelanie: Vzdelaním získavame kognitívne zručnosti a stratégie riešenia problémov. Rôzne vzdelanie preto vedie k rôznym prejavom kritického myslenia bez ohľadu na to, či si to dotyčný uvedomuje alebo nie.
- Cieľ: Keďže ide o účelovo zamerané myslenie, vedúce k určitému cieľu, v „nekonečnom“ svete faktov bude riešiteľ vyhľadávať tie, ktoré ho skôr privedú k výsledku. To môže znamenať ignorovanie tých, ktoré protirečia výsledku.

Preto je namieste opierať sa o voľnejšiu definíciu [2], ktorá ho opisuje ako „*sadu zručností myslenia, ktoré zlepšujú naše poznanie, súvisia s motiváciou dopátrať sa pravdy a otvorenosťou k novým myšlienkam*“. Budeme ju používať, lebo hlása otvorenosť a mlčky predpokladá, že proces nikdy nekončí. Je preto vhodná v pedagogickom procese. Ten totiž musíme považovať za jeden z prameňov, začiatok a základ celoživotného rozvoja kritického myslenia. V článku ukážeme, ako ho rozvíjať tak, aby hľadanie malo zároveň sociálny charakter. Veď „dopátrať sa pravdy“ predpokladá interakciu s ostatnými, ktorí ju tiež hľadajú – každý po svojom a trochu inak.

Zároveň bude je v záujme učiteľa cieľom postupovať zábavným spôsobom. Žiak možno strpí nudne pôsobiace hľadanie pravdy v škole – lebo musí. Je však nepravdepodobné, že by chcel podobnú nudu bez vynútenia absolvovať aj vo svojom ďalšom živote. Ak sa k nemu nebude pravidelne a dobrovoľne ho rozvíjať, školské vzdelávanie bolo zbytočným plytvaním času.

Kritické myslenie - princípy

Za základné vlastnosti kritického myslenia sa považujú:

- Kredibilita: Zdroje informácií si treba preverovať a kontrolovať, či ich za kredibilné považujú aj ďalšie dôveryhodné zdroje, Kritériom kredibility je opakovaná spoľahlivosť.
- Analyzovateľnosť: Opis získania podkladov a tvorby záverov musí byť dostatočne detailný na to, aby ho bolo možné replikovať inými osobami.
- Transparentnosť: Žiadne dáta a postupy sa nevynechávajú ani nezatajujú (napríklad preto, lebo nesedia do schémy)
- Užitočnosť: Výsledok myslenia rozširuje naše poznanie a dennú prax.

Ukážme si to na príklade. Predstavme si skupinu bežne vzdelaných jedincov (geograf, ochranár, developer a mladomanželia). Ukážeme im fotografiu (obr. 1) a spýtame sa, čo vidia.

Obrázok 1

Geograf rozpozná vrásnené pohorie, ochranár ekologicky cenné územie, developer príležitosť na investovanie a mladomanželia vhodnú destináciu svadobnej cesty. Vstupný údaj je jeden – výstupy štyri. Všetci rozmýšľali kriticky a napriek tomu sa výsledky ich úvah líšia práve pod vplyvom ich predchádzajúceho vzdelania, životných skúseností a plánov do budúcnosti.

Pretože obrázok bol iba jeden a rovnaký pre všetkých a od posudzovateľov chcelo sa iba posúdiť ho, kredibilita vstupnej informácie je vysoká. Stačí, ak sa presvedčíme, že zobrazuje skutočný objekt a nie je napríklad vygenerovaný počítačovou grafikou. Každý z účastníkov vie vysvetliť myšlienkový pochod, ktorým dospel k svojmu záveru. Ich úvahy sú teda analyzovateľné. Každý, kto by ho opakoval, by zrejme prišiel k rovnakému záveru za predpokladu, že by mu každý opýtaný otvorene vysvetlil svoje kroky. Zopakovaním by sa potvrdila transparentnosť ich úvah – či boli opísané presne a nejaké kroky neboli zatajené. Opýtaní by určite vedeli vysvetliť, prečo považujú svoj výsledok za (pre nich) užitočný.

Samozrejme, štyrmi cestami by dospel k štyrom výsledkom. Prečo? Na vine je užitočnosť výsledku. Každý z nich ju vidí v niečom inom. Mysleli síce exaktne, ale každý iným smerom. Pre nás je toto konštatovanie novým, užitočným poznatkom: *Kritické myslenie viacerých jedincov nemá zmysel bez schopnosti komunikovať, dohodnúť sa na spoločnom cieli*. Ak by sme totiž chceli s týmito dielčími výpoveďami niečo spraviť, museli by sme najprv stanoviť tento cieľ a pokúsiť sa o diskusiu, ktorou by sme zosúladili stanoviská. Táto činnosť by bola zložitejšia, nakoľko máme štyri vstupy, z ktorých prinajmenšom dva (developera a ochranára) sú protikladné. To vážne narúša ich kredibilitu.

Je zrejmé, že mechanickým aplikovaním pravidiel aristotelovskej logiky nedôjdeme k riešeniu. Tá totiž predpokladá, že vstupné tvrdenia sú platné, nespochybniteľné, a učí nás, ako z takýchto tvrdení vytvárať ďalšie pravdivé tvrdenia.

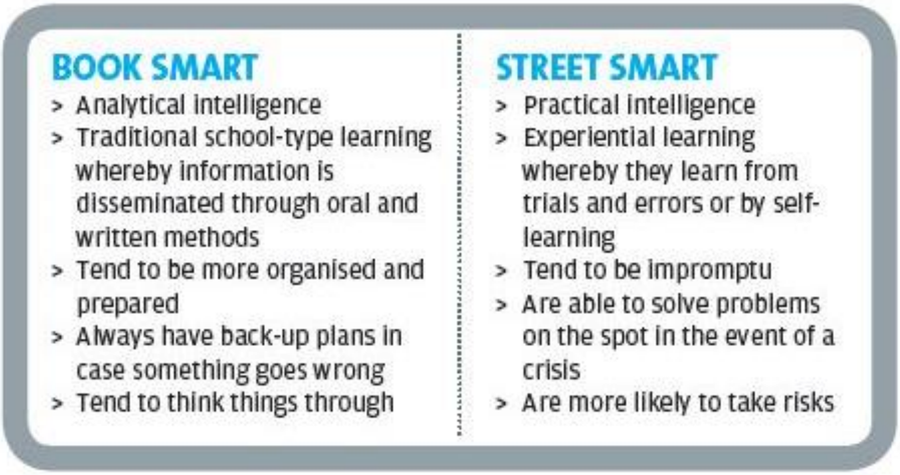
Rozdiely v tvrdeniach môžu viesť ku konfliktom medzi členmi skupiny. Developer sa možno pokúsi o podporu mladomanželov v snahe získať prevahu nad ochranárom. Z toho, že budú mať početnú prevahu, však nevyplýva, že majú pravdu a ostatní sa im musia prispôsobiť. Takže ani mechanické uplatnenie matematiky (traja za výstavbu, jeden proti, jeden sa zdržal) nevedie k výsledku.

Samozrejme, to neznamená, že máme zrušiť výučbu matematiky a logiky. Len si musíme uvedomiť, že samy osebe nestačia na vyriešenie všetkých problémov a treba aj ďalšie nástroje.

Zrod kritického myslenia

Definícií kritického myslenia je veľmi veľa [3]. Nášmu cieľu najlepšie zodpovedá Ennisova definícia [4] v mierne modifikovanej podobe: "*Kritické myslenie je mentálny riadený proces aktívnej a znalosťami podloženej tvorby záverov prostredníctvom aplikovania, analyzovania, syntézy a vyhodnocovania informácií získaných z (alebo vytvorených pomocou) pozorovaní, skúseností, úvah, sebareflexie, štúdia a komunikácie, slúžiaci ako smernica ku vzniku presvedčenia a postupov pri konaní.*"

Možností, ako ho rozvíjať, je mnoho. Na konferencii Dva dni s didaktikou matematiky v roku 2019 sme ukázali, ako využiť analýzu účelovo vytvorených nezmyslov a rozbor hoaxov [5]. V tomto článku sa venujeme ďalšiemu spôsobu: sokratovskému dialógu. Sokratovský dialóg. Je to praktická, intuitívna metóda, o čom svedčí aj jej vek – vyše dvetisíc rokov. Je založená na dialógu, takže obsahuje prvok, ktorý v predchádzajúcej časti chýbal – komunikáciu, snahu dopracovať sa k poznaniu cez porovnávanie vlastných a cudzích tvrdení, názorov a skúseností [6]. Pri získavaní zručností je prítomnosť „učiteľa" (skúsenejšej osoby) vítaná, ale nie nevyhnutná. Dobre to vidieť pri porovnaní základných metód učenia sa: vzdelávanie školou a vzdelávanie ulicou. Rozdelenie ich „absolventov" (obr. 1) na „Book smart" a „Street smart" pochádza z článku [7].



Obrázok 2. Zdroj: [7]

Tabuľka č. 1

Vzdelávanie školou	Vzdelávanie životom (ulicou)
Cieľ: Schopnosť analyzovať	*Cieľ: Schopnosť prežiť*
Tradičné učenie sa, pri ktorom sa poznatky odovzdávajú ústne alebo písomne	Učenie sa metódou pokusov a omylov, sebavzdelávanie
Systematicky organizované a vopred pripravené	Založené na náhodnom strete s „predmetom výučby“
Odporúča premyslieť si riešenie vopred	Problém sa rieši vtedy, keď sa objaví
Využíva „Plán B“ na redukovanie rizík	Osoba je ochotnejšia podstúpiť nečakané riziko

Zdroj: autor

K publikovaniu originálu nás priviedlo poznanie, že v ňom použitú terminológiu je ťažko vyjadriť plnohodnotnými slovenskými ekvivalentmi. Preklad nie je teda doslovný, skôr vyjadruje „ducha“ originálu.

Na základe uvedeného by sa zdalo, že absolventi školskej dochádzky budú nepripravení na život: nebudú ovládať metódu pokusov a omylov, budú mať problémy riešiť nečakané problémy a nebudú ochotní podstupovať riziko. Mali by mať napríklad problémy vyriešiť všetky tri nasledujúce úlohy:

- Jedno vajce stojí 20 centov. Koľko stojí 12 vajec?
- Jedno vajce sa uvarí za 5 minút. Za akú dobu sa uvarí 12 vajec?
- Jedno vajce zjedla Eliška. Kto zjedol zvyšných 11 vajec?

Škola pripravuje žiakov len na riešenie prvej úlohy, nikto však nemá problém správne reagovať aj na ostatné. Z toho, že ich vieme vyriešiť, je jasné, že sme vzdelávaní aj životnými situáciami. Ide však o nesystematickú prípravu, založenú na náhodnom strete s predmetom výučby. Ak chce škola vzdelávať pre život, mala by žiakov pripraviť na čo najviac reálnych situácií. Teda nielen poskytovať konkrétne poznatky, ale aj širšie návody (heuristiky), ktorými sa dá reagovať na celé skupiny problémov. V škole totiž „učiaci sa“ nie je odkázaný na samostatné vybudovanie si poznatku, učiteľ mu môže pomôcť korekciami a usmerňovaním. Ak má byť však výsledok trvalý, musí k nemu žiak dospieť do značnej miery sám. Tento spôsob je v súlade s princípmi Open Education [8].

Rozvoj kritického myslenia

Sokratovský dialóg je vhodným nástrojom na rozvoj tej zložky kritického myslenia, ktorá je založená na vzájomnej komunikácii. Cez rozhovor, ktorého cieľom je výmenou informácií dospieť k spoločným obohacujúcim záverom alebo sa aspoň priblížiť k „pravde“, overujeme kredibilitu tvrdení a zároveň ich analyzujeme. Učíme sa aj transparentnosti, lebo argumentovať sa nedá bez vzájomného porozumenia. Ak máme pocit, že partner niečo skrýva, je takmer nemožné viesť zmysluplný dialóg. Užitočnosť vtedy spočíva iba v odhalení nekalých úmyslov partnera, kým pri transparentom dialógu je užitočnosť v nádeji na obojstranne prospešný výsledok.

Pri vyučovaní matematiky by bolo náročné diskutovať priamo o jej tvrdeniach, povedzme o platnosti vzorca na riešenie trojčlenky. Ako však ukazuje predchádzajúca trojica úloh, dá sa ľahko – a pre deti prístupne – diskutovať o jeho uplatniteľnosti:

- Prečo je v prvej úlohe možné uplatniť trojčlenku a v ďalších nie?
- Tretia úloha je z matematického hľadiska nezmyselná. Má zmysel v niektorej životnej situácii?
- Viete vymyslieť podobné úlohy?
- Ani na riešenie prvej úlohy netreba poznať vzorec. Načo sú nám teda matematické vzorce?

Ako vidieť z poslednej otázky, za vhodných okolností sa dajú rozoberať aj otázky, ktoré sa dotýkajú filozofie matematiky a jej úlohy vo svete. Pritom netreba dôjsť k definitívnemu výsledku – stačí, aby žiaci pochopili, že aj matematika má svoj účel a limity.

Sokratovský dialóg sa dá realizovať za predpokladu, že téma je relatívne úzka a dobre špecifikovaná a každý účastník z nej niečo pozná. Vedomosti zúčastnených nemusia byť dokonalé – cieľom je hlavne sa niečo naučiť. Naopak, ak si každý účastník myslí, že už vie všetko, dialóg sa pravdepodobne zmení na hádku. Absolútna zhoda je preto náročná (až v nedohľadne). Nevhodná je aj dominancia jedného účastníka. V našom prípade skutočnosť, že učiteľ vie pravdepodobne o téme najviac, musí slúžiť skôr ako varovanie. Nemal by sa totiž snažiť o dominanciu. Občas sa môže tváriť, že niečo nevie alebo tomu nerozumie. Tým motivuje žiakov, aby sa snažili mu to vysvetliť. Cieľom je, aby na záver pochopili, že viac hláv môže naozaj obsahovať viac rozumu – a aby získali sebadôveru, že pochopili jadro diskusie.

Vhodné sú preto témy, ktoré môžu účastníci diskusie brať osobne. Tým, že sa angažujú, budú viac motivovaní na riešení. Priveľká motivácia sa dá riešiť zásahmi moderátora. Nulová motivácia vedie k nulovej diskusii. Príkladmi dobrých tém, nezávislých od vyučovacieho predmetu sú:

- Kde by sa v učebnici hodili (ďalšie) obrázky?
- Vieš nájsť vhodné obrázky na internete a ako?
- Vysvetli, prečo je obrázok vhodný pre danú tému.
- Vidíš na obrázku to isté, čo tvoj spolužiak?

Behom diskusie sa samozrejme vynoria iné otázky. Ak odpoveď na ne nepríde hneď, je užitočné si ich zaznamenať. Vo chvíli, keď diskusia ustrnie, dajú sa použiť na jej opätovné oživenie. Dobrý moderátor má v zásobe aj sériu otázok, ktoré sú dostatočne všeobecné na to, aby sa dali položiť vo vhodnej chvíli v ľubovoľnej diskusii. Takými sú napríklad otázky zamerané na kredibilitu: Kde nájdeme odpoveď, ktorej môžeme veriť? Kto mi vie poradiť, prečo tomuto faktu/tvrdeniu môžeme dôverovať? Čo garantuje spoľahlivosť daného zdroja?

Analyzovateľnosť sa dá testovať otázkami: Rozumiem ja sám krokom, ktoré robím, resp. tým, o ktorých sa práve dozvedám od kolegu? Prečo v danej chvíli postupuje(me) práve takto? Existuje iný postup? Prečo ho odmietam(e)?

Pri posilňovaní transparentnosti je rozumné zaujímať sa o to, či ostatní pochopili daný postup a jeho cieľ: Vedeli by ste zopakovať to, čo práve robím? Viete vysvetliť, prečo to robím (a práve takto)?

Užitočnosť sa zasa merať hodnotou výsledku pre mňa, resp. pre ostatných: Má zmysel moja činnosť (teraz či neskôr)? Aké sú riziká, ktoré výsledok môže spôsobiť? (A šance na ne?) Má zmysel šíriť získaný poznatok? Je taký užitočný, aby sa hodil aj niekomu inému? Ak áno, komu?

Dobrý moderátor sokratovského dialógu vie pomocou týchto nástrojov udržiavať diskusiu v behu. Zároveň nimi môže aktivovať menej aktívnych členov – či naopak brániť dominancii príliš aktívnych až agresívnych. V poslednom prípade treba zdôrazňovať, že daný názor možno je správny, ale to sa potvrdí až tým, že ho za taký uznajú aj ostatní. Takže treba, aby mali možnosť svoje predstavy predniesť.

Záver

Tradičné vzdelávanie, ktoré má korene ešte v dobách tereziánskych reforiem, sa zameriava na memorovanie znalostí: faktov, vzorcov, postupov, návodov atď. Takýmto učením sa síce dá vytvoriť intelektuálny základ rozumových činností, lenže tie sú vlastne unifikované, lebo sú zrkadlením vedomostí učiteľa. Navyše, dnes sa už podstatná časť z nich dá nájsť na internete.

Tam sa nanešťastie nachádza aj kopa balastu. Sokratovský dialóg predstavuje jednu z ciest, ako posilniť kritické hľadisko pri prijímaní nových informácií a pri ich spracovaní. Dôležité je, aby žiaci si v tejto oblasti vytvorili vhodné návyky a zručnosti. Teda, aby boli pripravení správne, rýchlo a s čo najmenšou námahou vykonávať intelektuálne činnosti jednak na základe vedomostí a jednak vďaka predchádzajúcej praktickej skúsenosti z debát. Práve skúsenosť im môže potvrdiť, že majú schopnosť aktívne využívať vlastných znalostí a zručnosti a teda nebyť odkázaní len na sprostredkované, občas aj pochybné informačné zdroje. Reforma vzdelávania Učiace sa Slovensko [9] práve toto považuje za svoj hlavný cieľ.

Literatúra

[1] Klára Velmovská: *Rozvíjanie kritického myslenia žiakov pomocou stratégie EUR a jej aplikácia na vyučovanie fyziky*. Zborník konferencie Tvorivý učiteľ fyziky VII, Smolenice, 2014, str. 253-262.

[2] Vladimíra Čavojová a kol.: *Rozum: Návod na použitie*. IRIS, Bratislava, 2016, 169 str.

[3] Wikipedia: *Critical thinking*. Internet: https://en.wikipedia.org/wiki/Critical_thinking

[4] Robert H. Ennis: Critical Thinking. The Palgrave Handbook of Critical Thinking in Higher Education, Palgrave Macmillan, 2015

[5] *Jozef Hvorecký: Úloha „nezmyslov“ vo vzdelávaní. Zborník konferencie Dva dni s didaktikou matematiky, FMFI UK, Bratislava, 2019, str. 46-52.* Internet: http://www.comae.sk/zbornik2019.pdf

[6] *Dejiny filozofie. Slovenské pedagogické vydavateľstvo, Bratislava, 2008, 144 str.*

[7] L. Hsuan: *Planning your career path: 'Where do you go from here'?* (2014). Internet:

http://mystarjob.com/articles/story.aspx?file=/2014/8/16/mystarjob_careerguide/15125582&sec=mystarjob_careerguide

[8] Ch. M. Stracke: *Quality Frameworks and Learning Design for Open Education*. *IRRODL*, vol. 20, no. 2, pp. 180-203, Apr. 2019

[9] Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky: *Učiace sa Slovensko - Národný program rozvoja výchovy a vzdelávania*. MŠVVŠ, Bratislava, 2017, 226 str.

prof. RNDr. Jozef Hvorecký, PhD.
Vysoká škola technická a ekonomická
CZ – 370 01 České Budějovice
e-mail: jozef@hvorecky.com

METÓDY PRÁCE S NADANÝMI ŽIAKMI A AKTIVITY NA HODINE MATEMATIKY

JANIČOVÁ MONIKA

ABSTRAKT. V tejto práci v úvode spomenieme vymedzenie pojmu nadaný žiak, rozpoznanie nadania a metódy práce. Predovšetkým sa sústredíme na aplikačnú časť, ktorá sprístupňuje metodiku práce a obsah vyučovacej hodiny s názvom Odvodzovanie vzťahu obsahu trojuholníka. Hodina je určená žiakom prímy osemročného gymnázia.

Nadaný žiak

Tu vychádzame výlučne z monografie PhDr. Jolany Laznibatovej Csc. : *NADANÉ DIEŤA jeho vývin, vzdelávanie a podporovanie.* [1] Autorka je zároveň autorkou programu APROGEN, realizovaný na škole ŠpMNDaG v Bratislava v niektorých školách na Slovensku. Na strane 20 sa uvádza: *„Charakteristické prvky spájajúce sa s významom slova inteligencia, sú učenie, myslenie, chápanie, usudzovanie, porovnávanie, riešenie problémov, vymýšľanie, tvorenie. Zaraďuje sa sem aj schopnosť prispôsobiť sa ako jedna zo základných vlastností živých organizmov."*

Nepostrádateľnou zložkou všeobecne nadaného dieťaťa je tvorivosť. (str. 47) Za ukazovatele tvorivosti sa pokladajú štyri faktory : fluencia (plynulosť), flexibilita (pružnosť), originalita (novosť), elaborácia (vypracovanie). S inými osobnostnými faktormi súvisí aj kreativita, pomenujme ich senzitivita. Transformácia kreatívnych schopností sa premieta do vlastností osobnosti, ktoré vytvárajú jej tvorivú štruktúru (str. 49):

Schopnosti	**Vlastnosti osobnosti**
Fluencia	zvedavosť
Flexibilita	samostatnosť, sebadôvera
Originalita	odvaha, smelosť, riziko
Elaborácia	dokonalosť, precíznosť
Senzitivita	imaginácia, fantázia

Dôraz sa kladie na divergentný štýl myslenia. Odporúča sa zapojiť laterálne myslenie – myslenie ľavej hemisféry, ktorá je centrom pre divergentné myslenie. Z toho vyplýva, že v procese výučby v škole sa majú posilňovať : názorné myslenie, globálne myslenie a priestorové myslenie. Kreativita je jedným zo základných pilierov nadania a pre ňu je dôležitá **vnútorná motivácia.** V kontakte so žiakmi sme rešpektovali a uplatňovali nasledujúci prístup: (1) Sám proces a problém je dôležitejší než jeho vyriešenie. (2) Chyba má celkom inú hodnotu – poučnú, pozitívnu. (3) Učiteľ sa nevnucuje, iba ponúka svoju pomoc. (4) Najvyššie hodnotenie má originalita.

Aplikácia odporúčaného prístupu vo výchovno-vzdelávacom procese

Predpríprava – Čo a ako sme si zopakovali pred vyvodzovaním

Predpríprava znamená niekoľko úloh a aktivít venovaných opakovaniu pojmov a vzťahov pre obvod, obsah, jednotiek dĺžky a obsahu. Trvanie – niekoľko vyučovacích hodín za sebou. **Začíname jednotkami obvodu a obsahu.** Tu sa vždy sústredíme na význam predpôn, premieňame aj jednotky, s ktorými sa nestretli, alebo si ich nevšimli. Dostali sme sa aj ku pikometru a neobišli sme ani googolplex (na ich vlastnú žiadosť a zodpovednosť). Pri pojme obsah rovinného útvaru kladieme dôraz najskôr ako pokrytie známych útvarov pomocou štvorcov (Úloha 1, Úloha 2).

Úloha 1: V prvý prázdninový deň Janko s Borisom prešli na bicykli okolo celej svojej rodnej dediny. Obaja sa dohodli, že presnú dĺžku trate, ktorú v tento deň zvládli budú označovať iba „koliečko“. Skratku použili k. Počas nasledujúcich dvoch mesiacov prázdnin Janko celkovo na bicykli prešiel 100 dak, Boris 15 hk. Kto prešiel viac a o koľko koliečok ?

Úloha 2: Koľko kariet treba na úplne pokrytie stola (knihy, zošita, tabule, miestnosti,...)? Karty priliehajú tesne k sebe, ale neprekrývajú sa. Nemá ostať žiadne miesto prázdne. Môžu použiť karty v tvare obdĺžnika, štvorca.

Pokračujeme témou **trojuholník.** Táto časť je veľmi dôležitá a keďže žiaci už ovládajú vlastnosti trojuholníka, vety o zhodnosti trojuholníkov, tento krát kladieme dôraz na konštrukciu výšky (Úloha 3). Čo dostanú žiaci od učiteľa - trojuholníky väčších rozmerov z tvrdšieho materiálu a pracovný list *Výšky v trojuholníku* (Obrázok 1) a pokyny. Čo si žiaci vopred pripravia – tri farebné fixky, farebný špagát, nožnice, ťažidlo, pravítko, uhlomer. Pracujú vo dvojiciach.

Úloha 3: Určte výšky trojuholníka podľa pokynov pracovnom liste *Výšky.*

Pracovný list Výšky

Budeš potrebovať: farebné špagáty (aby si sa nepomýlil), nožnice, dobrú mušku ☺, pero a tento pracovný list. Budeš potrebovať aj pravítko, ale to až v druhom kole. V prvom kole je zakázané.

Zadanie:

Máš daný trojuholník. Označ si farebne vrcholy podľa farby špagátov. Označ si rovnakými farbami aj uhly a strany. Tvojou úlohou je pomocou špagátu zaťaženého ťažidlom určiť vzdialenosť vrcholu od protiľahlej strany. Trojuholník je z kartónu, preto si ho môžeš oprieť o stôl. Upevni jeden koniec špagáta ku vrcholu a špagát nechaj visieť. Odstrihni v mieste prieniku špagátu a príslušnej strany (v päte kolmice).. Ešte nemeraj. V živote nás učia – Dvakrát meraj a raz rež. My urobíme naopak – Dvakrát rež a až potom meraj. Najskôr si postrihaj všetky výšky, nezabudni – ktorá je ktorá, preto sú odporučené farebné špagáty. Až keď máš všetko nastrihané, urob merania strán, uhlov a dĺžok špagátov, teda výšok, a zapíš ich. Budeš potrebovať vypočítať aj aritmetický priemer hodnôt.

Zápis – všade dopíš názvy vrcholov, uhlov, strán, výšok

Trojuholník	Názov	1. meranie	2. meranie	Priemer
Uhly				
Strany				
Výšky				

Odpovedz na otázky:

Aký typ trojuholníka podľa uhlov bol ten váš? (tupouhlý, pravouhlý, ostrouhlý)

Aký typ trojuholníka podľa strán bol ten váš? (rôznostranný, rovnostranný, rovnoramenný)

Napíš si vzostupne uhly, strany aj výšky. Co si si všimol?

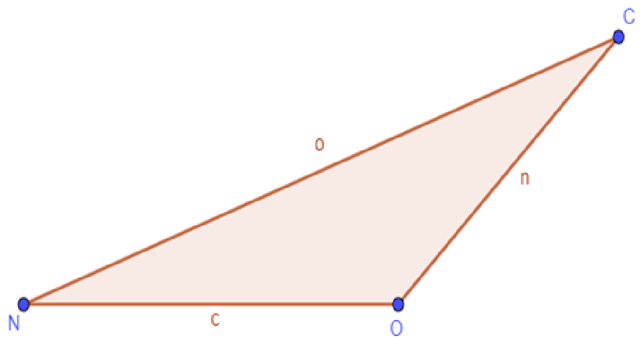
Kde ležal bod V - ortocentrum? (vnútri trojuholníka, na obvode trojuholníka, mimo oblasti trojuholníka)

Vypočítaj obsahy trojuholníka použitím všetkých vzorcov $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$. Vyšli úplne rovnaké výsledky?

Teraz je dôležité získať zručnosť v konštrukcii výšky. Najväčším kameňom úrazu bývajú tupouhlé trojuholníky. K tomu slúžia úlohy príbuzné Úlohe 4. Žiaci dostanú ďalší pracovný list s názvom Výšky 2. Pracovný list nie je preplnený obrazovými ani inými informáciami. Žiakom, ktorí cítia neistotu, umožníme preložiť papier pozdĺž strán trojuholníka. Následne si papier postaví na miesto prehybu a povzbudíme ho, aby si ceruzkou naznačil vzdialenosť vrcholu od strany (teraz prehybu).

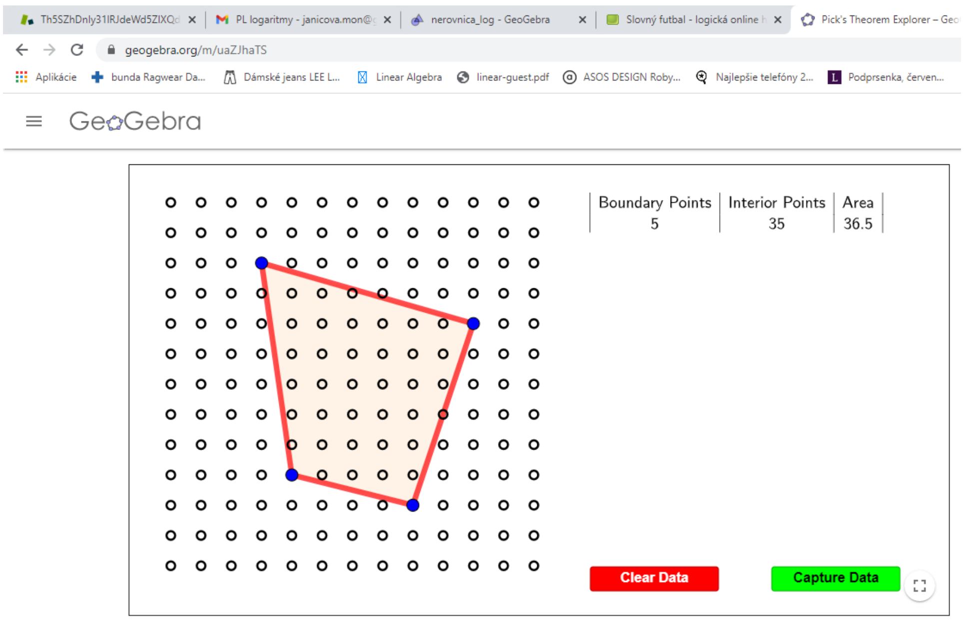
Pracovný list Výšky 2

Úloha 4: Určte vzdialenosti vrcholov od protiľahlých strán v trojuholníku *NOC*. Poznámka: V prípade potreby si môžeš preložiť papier a trojuholník si otočiť.



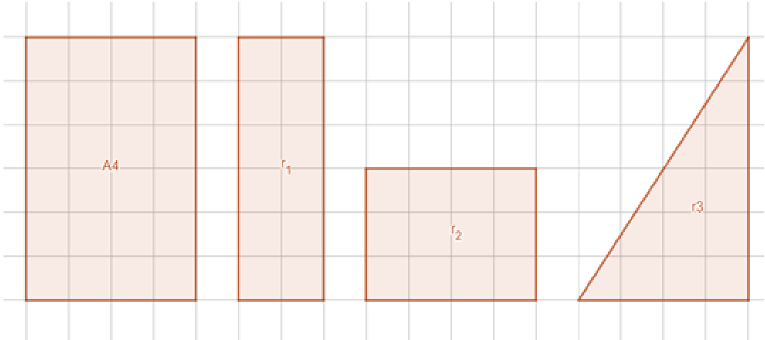
Ako posledný si opakujeme pojem **obsah útvaru v štvorcovej sieti** (Úloha 5, Obrázok 3). Žiaci pracujú aj s Pickovou vetu, využívajú prostredie Geogebry, používajú geodosky. Na hodine riešia úlohy z prostredia Geogebry, ak nemajú k dispozícii internet, tak využitím geodosiek.

Úloha 5: Vypočítajte obsah útvaru aspoň dvomi rôznymi spôsobmi: https://www.geogebra.org/m/uaZJhaTS



V jednom spôsobe riešenia úlohy 5 sa využíva myšlienka obsahu pravouhlého trojuholníka. Ten však žiaci vnímali skôr ako „nejakú polovicu obdĺžnika" než ako pravouhlý trojuholník. V jeho odvesnách donedávna nevideli výšky. Úloha 6 (Obrázok 4) nám pomôže to zmeniť a premostiť sa k odvodeniu vzorca pre obsah trojuholníka. Žiaci to zvládli, ale neanalyzovali. Analýza bola motiváciou k ďalšej vyučovacej hodine.

Úloha 6: Rozdeľte papier formátu A4 na dve obsahovo rovnaké časti. Musia byť v jednom kuse.



Vyučovacia hodina *Odvodzovanie vzťahu pre obsah trojuholníka*

Konečne môžeme uviesť priebeh a organizáciu aktivity, ku ktorej sme sa tak ťažko predierali. Kostru vyučovacieho procesu, jeho organizáciu a zmysel uvádzame v bodoch:

Cieľ: žiak vie vysvetliť vzorec pre obsah trojuholníka pomocou jeho odvesien, vie vypočítať obsah trojuholníka rôznymi spôsobmi, vie porovnať obsahy dvoch trojuholníkov s rovnakou základňou a rovnakou/rôznou výškou v tej istej štvorcovej sieti (vrcholy sú uzlové body trojuholníka)

Forma: práca v skupinách, vyučovanie v triede, problémové vyučovanie

Dĺžka: 45 minút

Pomôcky: pracovný list Obsah trojuholníka (Obrázok 5 a 6, ďalej PL), čistý papier A4, papier, ceruzka, pravítko

Motivácia [5 minút]: analyzujeme Úlohu 6 z predchádzajúcej hodiny. Analýzu robia žiaci. Hádže sa kocka. Kocka je mäkká, väčších rozmerov. Kto kocku chytí, odpovedá na otázku. Tú môže klásť učiteľ, alebo žiak môže formulovať vlastný postreh . Zdôrazní sa vzťah pre obsah pravouhlého trojuholníka pomocou odvesien.

Samotná práca, časť prvá [20 minút]: Nasleduje rozdelenie do skupín, majú vyriešiť najskôr Úlohu 1 v PL, svoje závery prezentujú pred tabuľou. Záver z riešenia Úlohy 1 (Obrázok 5) sa zdôrazní – ak má trojuholník dva vrcholy v dvoch susedných bodoch obdĺžnika a tretí na protiľahlej strane, stále má polovičný obsah ako obdĺžnik. V úlohe 1c), ako je možné si všimnúť, je údaj o obsahu trojuholníka AFD nepotrebný. Ak by sme ho tam však nedali, úloha by bola náročnejšia a teraz to nebolo cieľom.

Samotná práca, časť druhá [10 minút]: Prejde sa k ďalšej možnosti – k Úlohe 2 PL (Obrázok 6)**.** Keďže je stále používaná štvorcová sieť, riešenie úlohy nie je ťažké. Vyslovujú svoj predpoklad. Môžu overovať pomocou Geogebry. Očakávaný záver: Obsah trojuholníka sa nezmení, ani keď vrchol *H* vybehne z úsečky *CD*. V závere identifikujeme, čo sa vlastne mení (iba poloha bodu *H* na priamke *CD*) a čo nie (strany *a*, *b* obdĺžnika) a prečo ani vzdialenosť *H* od priamky *CD* nie.

Spätná väzba [5 minút]: V žiadnom bode učiteľ neskrýva nadšenie zo žiackych objavov. Spätná väzba je verbálna a neustála. V triede je pracovný ruch, vyhodnocujeme čiastkové otázky – nepoužívame pojmy správny/nesprávny .

Záver [5 minút]:

Vyhodnotíme spoluprácu, snahu, úsilie a závery, hoci aj len čiastkové výsledky, ktoré žiaci prezentovali. Je v poriadku, ak si robíme zápisy, tie žiaci vidieť nemusia, hlavne, že my si vieme spomenúť čo chceme povedať.

Zopakujeme závery – obsah trojuholníka *ABH* vpísaného do obdĺžnika *ABCD* má stále polovičný obsah ako tento obdĺžnik, bez ohľadu na to, kde na priamke *CD* sa bod *H* nachádza. Po takejto práci nepovažujeme za nutné zadávať domáce zadanie.

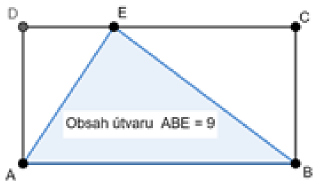
Dovoľte, aby som sa podelila o osobný postreh z hodiny a celkovej súpolupráce - atmosféra bola živá, diskusia bohatá a miestami hlučná, argumenty pádne a radosť veškých rozmerov.

Pracovný list Obsah trojuholníka

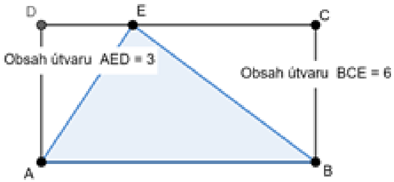
Úloha 1:

Vo všetkých nasledujúcich útvaroch sa jedná o obdĺžniky $ABCD$ a body E, F, G sú body ležiace na stranách obdĺžnika. Uvedené obsahy sú v cm^2.

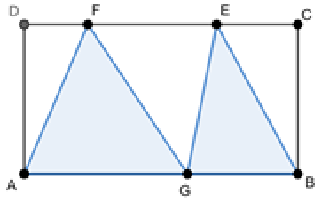
a) Urč obsah obdĺžnika $ABCD$, ak poznáš obsah trojuholníka ABE:



b) Urč obsah trojuholníka ABE a obdĺžnika $ABCD$.

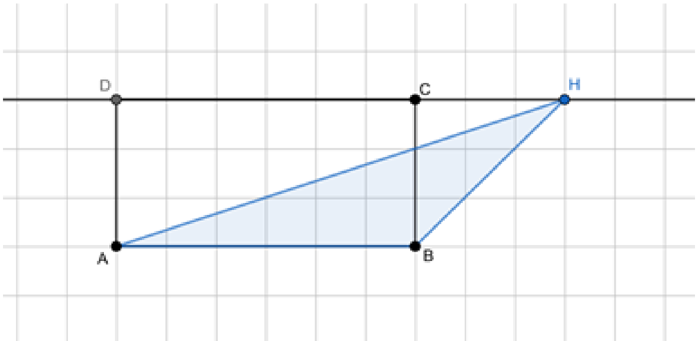


c) $S_{AFD} = 4\ cm^2$, $S_{AGF} = 9\ cm^2$, $S_{GBE} = 8\ cm^2$. Urč obsah obdĺžnika.



Uloha 2:
V predchádzajúcej úlohe všetky vrcholy trojuholníka boli bodmi na stranách obdĺžnika. Čo, keď jeden vrchol „vybehne" z úsečky **CD**, hoci zostane bodom priamky **CD**?

Vyslov predpoklad:



Skús svoj predpoklad odôvodniť. Vyslov záver.

Literatúra

[1] PhDr. Jolana Laznibatová Csc.: *NADANÉ DIEŤA jeho vývin, vzdelávanie a podporovanie*, Bratislava, IRIS, 2012, ISBN 978-80-89256-99-0

[2] Vlastné pracovné listy

[3] https://www.geogebra.org/m/uaZJhaTS

Mgr. Monika Janičová
Škola pre mimoriadne nadané deti a Gymnázium
Skalická cesta 1.
SK – 831 02 Bratislava
e-mail: janicova.mon@gmail,.com

ARABSKÉ MOZAIKY A MATEMATIKA

JANÍKOVÁ MIRIAM

Abstrakt. *V príspevku sa zaoberáme zaradením arabských mozaík do vyučovania matematiky. Predstavíme konkrétny námet na vyučovanie predovšetkým geometrie s využitím konkrétnej stredovekej mozaiky. Pri tvorbe materiálu na vyučovanie sme vychádzali z konštruktivistických teórií a orientácie na reálny kontext.*

Arabské mozaiky v stredovekej architektúre

Nádhera arabských chrámov a palácov je založená na geometrických mozaikách, symetria v rôznych formách a podobách tu hrá hlavnú úlohu. Stredovekí umelci, ktorí tieto mozaiky vytvárali, boli zároveň veľmi prísnymi a precíznymi geometrami. Desiatky metrov geometrických mozaík môžeme nájsť nielen v arabskom svete, ale aj v palácovom komplexe Alhambra, ktorý sa nachádza v španielskej Granade. Bol postavený v 14. storočí maurskými kráľmi, čo je dôležitý fakt, najmä ak sa chceme venovať jeho mozaikovej výzdobe. (Mauri je označenie pre moslimov pochádzajúcich zo severnej Afriky, ktorí v istom období stredoveku okrem iného ovládali aj oblasť južného Španielska.) [1]

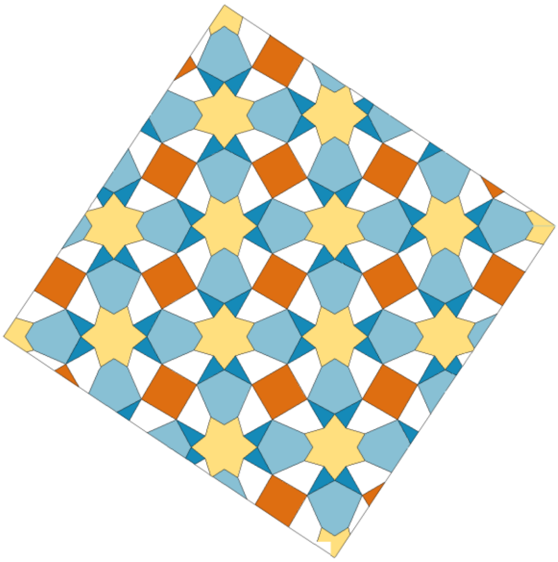
Islam nedovoľuje zobrazovenie ikon ani akékoľvek vyobrazenie človeka, a to je práve príčina tak bohatej mozaikovej výzdoby arabských palácov. Od podlahy po strop (vrátane nich) tu nachádzame umenie hrajúce sa s geometriou v podobe mozaík doplnené o výňatky z Koránu. Aplikovaná geometria vytvára akýsi „oku lahodiaci chaos", všímavý pozorovateľ pri pohľade na tieto stredoveké mozaiky objaví množstvo symetrií a najrôznejších geometrických konštrukcií. A to je práve dôvod, prečo prichádzame s námetom na zaradenie týchto mozaík do vyučovania matematiky. [1], [2]

Obrázok 1: Mozaika v španielskej Alhambre (Granada)
(Zdroj: obrázok autora)

Návrh zaradenia mozaík do vyučovania

V našom námete na vyučovanie vychádzame z konkrétnej arabskej mozaiky (Obr. 2). Vytvorili sme materiál vo forme pracovných listov, pričom sme vychádzali z konštruktivistických prístupov k vyučovaniu. [2], [3]

Materiál *Arabské mozaiky* vychádza z matematického pozadia tvorby mozaík stredovekými arabskými matematikmi a umelcami. V rámci rozvíjania matematických kompetencií pri práci s materiálom sa zameriavame na oblasť geometrie, a to konkrétne symetrie a rysovanie, snažíme sa rozvíjať kritické myslenie (napr. predložením nesprávneho návrhu riešenia), tímovú spoluprácu a kreativitu.



Obrázok 2: Návrh mozaiky
(Zdroj: obrázok autora)

Realizácia

Zaradenie: Tento materiál sme vytvárali pre študentov 1. ročníka SOŠ netechnických, konkrétne pre študentov SUŠ. Predpokladáme, že táto téma je vhodná aj pre vyššie ročníky druhého stupňa ZŠ.

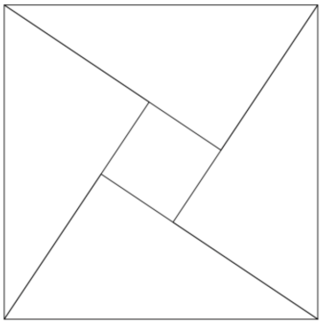
Rozsah: 2-3 vyučovacie hodiny

Pomôcky: rysovacie pomôcky (pravítka, kružidlo), farebné papiere (samolepiace alebo obyčajné+ lepidlo), nožnice, veľký výkres/kartón

Forma: Nami navrhnutý materiál je spracovaný vo forme pracovných listov. Odporúčame prácu v trojčlenných skupinách.

V prvom kroku sa študenti zoznámia s predlohou mozaiky (Obr. 2) a hľadajú v nej časti, ktoré sa pravidelne opakujú a pomocou ktorých je možné celú mozaiku vyskladať. Takto sa dopracujeme k najmenšiemu opakujúcemu sa štvorcu.

Následne sa začíname zaoberať tým, ako vytvoriť základný vzor na jednom takomto štvorci (Obr. 3). Na narysovanie pravouhlého trojuholníka môžeme využiť Tálesovu kružnicu, ale dá sa to aj bez nej.



Obrázok 3: Základný vzor
(Zdroj: obrázok autora)

V ďalšej časti pracujú študenti v skupinách (ideálne trojčlenných) a dokončujú návrh základnej dlaždice - t. j. snažia sa dorysovať zvyšné čiary podľa predlohy s dôrazom na to, že stredovekí umelci boli veľmi prísnymi geometrami, a teda ani zvyšné čiary nie sú rozmiestnené náhodne; v konečnom výsledku napr. niektoré časti vytvoria po poskladaní hviezdičku a pod.

Keď skupiny dokončia svoje návrhy, odprezentujú ich a vyberie sa ten z nich, ktorí sa aj ostatným bude zdať najprecíznejší. Tento sa stane predlohou pre tvorbu výslednej mozaiky, preto je dôležité, aby tieto návrhy boli dostatočne veľké.

V poslednom kroku študenti podľa výherného návrhy vystrihnú vzory pre jednotlivé časti mozaiky, rozdelia si prácu a vystrihujú z farebného papiera pomocou vzorov jednotlivé časti mozaiky. Tie poskladajú na výkres. Výsledkom tejto aktivity je ich spoločná triedna mozaika.

Literatúra

[1] Collectif: *Mathématiques et arts plastiques*, Pole- Bibliotheque Tangente, 2019, ISSN 2263-4908.

[2] Özdural, A. 2000. Mathematics and Arts: Connections between Theory and Practice in Medieval Islamic World. In: *Historia Mathematica.* Elsevier. 2000. Vol. 27. p. 171-201.

[3] Hejný, M., Kuřina, F. *Dítě, škola a matematika: Konstruktivistické přístupy k vyučování.* 3. vyd. Praha: Portál. 2015. 240 s. ISBN 978-80-262-0901-0

Mgr. Miriam Janíková
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK
Katedra matematickej analýzy a numerickej matematiky
Mlynská dolina, SK – 842 48 Bratislava
e-mail: miriam.janikova@fmph.uniba.sk

HLAVOLAMY DIŠTANČNE

KOVÁČOVÁ IVONA

ABSTRAKT. *Každý z nás si vie predstaviť, ako používať hlavolamy na hodine matematiky. V príspevku si predstavíme možnosť ako hlavolamy sprostredkovať žiakom aj v prípade, že nás situácia donúti učiť dištančne.*

Hlavolamy

Jednou s možností ako ozvláštniť hodiny matematiky na základnej, ale aj strednej škole, je žiakom poskytnúť aktivity, ktoré rozvíjajú aj ich logické a kritické myslenie. Jednou z možností je riešiť na hodinách matematiky rôzne hlavolamy.

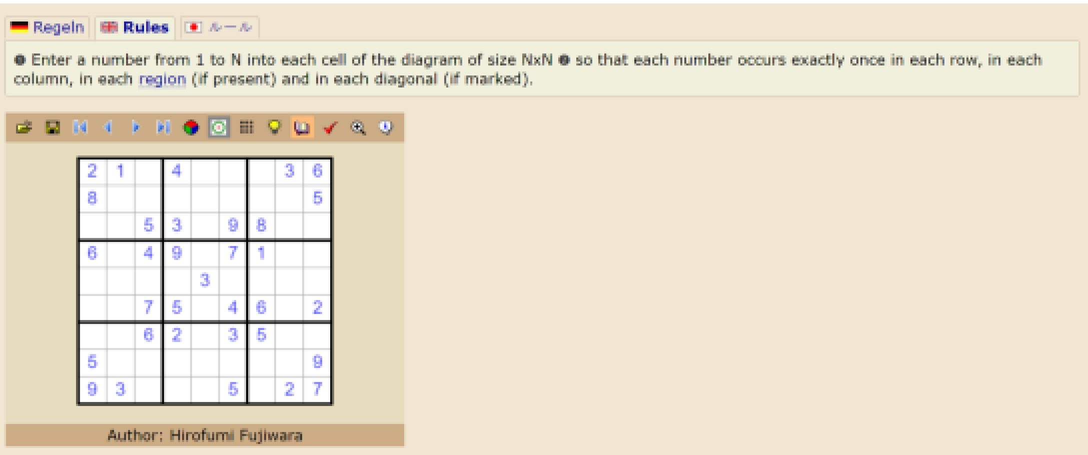
„Hlavolam je problém, hádanka, záhada, ktorá skúša vynaliezavosť svojho riešiteľa. Riešením rôznych hlavolamov posilňujeme svoju myseľ, využívame logické myslenie, fantáziu ale aj vynaliezavosť. Hlavolamy sú úlohy a hádanky, pri ktorých musíme premýšľať a riešenie hlavolamov nám veľakrát zaberie aj viac času.“ [1]

Známe sú rôzne mechanické hlavolamy, hlavolamy v podobe spoločenských hier, ale tieto možnosti sa ťažko využívajú počas dištančného vyučovania. Internet nám ponúka veľa obrázkových hlavolamov, sudoku či iných logických úloh. Od učiteľa si to ale vyžaduje čas, aby našiel vhodné hlavolamy a sprostredkoval ich žiakov vo vhodnej forme. V príspevku predstavím jednu zaujímavú stránku plnú rôznych hlavolamov. Ukážeme si okrem sudoku aj ďalšie štyri zaujímavé hlavolamy použiteľné pre rôzne vekové kategórie.

Hlavolamy čerpám zo stránky: www.janko.at, kde sa nachádza približne 180 rôznych typov hlavolamov. Stránka je síce v nemčine, ale dá sa prepnúť aj do angličtiny. Žiakom som pomocou školskej edupage stránky priradila úlohu, v ktorej bol link na hlavolam a krátke pravidlá, aby si vedeli s hlavolamom poradiť. Snažila som sa im hlavolamy striedať. Na stránke je ešte dosť veľa hlavolamov, ktoré sa dajú využiť na hodinách matematiky, ale aj na krúžok.

Sudoku

Asi najznámejším a najrozšírenejším hlavolamom je sudoku. Predpokladám, že netreba špeciálne vysvetľovať pravidlá. Cieľom je vyplniť celý hlavolam číslami od 1 do 9 pričom ani v riadku, ani v stĺpci a ani v štvorci 3x3 sa čísla nesmú opakovať.



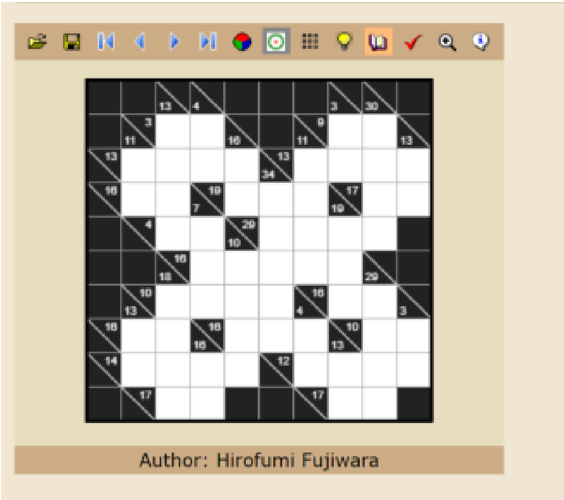
Obrázok 1: Sudoku (zdroj: https://www.janko.at/Raetsel/Sudoku/0001.a.htm)

Existuje už veľa rôznych verzií, známe sú písmenkové sudoku, pre menšie deti obrázkové sudoku. Rovnako sa môže meniť veľkosť hracieho pola alebo náročnosť riešenia.

My sme sudoku riešili už v škole a preto žiakom stačilo v krátkosti osviežiť pravidlá a poslať link na konkrétny hlavolam. Je už potom na vás či vyžadujete napríklad printscreen obrazovky po úspešnom vyriešení, alebo žiakov iba vyzvete, aby úlohu lajkli a tým dali najavo, že hlavolam vyriešili.

Kakuro

Ďalším známym hlavolamom je Kakuro. Cieľom riešiteľa je vyplniť pole číslami od 1 do 9. Čísla na kraji v čiernych políčkach určujú súčet čísel v bielych políčkach v prislúchajúcom riadku alebo stĺpci, pričom sa nemôžu vyplnené čísla v súčte opakovať. Veľkosť vyplňovanej plochy určuje náročnosť hlavolamu.



Obrázok 2: Kakuro (zdroj: https://www.janko.at/Raetsel/Kakuro/057.a.htm)

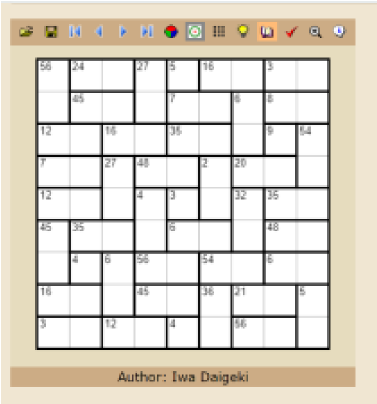
Hidoku

Zaujímavým hlavolamom, ktorý sa vyskytuje aj rôznych verziách je hidoku. Cieľom riešiteľa je vytvoriť cestičku od 1 do posledného čísla, ktoré závisí od veľkosti plochy. Pohybovať sa môže riešiteľ v riadku, stĺpci alebo diagonálne. Aj z obrázku 3 je zjavné, že sa čiary môžu aj prekrižovať. Stránka ponúka na riešenie hlavolamy od veľkosti 6x6 až po veľkosť 10x10.

Obrázok 3: Hidoku (zdroj: https://www.janko.at/Raetsel/Hidoku/021.a.htm)

Factors

Asi najlepší hlavolam na matematiku je factors. Pravidlá sa začínajú podobne ako v sudoku, teda vypĺňame pole číslami od 1 do 9, pričom ani v riadku ani v stĺpci sa čísla nesmú opakovať. Číslo v ľavom rohu označených menších obdĺžnikoch určuje výsledok násobenia. Napríklad, ak máme v rohu číslo 24, máme možnosť 3 krát 8 aj 4 krát 6. Presnú dvojicu a poradie činiteľov nám určia ostatné čísla v riadku a stĺpcoch. Odporúčam začať políčkami s jedným činiteľom.



Obrázok 4: Factors (zdroj https://www.janko.at/Raetsel/Factors/025.a.htm)

Kendoku

Veľmi podobný hlavolam ako factors je aj kendoku. Líšia sa tým, že operácia, ktorú robíme v menších obdĺžnikoch nemusí byť vždy iba násobenie. V ľavom rohu sa okrem výsledku nachádza aj operácia, ktorej vykonaním máme výsledok dosiahnuť. V obdĺžniku nezáleží na poradí čísel. Napríklad na obrázku 5 v pravom dolnom rohu je 2/, doplniť môžeme dvojice 2 a 1, 1 a 2, 4 a 2, 2 a 4. Veľkosť vypĺňanej plochy rozhoduje o maximálnom čísle, ktoré môžeme doplniť. V prípade obrázku 5 sú to čísla 1,2,3,4. Na stránke opäť nájdeme hlavolamy rôznej veľkosti. Môžeme si vybrať aj podľa náročnosti.

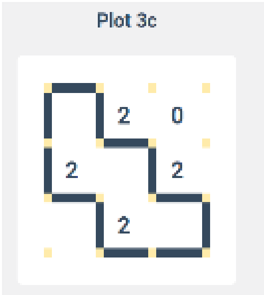
Obrázok 5: Kendoku (zdroj https://www.janko.at/Raetsel/Kendoku/001.a.htm)

Niečo navyše

Aj keď som v úvode písala, že sa budem venovať hlavolamom, ktoré sa dajú nájsť na jednej stránke, chcem dať do Vašej pozornosti aj ďalšiu zaujímavú stránku www.viemematiku.sk, kde okrem precvičovania matematiky hravou formou nájdeme aj niekoľko hlavolamov. Sú rovnako interaktívne a po úspešnom vyriešení sa nám ponúkajú ďalšie a náročnejšie úlohy.

Hlavolamy, ktoré som využila pri svojom vyučovaní boli Sobokan (https://www.viemematiku.sk/sokoban). Ide v podstate o presúvanie bedničiek na označené miesta. Postupne sa zvyšuje náročnosť a je potrebné si svoj ťah dobre dopredu premyslieť.

Ďalším zaujímavým hlavolamom z tejto stránky sú ploty (https://www.viemematiku.sk/ploty) úlohou riešiteľa je ohradiť časť lúky pomocou plotov tak, aby sa tam nachádzala jedna uzavretá ohrada a okolo políčka s číslom má byť určený počet plotov. Ploty sa nesmú križovať. Jedno riešenie je aj na obrázku 6.



Obrázok 6: Ploty (zdroj https://www.viemematiku.sk/ploty-rozcvicka/96)

Tretím hlavolamom z tejto stránky je hlavolam rušná hodinka (https://www.viemematiku.sk/rushhour). Našou úlohou je dostať žlté autíčko von z plného parkoviska. Autíčka sa môžu hýbať iba vľavo vpravo alebo hore dole podľa natočenia autíčka, ktoré nie je možné meniť.

Stránka má svoje obmedzenia a po istom množstve vyriešených hlavolamov vám nedovolí už riešiť ďalšie úlohy. Na ďalší deň sa však môžeme pokračovať znova.

Záver

Na hodinách matematiky môžeme riešiť aj neštandardné úlohy v podobe hlavolamov. Predstavili sme si niekoľko zaujímavých hlavolamov, ktoré verím, že budú pre vás inšpiráciou a vyskúšate ich riešiť aj so svojimi žiakmi na vašich hodinách. Prajem veľa úspešne vyriešených hlavolamov. Prikladám linky na hlavolamy, ktoré riešili moji žiaci:

- https://www.janko.at/Raetsel/Kendoku/010.a.htm
- https://www.janko.at/Raetsel/Hidoku/118.a.htm
- https://www.janko.at/Raetsel/Hidoku/251.a.htm
- https://www.janko.at/Raetsel/Kakuro/785.a.htm
- https://www.janko.at/Raetsel/Kakuro/001.a.htm

Literatúra

[1] *Co je to hlavolam?* [cit.: 25.10.2020]Online: https://hlavo-lam.estranky.sk/clanky/co-je-to-hlavolam-.html

Mgr. Ivona Kováčová
FMFI UK BA, Mlynská dolina
SK – 84248 Bratislava
e-mail: ivona.demcakova@gmail.com

DVA SPAMY O LOGARITMOCH

KUBÁČEK ZBYNĚK

ABSTRAKT. *Naznačíme, odkiaľ sa vzalo číslo e, potom ho opustíme a pripomenieme jednu zabudnutú metódu výpočtu dekadických logaritmov, ktorá sa výborne robí pomocou kalkulačky (pričom nás netrápi, že keď už máme kalkulačku s tlačidlom "log", tak tá metóda je vlastne zbytočná).*

Úvod

Čo som sa ako gymnazista mohol dozvedieť o čísle e (aby som si osviežil pamäť, prelistoval som si staršie učebnice):

- Eulerovo číslo e je základ prirodzených logaritmov (v literatúre som sa oveľa neskôr dočítal, že označenie *prirodzený logaritmus* ako prvý použil Nicolaus Mercator v svojej knihe *Logarithmotechnia* z r. 1668),
- exponenciálna funkcia so základom e je riešenie úlohy *nájsť exponenciálnu funkciu* $y = a^x$ *tak, aby dotyčnica v bode* $[0; 1]$ *mala smernicu* 1 (alebo – čo je to isté, len vyjadrené pomocou inverznej funkcie – logaritmická funkcia so základom e má v bode $[1; 0]$ dotyčnicu so smernicou 1),
- číslo e je veľmi dôležitá matematická konštanta.

Ani jedna z týchto informácií mi (ani vtedy, ani neskôr) neposkytla odpoveď na otázku, odkiaľ sa číslo e vzalo, resp. prečo by malo byť také dôležité (vlastnosť z druhej odrážky na mňa nepôsobila nejakým veľmi vzrušujúcim dojmom a z pohľadu gymnazistu bol základ 10 pre logaritmickú funkciu oveľa prirodzenejší než šialene vyzerajúca konštanta e; a aby som bol poctivý, aj vlastnosť *funkcia* $y = \mathrm{e}^x$ *je sama sebe deriváciou* podľa mňa na stredoškoláka môže pôsobiť ako kuriozita, ale nie ako vec hodná pozornosti serióznych matematikov – tento názor sa zmení až ďalším štúdiom matematiky). Dúfal som, že na vysokej škole sa nejasnosti odstránia (netvrdím tým, že som išiel študovať matematiku iba kvôli nejasnostiam s číslom e ☺). Tam mi povedali (a precízne dokázali), že

- limita $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ je vlastná a označuje sa e (a doplnili jednu z klasických „matematických rozprávok" – tú o súťaži bánk: jedna pripisuje úroky ročne, druhá polročne, tretia každé štyri mesiace, ...; opäť až oveľa neskôr som sa dočítal, že úlohu *ak veriteľ investuje istú sumu tak, že v každom okamihu získa pomernú časť celoročného úroku, koľko bude mať na konci roka?* riešil Jacob Bernoulli v časopise *Acta Eruditorum* v r. 1690),
- e je súčet nekonečného radu $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$ (táto rovnosť sa pripisuje Eulerovi).

<u>Výsledok</u>: staré otázky zostali, doplnila ich ďalšia: ako prišli na to, že e treba definovať ako limitu $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$? Práve odpoveď na túto otázku nás bude zaujímať v prvej časti článku (a ako uvidíme, bude to súvisieť aj s logaritmami, aj s dotyčnicou, ktorá má smernicu 1, a odtiaľ – keby sme mali ešte o máličko viacej času – to už nie je ďaleko ani k funkcii, ktorá je sama sebe deriváciou ☺).

1 Prečo práve $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$?

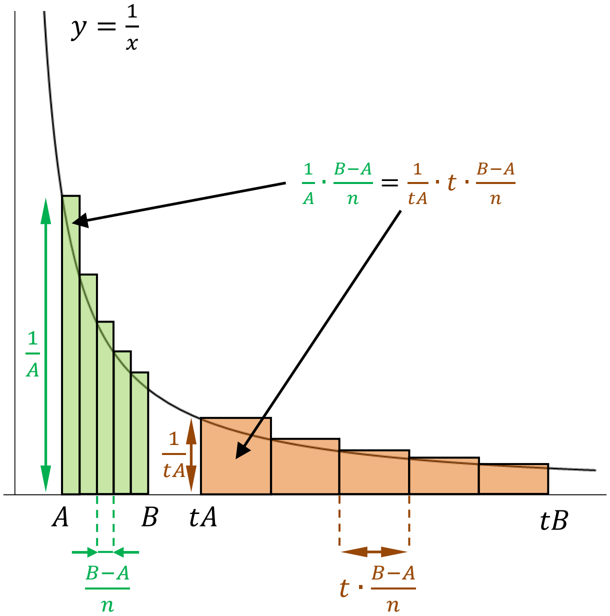
Hoci logaritmy dnes definujeme ako exponenty (teda poradie dnešného výkladu je *najprv exponenciálna, potom logaritmická funkcia*), historicky to bolo naopak:

- v r. 1614 publikoval John Napier *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, v r. 1619 (už po Napierovej smrti) vyšlo jeho *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio*,
- dnešný pohľad na logaritmy ako exponenty, na ktoré treba umocniť daný základ, sa začal udomácňovať až v polovici 18. storočia.

Odpoveď na našu otázku o čísle e súvisí s históriou diferenciálneho a integrálneho počtu. Medzi rokmi 1636 a 1655 viacerí matematici (Bonaventura Cavalieri, Pierre Fermat, Gilles Personne de Roberval, Blaise Pascal, John Wallis) rôznymi postupmi zistili, že plocha pod grafom funkcie $y = x^n$ na intervale $[0; a]$ je $\frac{a^{n+1}}{n+1}$, vyjadrené dnešnou symbolikou $\int_0^a x^n \mathrm{d}x = \frac{a^{n+1}}{n+1}$. Tento výsledok sa podarilo overiť aj pre záporné a racionálne hodnoty n – s jedinou výnimkou, ktorou je hodnota $n = -1$: nebolo jasné, ako vyjadriť plochu pod grafom funkcie $y = \frac{1}{x}$ (v tomto prípade na intervale, ktorý neobsahuje číslo 0). Dôležitá informácia sa objavila v prácach dvoch matematikov-jezuitov: *Opus Geometricum Quadraturae Circuli et Sectionum Coni* (1647) napísal Grégoire de Saint-Vincent, *Solutio problematis a R. P. Marino Mersenno Minimo propositi* (1649) jeho žiak a neskôr spolupracovník Alphonse Antonio de Sarasa. Tá dôležitá informácia znela: plocha pod hyperbolou $y = \frac{1}{x}$ súvisí s logaritmami. Ukážme si, prečo to je tak.

Označme $S(A; B)$ plochu pod grafom funkcie $y = \frac{1}{x}$ na intervale $[A; B]$ (kde $0 < A < B$). Naše úvahy o súvise tejto plochy s logaritmami rozdelíme na dva kroky, v treťom kroku sa potom prepracujeme k rovnosti $\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Prvý krok. Pre ľubovoľné kladné číslo t platí $S(tA; tB) = S(A; B)$. Zdôvodnenie (pozri obr. 1): Rozdeľme interval $[A; B]$ na n rovnako dlhých častí, na každej opíšme grafu funkcie $y = \frac{1}{x}$ zelený obdĺžnik. Potom súčet obsahov zelených obdĺžnikov je horný odhad čísla $S(A; B)$. Aj interval $[tA; tB]$ rozdeľme na n rovnako dlhých častí a grafu funkcie opíšme hnedé obdĺžniky, ich obsah je horný odhad čísla $S(tA; tB)$.



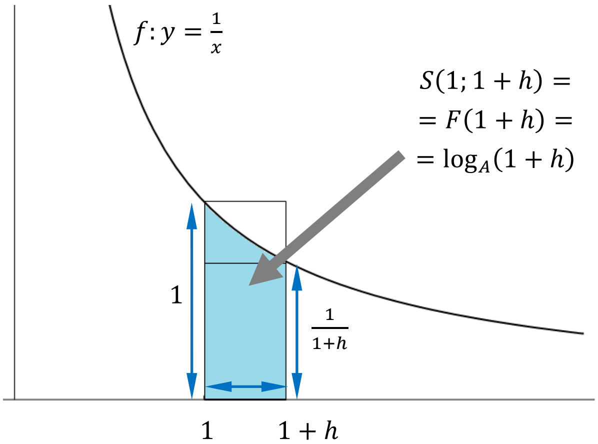
Obrázok 1: $S(tA; tB) = S(A; B)$

Súčet obsahov zelených obdĺžnikov je rovnaký ako súčet obsahov hnedých obdĺžnikov (lebo hnedé obdĺžniky sú t-krát širšie, ale súčasne t-krát nižšie). Teda každý horný odhad čísla $S(A;B)$ je súčasne aj horným odhadom čísla $S(tA;tB)$. To isté sa dá ukázať aj pre dolné odhady pomocou obsahov vpísaných obdĺžnikov. Z toho už vyplýva, že obsahy $S(A;B)$ a $S(tA;tB)$ sú rovnaké.

Druhý krok. Označme $F(x) = S(1;x)$ – teda veľkosť plochy pod hyperbolou $\frac{1}{x}$ na intervale $[1;x]$ (pre jednoduchosť uvažujme iba o prípade $x > 1$). Potom platí

	komentár
$F(x_1x_2) = S(1;x_1x_2) =$	takto sme hodnotu $F(x_1x_2)$ definovali
$= S(1;x_1) + S(x_1;x_1x_2) =$	napríklad plocha od 1 po $3 \cdot 7$ je súčet plochy od 1 po 3 a plochy od 3 po $3 \cdot 7$
$= S(1;x_1) + S(1;x_2) =$	plocha od 3 po $3 \cdot 7$ je rovnaká ako plocha od 1 po 7, tu využívame náš prvý krok, teda rovnosť $S(x_1;x_1x_2) = S(1;x_2)$
$= F(x_1) + F(x_2)$	takto sú definované hodnoty $F(x_1)$ a $F(x_2)$

Z práve dokázanej rovnosti $F(x_1x_2) = F(x_1) + F(x_2)$ (t. j. *funkčná hodnota súčinu je súčet funkčných hodnôt*) vyplýva, že funkcia F je logaritmická, teda F je logaritmus pri nejakom základe A. Otázka znie: akú hodnotu má A? (Pre poriadok poznamenajme, že v polovici 17. storočia táto otázka nemohla zaznieť, pretože uvažovanie o základe logaritmu vtedy ešte nebolo na svete.)



Obrázok 2: $\frac{h}{1+h} < \log_A(1+h) < h$

Tretí krok. Postup, ktorý použijeme na zistenie základu A logaritmickej funkcie $F(x) = \log_A x$, veľmi úzko súvisí s Newtonovým-Leibnizovým vzorcom. (To nie je žiadne prekvapenie: funkcia F je definovaná ako veľkosť plochy a veľkosť plochy – ako vieme – sa dá vypočítať pomocou uvedeného vzorca. Nasledujúci výpočet obsahuje základnú myšlienku „objavu" tohto vzťahu: ak F vznikla ako veľkosť plochy pod grafom funkcie $f: y = \frac{1}{x}$, tak musí platiť $F'(x) = \frac{1}{x}$, špeciálne $F'(1) = 1$, a práve poslednú rovnosť overíme.) Z obr. 2 vyplýva nerovnosť $\frac{h}{1+h} < \log_A(1+h) < h$ (vľavo je obsah „vpísaného obdĺžnika" s rozmermi $h \times \frac{1}{1+h}$, vpravo obsah „opísaného obdĺžnika" s rozmermi $h \times 1$), preto $\frac{1}{1+h} < \frac{\log_A(1+h)}{h} < 1$, a teda $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\log_A(1+h)}{h} = 1$ (to je spomínaný výpočet derivácie funkcie $y = \log_A x$

v bode 1), špeciálne (ak zvolíme $h = \frac{1}{n}$) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_A\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$. Ak využijeme štandardné vlastnosti logaritmov, môžeme uvedenú limitu zapísať v tvare $\lim_{n\to\infty} \log_A \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1$. Z tejto rovnosti už vieme určiť hodnotu A: odpoveď na otázku „k čomu sa musí blížiť $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, aby sa jeho logaritmus pri základe A blížil k 1“ znie: „k základu A“. Teda hľadaný základ A je číslo $A = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. (Súčasne sme overili, že logaritmická funkcia s týmto základom má v bode 1 deriváciu 1, teda má vlastnosť, ktorú sme spomenuli v druhej odrážke v úvode.) Zhrnuté: číslo e je základ tých logaritmov, ktoré súvisia s plochou pod grafom rovnoosovej hyperboly $y = \frac{1}{x}$.

2 Longova metóda výpočtu dekadických logaritmov

V druhej časti nášho príspevku sa pozrieme na metódu výpočtu dekadických logaritmov, ktorú v r. 1714 publikoval John Long v časopise *Philosophical Transactions*. Jej základom je táto úvaha: z vlastností logaritmov vyplýva, že napríklad číslo $10^{2,318} = 207{,}969\,668\,710\ldots$ možno zapísať ako súčin

$$10^{2,318} = 10^2 \cdot 10^{\frac{3}{10}} \cdot 10^{\frac{1}{100}} \cdot 10^{\frac{8}{1000}} = 10^2 \cdot \left(\sqrt[10]{10}\right)^3 \cdot \left(\sqrt[100]{10}\right)^1 \cdot \left(\sqrt[1000]{10}\right)^8.$$

Podobná rovnosť platí zrejme, aj keď exponent 2,318 (teda dekadický logaritmus čísla $207{,}969\,668\,710\ldots$) nahradíme ľubovoľným iným číslom. Z tohto pozorovania možno odvodiť nasledujúci postup (využijeme v ňom tabuľku 1, v ktorej sú hodnoty prvej až deviatej mocnina čísla $\sqrt[10]{10}$ – teda čísla $10^{0,1}$, $10^{0,2}$, ..., $10^{0,9}$, prvej až deviatej mocnina čísla $\sqrt[100]{10}$ – teda čísla $10^{0,01}$, $10^{0,02}$, ..., $10^{0,09}$, atď.).

Lo.	Nat. Numb.	Log.	Nat. Numb.	Log.	Nat. Numb.	Log.	Nat. Numb.
,9	7,943282347	,009	1,020939484	,00009	1,000207254	,0000009	1,000002072
,8	6,309573445	8	1,018591388	8	1,000184224	8	1,000001842
,7	5,011872336	7	1,016248694	7	1,000161194	7	1,000001611
,6	3,981071706	6	1,013911386	6	1,000138165	6	1,000001381
,5	3,162277660	5	1,011579454	5	1,000115136	5	1,000001151
,4	2,511886432	4	1,009252886	4	1,000092106	4	1,000000921
,3	1,995262315	3	1,006931669	3	1,000069080	3	1,000000690
,2	1,584893193	2	1,004615794	2	1,000046053	2	1,000000460
,1	1,258925412	1	1,002305238	1	1,000023026	1	1,000000230
,09	1,230268771	,0009	1,002074475	,000009	1,000020724	,00000009	1,000000207
8	1,202264435	8	1,001843766	8	1,000018421	8	1,000000184
7	1,174897555	7	1,001613109	7	1,000016118	7	1,000000161
6	1,148153621	6	1,001382506	6	1,000013816	6	1,000000138
5	1,122018454	5	1,001151956	5	1,000011513	5	1,000000115
4	1,096478196	4	1,000921459	4	1,000009210	4	1,000000092
3	1,071519305	3	1,000691015	3	1,000006908	3	1,000000069
2	1,047128548	2	1,000460623	2	1,000004605	2	1,000000046
1	1,023292992	1	1,000230285	1	1,000002302	1	1,000000023

Tabuľka 1 je z [2, s. 118]*. Svetlohnedo je podfarbená časť, v ktorej sú hodnoty prvej až deviatej mocnina čísla* $\sqrt[1000]{10}$ *– teda čísla* $10^{0,001}$*,* $10^{0,002}$*, ...,* $10^{0,009}$*.*

Ukážme, ako pomocou tabuľky 1 nájsť dekadický logaritmus napríklad čísla $354{,}72$:

1. číslo vydelíme vhodnou celočíselnou mocninou 10 (v našom prípade $10^{\mathbf{2}}$), aby sme dostali hodnotu z intervalu $\langle 10; 1]$:
$$354{,}72 : 10^2 = 3{,}5472,$$
2. v tabuľke nájdeme medzi mocninami $10^{0,1}$ až $10^{0,9}$ najväčšiu hodnotu, ktorá je ešte menšia ako výsledok z predchádzajúceho kroku (je ňou $10^{\mathbf{0,5}}$), tou ho vydelíme:
$$3{,}5472 : 3{,}162\,277\,660 = 1{,}121\,723\,131\ldots,$$
3. v tabuľke nájdeme medzi mocninami $10^{0,01}$ až $10^{0,09}$ najväčšiu hodnotu, ktorá je ešte menšia ako výsledok z predchádzajúceho kroku (je ňou $10^{\mathbf{0,04}}$), tou ho vydelíme:
$$1{,}121\,723\,131\ldots : 1{,}096\,478\,196 = 1{,}023\,023\,654\ldots,$$

atď. Uvedenými troma krokmi sme našli tri cifry dekadického logaritmu čísla $354{,}72$:
$$\log 354{,}72 = \mathbf{2}, \mathbf{54}\ldots.$$

Longova metóda je výborný námet pre debatu o cieľoch vyučovania matematiky: má zmysel niečo takéto robiť dnes so žiakmi v škole? Možný argument proti: toto žiak iste nikdy v živote potrebovať nebude (možno – ale iba možno – niektorých presvedčíme, že budú potrebovať riešenie sústavy dvoch lineárnych rovníc; ale o potrebe tohto *iste nie*: ak už náhodou budú potrebovať logaritmus, tak si ho nájdu jedným ťuknutím na kalkulačke). Možný argument za: ak to žiakov zaujme (*ak!*), dá sa to využiť napríklad na spoločné objavovanie (na to však musí byť téma spracovaná podstatne inak, ako v našom stručnom prehľade, ktorý všetko hneď prezradí ☺), či prácu podľa návodu (a skúsený učiteľ v tom nájde ešte oveľa viacej), a popritom si precvičiť vlastnosti logaritmov. Odpovedať na uvedenú otázku si samozrejme musí každý čitateľ/učiteľ sám – ako sme už povedali, závisí to od jeho predstavy o tom, načo je vlastne vyučovanie matematiky dobré.

Literatúra

[1] Burn, R. P.: Alphonse Antonio de Sarasa and Logarithms. In *Historia Mathematica*, 2001, roč. 28, č. 1, s. 1-17.

[2] Hutton, Ch.: *Mathematical Tables.* The fifth Edition. London : F. C. and J. Rivington, 1811.

[3] Maor, E.: *e – The story of a Number.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1994, ISBN 978-0-691-14134-3

[4] Tropfke, J.: *Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung*. Zweiter Band. Leipzig : Veit & Comp., 1903.

doc. RNDr. Zbyněk Kubáček, CSc.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
e-mail: kubacek@fmph.uniba.sk

PREHĽAD HISTÓRIE DIDAKTIKY MATEMATIKY NA SLOVENSKU

LEKÁR MILAN

ABSTRAKT. *Príspevok v krátkosti 20 minút zhrnul približne 150 rokov histórie didaktiky na Slovensku a v širšom zmysle v Československu. Vyzdvihol kľúčové momenty v histórii didaktiky, najmä hlavné inštitúcie, ktoré formovali didaktiku a osobnosti, ktoré ovplyvnili ďalší vývoj tejto vedy v Československu.*

Začiatky didaktiky v Rakúsko-Uhorsku začiatkom 20. storočia

Didaktika matematiky ako samostatná systematická veda v Rakúsko-Uhorsku alebo v Uhorsku prakticky pred rokom 1869 neexistovala a väčšina matematických prác pred týmto rokom pochádzala z oblasti trigonometrie a hľadania riešenia kvadratúry kruhu. Začiatky didaktiky matematiky na Slovensku je možné vysledovať až koncom 19. a začiatkom 20. storočia, kedy sa objavujú prvé práce z didaktiky matematiky. Jedným z prvých bol Ján Zlámal, ktorý publikoval v oblasti metodiky vyučovania na obecnej a mešťanskej škole z vlastného záujmu a iniciatívy svoje skúsenosti a názory v pedagogických časopisoch a knihách. Avšak ešte stále nebol na území Slovenska prítomný systematický výskum v oblasti didaktiky matematiky a tiež neexistovalo didaktické pracovisko.

Prvá inštitúcia na území Slovenska, ktorá si začala uvedomovať potrebu takéhoto výskumu bola Jednota českých matematiků a fyziků, ktorá bola založená v roku 1862 a ktorá už medzi rokmi 1869 – 1870 začala vytvárať prvé úlohy pre stredoškolákov. V roku 1870 uskutočnila Jednota prvý zjazd na ktorom sa pojednávalo o terminológii, o didaktických, metodických a organizačných otázkach vyučovania matematiky a fyziky na stredných školách. V roku 1872 vytvorila Jednota Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky a išlo o historicky prvý vedecký matematický časopis v Rakúsko-Uhorsku. Časopis obsahoval stredoškolské úlohy a pre úspešných riešiteľov vypisoval odmeny. Od roku 1926 bola súčasťou časopisu už aj didakticko-metodická časť o vyučovaní matematiky v zahraničí.

Od roku 1873 začala Jednota vydávať stredoškolské učebnice. V tom istom roku napísal český matematik Vincenc (Čeněk) Jarolímek učebnice deskriptivní geometrie a v roku 1879 napísal František Hromádko Sbírku úloh z algebry. V komisiách Jednoty boli učebnice podrobené prísnemu posudzovaniu ešte pred úradným schvaľovacím konaním. Používali jednotnú terminológiu a splňovali požiadavky, ktoré na učebnice kládla vtedajšia pedagogická veda. Učebnice z rokov 1910 až 1912 vychádzali potom s menšími úpravami až do roku 1949. Ďalšou významnou osobnosťou bol v 20. rokoch 20. storočia prof. Quido Vetter, ktorý zaraďoval do prípravy stredoškolských profesorov matematiky aj didaktiku matematiky. Publikoval články o vyučovaní matematiky v Československu a uverejňoval články v zahraničných časopisoch.

Neskôr, v 30. rokoch 20. storočia bola už prax na stredných školách výsledkom dlhoročných skúseností mnohých generácii učiteľov, ale ešte stále sa v tomto období kládol dôraz na výklad nového učiva, pričom tento proces bol o sprostredkovaní hotových poznatkov bez prihliadnutia na to, ako prebieha proces vyučovania sa žiakov. Nasledovalo precvičovanie učiva a zadávali sa domáce úlohy. Formou ústnych a písomných skúšok sa preverovali znalosti žiakov. Hodnotenie výsledkov malo formu klasifikácie, do roku 1936 štvorstupňovú a potom päťstupňovú.

V tejto dobe bola veľmi používaná učebnica Sbírka úloh, ktorej autormi boli Bydžovský, Teplý, Vyčichlo, Vojtěch, ktorú publikovali v roku 1936. Ďalšou významnou postavou bol prof. Eduard Čech. Písal články o vyučovaní rôznych témach matematiky.

Ako jeden z prvých začal opierať výučbu o aktívnu činnosť, rysovanie na hodinách geometrie, teda rysovanie priamok, rovnobežiek, vytváranie kolmíc prekladaním papiera a pod. Vytvoril sériu úloh, ktoré slúžili k nácviku presnosti rysovania. Kládol dôraz na formuláciu úloh, ktorá bola vždy jednoznačná a jednoduchá. Po vzore anglických škôl zaviedol ako prvý označenie sss, sus, usu, Ssu pre zhodnosť trojuholníkov. Prof. Čech výrazne ovplyvnil výuku riešenia rovníc tým, že začal požadovať, aby sa skúška robila dosadením vypočítaného čísla za neznámu do každej strany rovnice zvlášť. Pred zavedením Čechových učebníc bola skúška čisto formálnou záležitosťou a obvykle sa nerobila. Jednota českých matematiků a fyziků vydávala matematické učebnice až do roku 1948, kedy vydávanie učebníc prevzalo Státní pedagogické nakladatelství.

Prvé slovenské matematické učebnice, didaktický výskum a súčasnosť

V roku 1923 napísal prof. Jur Hronec učebnicu s názvom Algebraické rovnice a ich použitie na analytickú geometriu a išlo o historicky prvú po slovensky písanú matematickú učebnicu. Keďže medzi rokmi 1906 – 1922 pôsobil na gymnáziu v Kežmarku, medzi rokmi 1922 – 1923 v Prahe a medzi rokmi 1924 – 1939 na Českej vysokej škole technickej v Brne, zozbieral svoje pedagogické skúsenosti v publikáciách s názvom Vyučovanie a vyučovacia osobnosť, ktorú napísal v roku 1923 a Učiteľova osobnosť, ktorú napísal v roku 1926. Následne sa venoval publikovaniu učebníc z rôznych oblastí matematiky, v roku 1938 napísal učebnicu s názvom Lineárne diferenciálne rovnice obyčajné. V roku 1941 napísal Diferenciálny a integrálny počet I a v roku 1957 II. rovnomenný druhý diel. Okrem týchto učebníc napísal ešte veľa ďalších, najmä učebnice pre technické odbory ale publikoval práce aj v rôznych časopisoch.

V rámci didaktiky je potrebné spomenúť rok 1951, kedy Jur Hronec založil Matematickú olympiádu. Bolo to významné rozhodnutie, ktoré sa neskôr ukázalo ako veľmi šťastné, pretože už v roku 1952 sa Juraj Bosák, významný slovenský matematik, stáva absolútnym víťazom celoštátneho kola prvého ročníka československej matematickej olympiády. Ďalší veľký zlom v histórii didaktiky matematiky na Slovensku nastal v 70. rokoch 20. storočia a postupne získaval na význame. V tomto období sa totiž celoplošne v celom Československu začali do výučby matematiky na základných a stredných školách zavádzali kalkulačky.

V akademickom roku 1982/1983 sa zákonom zaviedlo používanie kalkulačiek v 7. ročníku základnej školy a v roku 1988/1989 boli kalkulačky prijaté už pre 5. ročník. Išlo o jednoduché kalkulačky s niekoľko základnými funkciami ako je sčítavanie, odčítavanie, násobenie a delenie. Neskôr sa začali používať kalkulačky s grafickým displayom a s čoraz väčšou ponukou možností. Po roku 2005 malo už veľa škôl na Slovensku počítačmi vybavené učebne, v dôsledku čoho sa vyučovanie matematiky čoraz viac začalo uskutočňovať za použitia rôznych matematických programov. Vzrástol záujem učiteľov o rôzne matematické programy ako Cabri II Plus, Geogebra, Cabri 3D a pod. V súčasnosti sú populárne už aj rôzne matematické webstránky, ktorých je dostatok a ponúkajú veľa matematických príkladov s riešením alebo bez, ako aj rôzne matematické diskusné fóra. V súčasnosti tak môžeme hovoriť o úspešnej digitalizácie vyučovania matematiky na Slovensku.

Literatúra

[1] TOMEŠ, Josef.: *Český biografický slovník XX. století : I. dík: A-J. Praha*, Litomyšl, Paseka, 1999, ISBN 80-7185-245-7

[2] MIKULČÁK, Jiří: Jak se vyvíjela pedagogika matematiky ve druhé polovině 20. století, Praha, Matfyzpress, 2007, s. 251.

[3] SAV: http://www.mat.savba.sk/MATEMATICI/matematici.php?cislo=82 akademik Jur Hronec Matematik. [2020-10-15] online.

[4] SAV: http://www.mat.savba.sk/MATEMATICI/matematici.php?cislo=16 RNDr. Juraj Bosák, DrSc. Matematik. [2020-10-15] online.

[5] SAV: https://web.math.muni.cz/biografie/quido_vetter.html Quido Vetter, Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity [2020-10-15] online.

Mgr. Milan Lekár
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina F1
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: lekar1@uniba.sk

MOTIVAČNÉ AKTIVITY PRI VYUČOVANÍ MATEMATIKY ONLINE

PEKÁROVÁ JANA

ABSTRAKT. *Mesiace pandémie priniesli veľa zmien v spôsoboch vyučovania školských predmetov. Počas uplynulých týždňov sme sa snažili transformovať stredoškolské učivo matematiky do rôznorodých foriem tak, aby sa žiaci dokázali učiť tento pre mnohých náročný predmet dištančnou formou a učili sa pritom pravidelne, sebahodnotiac a s nezanedbateľnou dávkou motivácie učiť sa. V príspevku ponúkame náčrt niekoľkých úspešných aktivít, ktoré sme ponúkli žiakom 2. a 3. ročníka gymnázia v rámci online vzdelávania.*

Úvod

Mesiace pandémie priniesli veľa zmien v spôsobe vyučovania školských predmetov. Od každodenných stretnutí so žiakmi na hodinách matematiky, spoločného riešenia príkladov a rôznych druhov zadaní, vysvetľovania a analýzy chýb sme my učitelia zo dňa na deň prešli do online sveta s videotutoriálmi, online nástenkami pre zdieľanie obsahu, interaktívnymi testami a komunikáciou v sociálnych sieťach. Hoci možností, aké ponúkajú digitálne technológie, je v súčasnosti veľké množstvo, nie vždy máme ako učitelia čas a priestor vyskúšať ich a navrhnúť v nich vhodné aktivity. Uvedomujeme si pritom, že e-learningové vzdelávanie nezahŕňa len poskytovanie učebného obsahu na diaľku. Tak ako tradičné vzdelávanie by malo žiakov motivovať k pravidelnému učeniu sa a zároveň preklenúť sociálnu izoláciu, ktorá môže byť veľkou prekážkou pri úspešnom zvládnutí učebného obsahu online. V období medzi marcom a júnom 2020 sme do vlastného on-line vyučovania matematiky preto zahrnuli viacero prvkov, ktoré ďalej podrobnejšie priblížime.

Návrh a realizácia on-line vyučovania matematiky

Pri výučbe matematiky u svojich gymnaziálnych študentov matematiky 2. a 3. ročníka sme postupovali podľa takéhoto scenára:

- vzdelávanie sa uskutočňuje na pravidelnej báze, zohľadňujúc klasický rozvrh študentov (matematika 4-krát do týždňa),
- raz týždenne majú žiaci on-line hodinu, na ktorej spoločne riešime úlohy na virtuálnej tabuli,
- inak študujú učivo z výučbových materiálov, ktoré dostávajú v časoch približne zodpovedajúcich dňom rozvrhu,
- žiakom počas celého týždňa poskytujeme podporu pri štúdiu prostredníctvom mailov, správ cez agendu školy či diskusného fóra,
- žiaci počas každého týždňa vypracujú sériu úloh zameranú na preberané učivo, s cieľom zistiť hĺbku naučeného alebo ohodnotiť ich prácu,
- súčasťou hodnotenia je slovný komentár silných a slabých stránok ich riešenia,
- žiaci sú povzbudzovaní k častej interakcii týkajúcej sa vlastného učenia sa.

Ak učiteľ podporuje interakciu, žiak sa môže stať viac osobne angažovaným, čo je kľúčovým prvkom pri efektívnom sprostredkovaní učenia sa (Hackman a Walker, 1990 in Berge, 2002). Preto sme sa pri vyučovaní matematiky pokúšali častokrát „vtiahnuť študentov do deja“, do premýšľania nad pochopením učiva, do spoločnej diskusie a hľadania chýb.

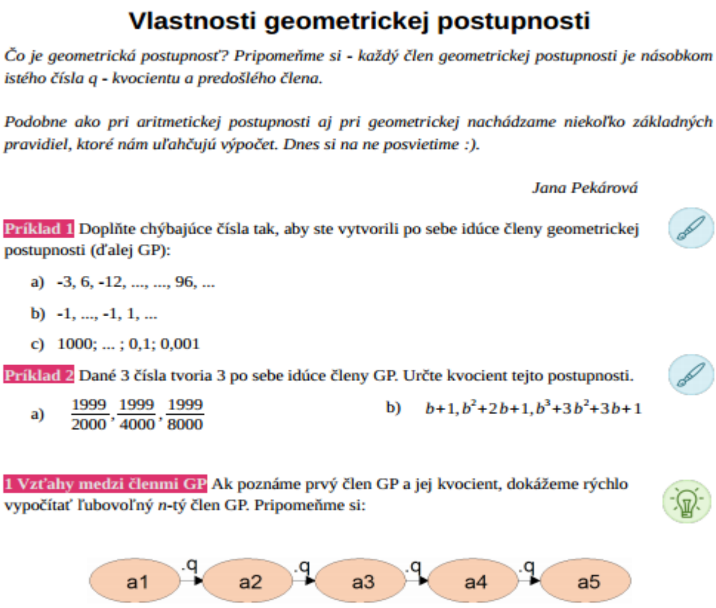
V opisovanom vyučovaní matematiky sme používali školský systém Moodle na správu výučbového obsahu. V ňom mali žiaci k dispozícii výučbové materiály, nástroje tohto systému sme použili aj na podporu riešenia úloh, výmeny postupov a analýzy chýb medzi spolužiakmi. Využívali sme tieto prvky LMS systému:

- diskusné fóra,
- tvorivú dielňu – workshop,
- odznaky ako kladné hodnotenie aktivít študentov,
- anketu ako nástroj na ocenenie práce iných spolužiakov.

Úspešné aktivity a postupy

Výučbový materiál s prehľadnou štruktúrou

Základné učivo sme žiakom vysvetľovali prostredníctvom výučbových materiálov, ktoré obvykle obsahovali krátky motivačný príhovor, viacero riešených príkladov, príklady na samostatnú prácu, otázky na rozšírenie témy a v závere kľúč so správnymi výsledkami a načrtnutými postupmi riešenia príkladov. Jednotlivé časti materiálu sme farebne a vizuálne odlišovali grafickými prvkami, ktoré mali žiakom pomôcť ľahšie sa orientovať v učive. Napokon, k učeniu sa žiaka z textu môže žiaka stimulovať samotná podoba textu (Čáp, Mareš, 2001).



Vlastnosti geometrickej postupnosti

Čo je geometrická postupnosť? Pripomeňme si - každý člen geometrickej postupnosti je násobkom istého čísla q - kvocientu a predošlého člena.

Podobne ako pri aritmetickej postupnosti aj pri geometrickej nachádzame niekoľko základných pravidiel, ktoré nám uľahčujú výpočet. Dnes si na ne posvietime :).

Jana Pekárová

Príklad 1 Doplňte chýbajúce čísla tak, aby ste vytvorili po sebe idúce členy geometrickej postupnosti (ďalej GP):

a) -3, 6, -12, ..., ..., 96, ...

b) -1, ..., -1, 1, ...

c) 1000; ... ; 0,1; 0,001

Príklad 2 Dané 3 čísla tvoria 3 po sebe idúce členy GP. Určte kvocient tejto postupnosti.

a) $\frac{1999}{2000}, \frac{1999}{4000}, \frac{1999}{8000}$ b) $b+1, b^2+2b+1, b^3+3b^2+3b+1$

1 Vzťahy medzi členmi GP Ak poznáme prvý člen GP a jej kvocient, dokážeme rýchlo vypočítať ľubovoľný *n*-tý člen GP. Pripomeňme si:

Žiaci tieto materiály v záverečnom dotazníku v júni vyzdvihli ako jeden z najlepších prvkov on-line vyučovania matematiky. V odpovediach na otázku „*Čo sa Ti na on-line vyučovaní matematiky páčilo?*" uvádzali:

Prepracované (nielen dizajnovo) materiály, ich prehľadnosť a zrozumiteľnosť.

Kvalita materiálov bola výborná, vždy bolo všetko prehľadne vysvetlené a bolo to v podstate všetko podané tak, aby sme to čo najrýchlejšie pochopili.

Dobre pripravené materiály, vhodne zvolený (zrozumiteľný) výklad.

Veľmi oceňujem prehľadnosť materiálov - zvýraznenie dôležitých vecí, riešené príklady, označenie značkami.

Priebežná spätná väzba odznakmi

Jeden z ďalších prvkov vyučovania, ktorí študenti na záver štúdia ocenili, boli tzv. **odznaky**. Tento malý gamifikačný prvok mal motivovať študentov, aby pracovali priebežne i spoločne v online prostredí aj mimo obdobia hodnotených úloh. Virtuálne odznaky zbierali za splnenie úlohy, za originálny návrh riešenia, za pomoc spolužiakovi, za opravu chyby. V on-line prostredí bola zverejnená so súhlasom študentov tabuľka ich skóre, ktorú sme pravidelne aktualizovali.

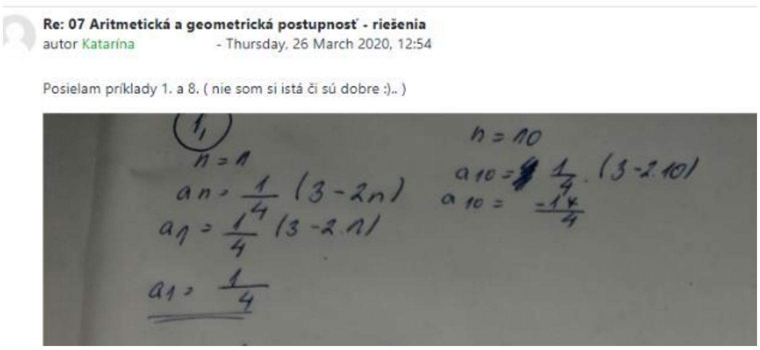
Na základe svojho počtu odznakov dostali žiaci príležitostne jednotku za aktivitu, tabuľka tiež slúžila ako pomôcka pri záverečnej známke na vysvedčení v prípade nejednoznačných výsledkov žiakov.

S kožou na trh!

Počas tejto aktivity žiaci dostali tak ako inokedy v deň rozvrhu výučbový materiál na preštudovanie. Tentokrát však neobsahoval výsledky ani ukážkové riešenia príkladov. Žiakov sme pomocou rýchlej správy cez systém Edupage vyzvali zapojiť sa do Burzy nápadov, teda prispieť svojím riešením niektorého z príkladov do diskusného fóra určeného na túto aktivitu. Počet riešených príkladov uverejnených vo fóre sme obmedzili na 3 riešenia na žiaka, čím sme sa snažili predísť tomu, aby niektorý žiak naraz neuverejnil všetky riešenia príkladov a nezmaril tak predčasne snahu svojich spolužiakov.

Materiál obsahoval spolu 15 príkladov z rôznych zbierok príkladov líšiacich sa náročnosťou riešenia na úrovni aplikácie, analýzy a syntézy poznatkov, príkladov zameraných na výpočet členov postupnosti pomocou vlastností aritmetickej a geometrickej postupnosti, slovných úloh i určovania vlastností týchto postupností so špeciálnymi hodnotami diferencie alebo kvocientu.

Do aktivity sa v daný deň zapojila takmer polovica žiakov triedy, žiaci posielali svoje riešenia do poludnia nasledujúceho dňa a spoločne vypracovali všetky príklady výučbového materiálu. Aktivita sa zakladala na využití diskusného fóra, do ktorého žiaci vkladali svoje odfotené riešenia a učiteľka ich riešenia priebežne komentovala a opravovala. Z viacerých reakcií študentov vyplýva, že **rýchla spätná reakcia** tiež zvyšuje záujem študentov o riešenie predostreného problému.



Re: 07 Aritmetická a geometrická postupnosť - riešenia
autor Jana Pekárová - Thursday, 26 March 2020, 13:19

Katka, jednotka je takmer celá správne, akurát vieš vypočítať súčet druhých 10 členov? To znamená čísel od a11 po a20...

V osmičke je napísané, že každý meter stojí o 1,5 viac, to znamená, že tých 1,5 pripočítavame, nie násobíme...
Ešte doplň.

Táto aktivita tiež poskytla žiakom možnosť učiť sa navzájom z vlastných chýb, v jej priebehu dochádzalo k viacnásobnému opravovaniu riešení, niekedy si úlohu opravil samotný autor pôvodného riešenia, inokedy uverejnil správne riešenie iný žiak.

Aktivita *S kožou na trh!* sa dá vhodne realizovať v triede s otvorenou atmosférou a komunikáciou medzi žiakmi a učiteľom, kde sa žiaci neboja prezentovať vlastné pokusy, budovať spolu hlbšie pochopenie pojmov a naprávať svoje omyly.

Písomné práce tvorivo

Častým problémom pri online vyučovaní je otázka, ako férovo hodnotiť pokrok študentov. V písomnej forme sa učiteľ žiaľ niekedy stretne s odpisovaním či priam kopírovaním riešení. S týmto sme sa snažili vysporiadať viacerými spôsobmi:

- žiaci boli pri písomných prácach rozdelení do 4 – 6 skupín najviac po 6 žiakoch,
- písomné práce boli koncipované ako zaujímavá aktivita, žiaci dostali ráno svoj kód na riešenie úloh, kódmi boli názvy súhvezdí či známych vedcov,
- každá verzia písomnej práce obsahovala jednu **otvorenú úlohu**, v ktorej mali žiaci využiť preberané pojmy a zostaviť vlastnú slovnú úlohu na preberanú tému. Aj v tomto type úlohy sa ukázalo, nakoľko žiaci rozumejú pojmom a na akej úrovni ich vedia použiť. Žiaci v týchto úlohách odkryli napríklad aj to, aké majú záujmy či ktoré oblasti vedy sú im blízke, na čo pri bežných hodinách matematiky nie je vždy čas.

Newton 4:

Za aký čas sa stiahne hra, ktorá má 1,5 GB, ak na začiatku sa sťahovala rýchlosťou 2 MB za sekundu a každú sekundu sa sťahovanie zrýchli o 0,5 MB ?

Osobitným typom hodnotenej úlohy bola **tvorivá dielňa**, v rámci ktorej žiaci najprv vypracovali riešenie svojich 4 príkladov obsahujúcich jednu otvorenú úlohu a následne dostali náhodne pridelené riešenie úloh iného spolužiaka, ktoré mali opraviť a ohodnotiť. Hodnotenie spolužiaka tvorilo štvrtinu ich vlastnej známky. Hoci žiaci túto aktivitu riešili rozdielne, po skončení aktivity prejavovali empatiu a viac pochopenia pre prácu iných.

Celková spätná väzba

Všetko bolo fajn, postup, zápis.. Kvalitná robota :D... akurát nabudúce troška čitateľnejšie píš prosím :D. Inak bolo všetko super :) 1*

Dobre si to počítala, akurát ti to vyšlo zle. Malo to byť že za 4. deň 25,6 km a za 4 dni to malo byť 147,6km.

3 / 3

Riešenie rozpísané do najmenších detailov. Dalo sa v ňom dobre zorientovať, logicky usporiadané.
V 3. príklade chýba dôkaz monotónnosti funkcie.

V prvom príklade som si všimla, že si pri odmocnine zabudla pri odmocnine, že ti vyjdu 2 riešenia(3,-3), čiže ti vyjdu 2 riešenia pre d. Ďalej som si všimla, že si nevypočítala predpis pre n-tý člen, ktorý sa vypočíta tak ze, najprv si vyjadríme a2, a4, a5 pomocou a1 (a2=a1+d,...), potom si to dosadime do prvej rovnice, kde nám vyjde a1 (13-2d), ktoré si dosadime do druhej rovnice, kde nám vyjdu 2 riešenia pre d(3,-3), ktoré si dosadime do vzorca pre an, an1 s d1 an2 s d2(an1=22-3n,an2(4+3n)=predpis pre n-tý člen. Dúfam, že pomohlo 😀.

Tímový projekt

Učenie sa v škole je sociálna aktivita. Pri dištančnom vzdelávaní môže tiež dostať svoj priestor spolupráca medzi študentami, i keď je niekedy náročnejšie ju zrealizovať. Namiesto klasickej písomnej práce z finančnej matematiky mohli študenti využiť svoje znalosti pri návrhu produktov Banky snov. Každú Banku snov vytváral štvorčlenný tím. Popri propagácii sporiacich účtov či hypotekárnych úverov mali svojimi výpočtami demonštrovať zákazníkom, nakoľko výhodný je ich produkt, a tým zároveň preukázať svoje schopnosti používať jednoduché a zložené úrokovanie.

Tímový projekt vyvolal viacero kladných ohlasov od študentov. Vyskytli sa aj problémy, aké môžu nastať pri práci v tíme – nerovnomerné rozdelenie úloh medzi členmi tímu, slabá spolupráca medzi členmi tímu, nedodržiavanie termínov, prípadne dôraz na menej podstatné časti produktov. Projekt úspešne realizovalo 28 z 32 študentov, s tými poslednými, ktorí nedokázali dobre spolupracovať, sme museli nájsť náhradné riešenie.

E-learning očami učiteľa

Vyučovanie matematiky on-line postavilo nás učiteľov pred nové výzvy. Dalo nám priestor na analýzu dôležitých či náročných tém učiva z pohľadu žiaka. Tiež sme museli hľadať úplne nové spôsoby, ako vzdelávať online a ako sa učiť spolu s našimi žiakmi. E-learning nás prirodzene nabáda zahrnúť do vyučovania malé inovácie, ako sú odznaky, väčšie tímové projekty, hodnotenie od rovesníkov. Na druhej strane si vyžaduje väčšie množstvo času na komunikáciu, hľadanie vhodných nástrojov a postupov na vyučovanie. Necháva v nás otvorenými problémy hodnotenia, samostatnosti pri riešení príkladov, stavia nás pred otázku férovosti a individuálneho prístupu voči žiakom so slabšími výsledkami. E-learning je učenie sa, učenie sa žiakov aj ich učiteľa. Veríme, že pri tomto procese sčasti pomôžu iným učiteľom aj nami prezentované aktivity.

Literatúra

[1] Berge, Z. L.: *Active, interactive and reflective elearning*, in Quarterly Review of Distance Education Volume 3, Number 2, 2002 ISSN 1528-3518

[2] Čáp, J., Mareš, J.: Psychologie pro učitele, Praha, Portál, 2001, ISBN 80-7178-463-X

PaedDr. Jana Pekárová, PhD.
Gymnázium, Veľká okružná 22, 01001 Žilina
e-mail: pekarova@gvoza.sk

DIFERENCOVANÉ KURIKULUM – VZDELÁVANIE ŠITÉ NA MIERU?

PUNČOVÁ ALEXANDRA

ABSTRAKT. Medzinárodné testovania už niekoľko desaťročí predstavujú meradlo úspešnosti vzdelávacieho systému. Príspevok sa zameriava na vyučovanie matematiky v 5. a 6. ročníku v krajine, ktorá v komparatívnych štúdiách dosahuje najlepšie výsledky – Singapure.

Kurikulum matematiky v Singapure

Pri zostavovaní kurikula matematiky od primárneho po preduniverzitný stupeň vzdelávania sa v Singapure využíva špirálový prístup. Rozdiel vo vyučovaní matematiky medzi Slovenskom a Singapurom je možné spozorovať už v 5. a 6. ročníku základnej školy, práve tu sa singapurské vyučovanie vyznačuje diferencovaným kurikulom matematiky.

Diferencované kurikulum matematiky

Diferenciácia kurikula matematiky v Singapure predstavuje matematiku rozdelenú na dve úrovne, ktoré sa vyučujú ako dva samostatné predmety – štandardná a základná matematika. Zákonný zástupca alebo škola určí žiakovi, ktorú úroveň matematiky má absolvovať v závislosti od jeho silných stránok.

Štandardná matematika je klasickým pokračovaním predmetu matematika, žiakovi sú sprostredkované predovšetkým nové informácie, učivo. Matematika na základnej úrovni je určená pre žiakov, ktorí „potrebujú viac času na učenie“, veľa času sa venuje revízii učiva z predchádzajúcich ročníkov, a nové učivo sa preberá v menšej miere ako pri štandardnej úrovni predmetu matematika.

Ako prebieha výber pre základnú alebo štandardnú úroveň predmetu matematika?

Vo 4. ročníku žiaci absolvujú skúšku, na základe ktorej im škola odporučí, či je pre nich vhodnejšie zvoliť si matematiku na základnej alebo štandardnej úrovni. Následne rodičia vyplnia formulár, kde indikujú preferovaný výber. V 5. ročníku žiak navštevuje hodiny matematiky zvolené jeho rodičmi. Škola hodnotí schopnosť žiakov vyrovnať sa s aktuálnou úrovňou predmetu na konci roka, ak je to potrebné výber sa upraví. V 6. ročníku žiak absolvuje úroveň zvolenú školou (MOE, 2019).

Rozdiel medzi základnou a štandardnou úrovňou predmetu matematika

V závislosti od úrovne sa obsah kurikula matematiky líši. Učebné osnovy pre základnú úroveň revidujú niektoré najdôležitejšie koncepty a zručnosti, ktoré žiaci preberali v 1. – 4. ročníku. V rámci základnej úrovne je žiakom poskytovaná podpora vo forme menšej veľkosti triedy, kde sa učitelia zameriavajú na pomoc žiakom pri odstraňovaní medzier alebo nedostatkov a v napredovaní tempom, ktoré zodpovedá ich potrebám. Nové koncepty a zručnosti zavedené v základnej úrovni sú podmnožinou učebných osnov pre štandardnú úroveň. Žiaci na štandardnej úrovni pokračujú v rozvíjaní poznatkov, ktoré v predchádzajúcich ročníkoch nadobudli (Ho a kol., 2019).

Matematika v 5. ročníku

Štandardná úroveň 5. ročník	Základná úroveň 5. ročník
celé čísla	celé čísla (viac úloh na delenie a násobenie)
zlomky, zlomky ako operácia delenia, štyri operácie so zlomkami	zlomky, zlomky ako delenie, delenie zlomkov celými číslami
desatinné čísla	desatinné čísla
percentá, pomer	
meranie, výpočet: obvod, obsah geometrických útvarov objem kocky, kvádra	meranie: čas, hodiny obvod geometrických útvarov objem geometrických telies – zredukované
geometria: úlohy s uhlami trojuholníky štvoruholníky	geometria: úlohy s uhlami – konsolidácia obdĺžniky, štvorce

obrázok 1: Štandardná a základná úroveň matematiky v 5. ročníku (Zdroj: vlastné spracovanie)

Štandardná úroveň v 5. ročníku je zameraná na počítanie a riešenie úloh/problémov s celými číslami, množstvo príkladov na zlomky, vrátane zlomkov ako operácie delenia a štyri operácie so zlomkami. Žiaci si tiež osvojujú štyri operácie s desatinnými číslami, a zoznamujú sa s percentami a pomerom. Na tejto úrovni žiaci pracujú aj s úlohami na meranie a výpočet obvodu a obsahu daných geometrických útvarov, a objemu kociek a kvádrov. Geometria zahŕňa viac úloh s uhlami a rôznymi druhmi trojuholníkov a štvoruholníkov. Pri analýze údajov sa zavádza priemer. V ***5. ročníku na základnej úrovni*** je sekcia s celými číslami podobná sekcii v štandardnej úrovni, ale žiaci venujú viac času úlohám zameraným na delenie a násobenie – vykonáva sa revízia učiva zo 4. ročníka. Sekcia so zlomkami čiastočne prekrýva učivo zo štandardnej úrovne. Učivo zamerané na úlohy so zlomkami nemusí obsahovať „zlomky ako delenie“ alebo „delenie zlomkov celými číslami“. Do vyučovacieho procesu sú zahrnuté úlohy s desatinnými číslami. Základná úroveň sa líši od štandardnej tým, že úlohy zamerané na percentá a pomer sú vynechané. Sekcia merania je podobná štandardnej úrovni. V tejto sekcii sa ale reviduje učivo z prechádzajúcich ročníkov týkajúce sa času, vrátane práce s hodinami, ako aj učivo o obvode geometrických útvarov. Učivo o objeme geometrických telies je zredukované. V geometrii úlohy s uhlami predstavujú konsolidáciu predchádzajúcej práce. O trojuholníkoch sa nevyučuje. Úlohy so štvoruholníkmi sa obmedzujú na obdĺžniky a štvorce. Analýza údajov zahŕňa upevňovanie predchádzajúceho učiva, a zavádza sa učivo zamerané na priemer (NCEE, 2015).

Matematika v 6. ročníku

Štandardná úroveň 6. ročník	Základná úroveň 6. ročník
celé čísla ↓	desatinné čísla
zlomky	zlomky
percentá	percentá
pomer	
rýchlosť	
meranie a geometria: obvod, obsah kruhov, zložitých útvarov objem kociek, kvádrov symboly odmocnín neznáme uhly siete	geometria: vzorce na objem klasifikácia trojuholníkov
koláčové grafy	koláčové grafy
algebra	
bez kalkulačky	používa sa kalkulačka

tabuľka 2: Štandardná a základná úroveň matematiky v 6. ročníku (Zdroj: vlastné spracovanie)

Pri ***štandardnej úrovni matematiky v 6. ročníku*** žiaci menej pracujú s celými číslami a riešia úlohy zamerané na zlomky, percentá, pomer a rýchlosť. Sekcia meranie zahŕňa obvod a obsah kruhov, zložitých útvarov, objem kociek a kvádrov, používanie symbolov odmocnín. Pri geometrii žiaci riešia úlohy s neznámymi uhlami a sieťami daných útvarov. Analýza údajov obsahuje koláčové grafy. Zavádza sa formálna algebra vrátane použitia písmen pre neznáme a výrazov jednej premennej. ***V 6. ročníku základnej úrovne*** je učivo zamerané na zlomky, desatinné čísla a percentá. Sekcia merania a geometrie obsahuje aj úlohy z 5. ročníka štandardnej úrovne, napríklad použitie vzorcov pre objem a klasifikáciu trojuholníkov. Analýza údajov obsahuje koláčové grafy. Sekcia algebry sa v základnej úrovni nenachádza, čo je kľúčový rozdiel medzi štandardnou a základnou úrovňou. Žiaci, ktorí absolvujú matematiku na základnej úrovni majú povolené používať kalkulačky, a ktorí matematiku absolvujú na štandardnej úrovni riešia úlohy bez kalkulačky (NCEE, 2015).

Záver

Ako uvádza Ho (2019) úlohou diferenciácie predmetu matematika na dve úrovne na základných školách v Singapure je rozpoznať rozdiely v schopnostiach žiakov v tomto predmete. Žiakom je ponúkaná matematika na štandardnej alebo základnej úrovni, na základe ich pripravenosti a vedomostí v danom predmete. Diferencované kurikulum poskytuje žiakom väčšiu flexibilitu: v prípade, že je pre nich matematika zložitá, môžu si v nej naďalej budovať základy na základnej úrovni, ak im matematika nerobí problémy môžu sa sústrediť na rozšírenie svojho potenciálu, a zvoliť si tento predmet na štandardnej úrovni.

Literatúra

[1] Ministry of Education. (MOE). *Subject based banding.* . Singapore: MOE, 2016. [Online]. [Cit. 20.9.2020]. Dostupné z: https://www.moe.gov.sg/docs/default-source/document/education/primary/files/subject-based-banding-english.pdf

[2] Ho, W. K., Toh, P. C., Teo, K. M., Zhao, D., & Hang, K. H. (2019). *Beyond School Mathematics. IN*V T. L. Toh, B. Kaur, & E. G. Tay (Ed.), Mathematics Education in Singapore (s. 67–100). Springer Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-13-3573-0_5

[3] NCEE. 2015. *Aligned Instructional Systems: Singapore.* [Online]. [Cit. 11.9.2020]. Dostupné z: http://www.ncee.org/wp-content/uploads/2015/09/Singapore-Jurisdiction-Report.pdf.

Mgr. Alexandra Punčová
Katolícka univerzita v Ružomberku
Hrabovská cesta 1
034 01 Ružomberok
e-mail: alexandra.puncova801@edu.ku.sk

FAKTORY OVPLYVŇUJÚCE VZŤAH ŽIAKOV NIŽŠIEHO STREDNÉHO VZDELÁVANIA K MATEMATIKE

REITEROVÁ MONIKA

ABSTRAKT. *Postoj alebo vzťah žiakov k matematike je možné meniť, a tým pôsobiť na matematické vzdelávanie žiakov a ich výsledky. Preto sme pokladali za dôležité prispieť k poznaniu, ktorými činiteľmi sa dá formovať vzťah žiakov k matematike. Cieľom príspevku je oboznámiť s výsledkami výskumu, ktorý identifikoval faktory ovplyvňujúce vzťah žiakov nižšieho stredného vzdelávania k matematike.*

Úvod

Postoj žiakov k matematike je sám o sebe faktorom, ktorý ovplyvňuje výsledky žiakov v matematike. Dokladajú to viaceré zdroje, napríklad Ma a Xu, (2004) a Kundu a Ghose (2016). Práve prepojenosť výsledkov žiakov dosahovaných v matematike s postojmi žiakov k matematike bolo impulzom k realizácii výskumu.

Ďalšími dôvodmi boli dosahované výsledky slovenských žiakov z matematiky v národných aj medzinárodných meraniach. V neposlednom rade sme chceli prispieť k riešeniu klesajúcej úrovne matematického vzdelávania na Slovensku.

Ciele výskumu

Hlavným cieľom výskumu bolo identifikovať kľúčové (školou ovplyvniteľné) faktory, ktoré vplývajú na vzťah žiakov nižšieho stredného vzdelávania k matematike. Ďalšími cieľmi bolo zistiť rozdiel medzi

- chlapcami a dievčatami v hodnotení vzťahu k matematike,
- žiakmi jednotlivých ročníkov druhého stupňa základnej školy a príslušnými ročníkmi gymnázia s osemročným štúdiom v hodnotení vzťahu k matematike,
- žiakmi základnej školy a žiakmi gymnázií s osemročným štúdiom v hodnotení vzťahu k matematike.

Teoretické východiská

Pri projektovaní výskumu sme vychádzali z odbornej literatúry, pričom sme sa zamerali a podrobnejšie opísali faktory: motivácia, učiteľ, klíma triedy, organizácia vyučovania, hodnotenie výsledkov vzdelávania žiakov. Tieto faktory sme reflektovali pri zostavovaní výskumného nástroja – dotazníka.

Výskumu postojov žiakov sa zaoberali viaceré zahraničné výskumy. Tie sa sústreďovali najmä na rozdielne postoje z hľadiska pohlavia, dosahovania výsledkov v matematike, vplyvu školského prostredia, ale aj vnímania obáv alebo matematickej úzkosti. Výskumy realizované v podmienkach Slovenskej republiky boli len parciálne a na pomerne malých výskumných súboroch.

Medzinárodné štúdie TIMSS 2015 a PISA 2012, v ktorej bola hlavnou doménou matematická gramotnosť, zisťovali postoje žiakov prostredníctvom žiackych dotazníkov. Práve nimi sme sa inšpirovali pri zostavovaní výskumného nástroja.

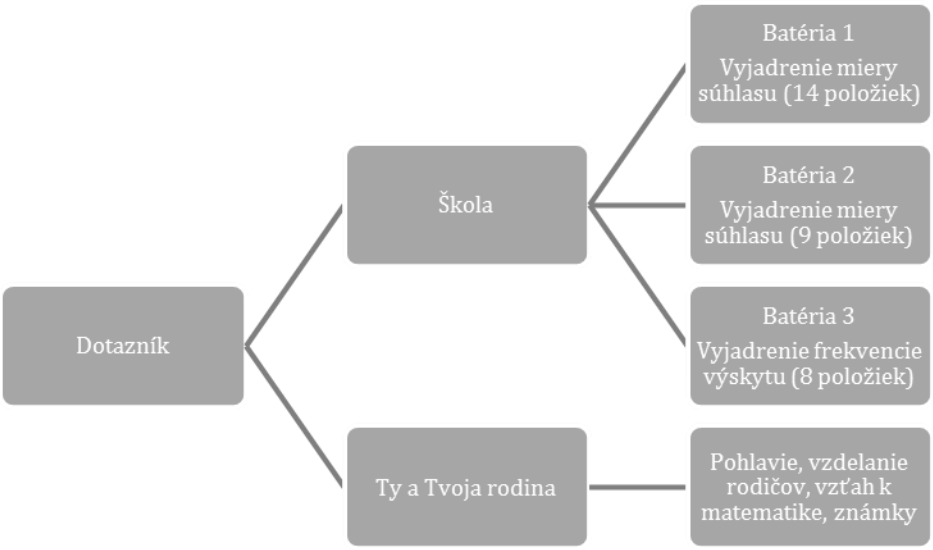
Výskumný súbor

Vzhľadom na to, že našou ambíciou bolo zrealizovať celoslovenský kvantitatívny výskum, vyberali sme školy náhodným výberom. Výskumný súbor v konečnom dôsledku tvorilo 6 730 žiakov 5. – 9. ročníka ZŠ a príslušných ročníkov GOŠ. Spracovávaných však bolo len 6 157 dotazníkov. Vyradili sme tie dotazníky, ktoré neboli v relevantných položkách úplne vyplnené.

Reprezentatívnosť výskumného súboru pre SR bola preukázaná testom dobrej zhody chí kvadrát vzhľadom na pohlavie respondentov, ročník, ktorý respondenti navštevujú, a kraj, v ktorom sa nachádza škola respondenta. Výskumný súbor nebol reprezentatívny vzhľadom na vyučovací jazyk, v ktorom sa respondenti vzdelávali.

Výskumný nástroj

Výskumným nástrojom bol dotazník inšpirovaný žiackymi dotazníkmi medzinárodných štúdií. Vzhľadom na to, že sa výskum realizoval aj v školách s vyučovacím jazykom maďarským, bola k dispozícii aj jeho maďarská mutácia. Dotazník bol pred samotnou administráciou pilotovaný a upravený do konečnej podoby.



Obrázok 1: Štruktúra dotazníka

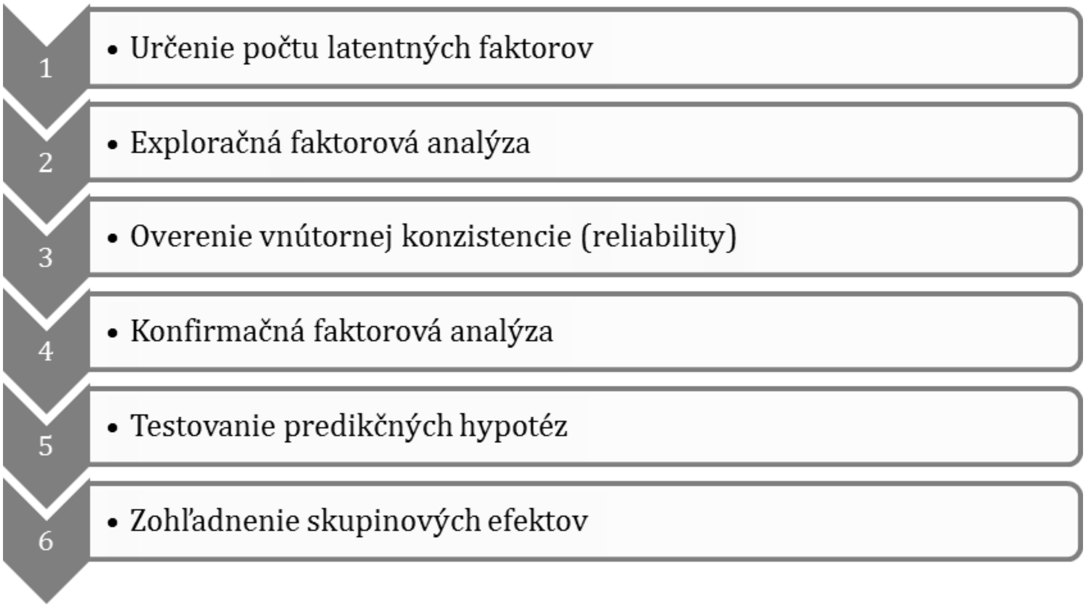
Zber a spracovanie dát

Pred samotným zberom dát boli náhodne vyžrebované školy oslovené telefonicky a následne e-mailom. Kontaktovali sme zástupcu školy, vysvetlili situáciu a dohodli konkrétny termín zberu dát na danej škole.

Každú vybranú školu sme osobne navštívili, zúčastnili sme sa pri zbere dát, kedy boli zodpovedané aj prípadné otázky respondentov. Pre zabezpečenie vyššieho porozumenia sa žiakom 5. a 6. ročníka dotazník čítal. Pri väčších školách, kde nebolo možné v danom čase administrovať dotazník vo všetkých triedach osobne, prebehlo inštruovanie učiteľov, ako administrovať dotazníky, poskytli sa im odpovede na najčastejšie otázky respondentov.

Po zbere dát na mieste sa začalo kódovanie dotazníkov do Excelu, kde sa priradila zakódovaná informácia o ročníku a o tom, ktoré skupiny mali toho istého vyučujúceho. Po vyradení neúplných dotazníkov vznikol konečný rozsah štatistického súboru.

Následne sme začali dáta spracovávať. V rámci opisnej štatistiky sme vypočítali aritmetický priemer, modus a uviedli absolútnu početnosť jednotlivých odpovedí.



Obrázok 2: Etapy štatistickej analýzy

Ťažiskom spracovania dát bola štatistická analýza, ktorá mala šesť etáp. Celý výskumný súbor sme náhodne rozdelili do dvoch podsúborov. Prvé tri etapy sa realizovali na prvom podsúbore. Štvrtá etapa sa robila na druhom podsúbore. Piata a šiesta etapa prebiehala na celom výskumnom súbore.

Určenie počtu latentných faktorov

Išlo o zásadný prvý krok, bez ktorého sa nedá uskutočniť exploračná faktorová analýza. Každá takáto analýza totiž predpokladá extrakciu latentných faktorov. Použili sme Hornovu paralelnú analýzu (Hayton et al., 2004) s prvým podsúborom. Boli určené počty faktorov: v 1. a 2. batérii po tri faktory, v 3. batérii dva faktory, spolu 8 faktorov.

Exploračná faktorová analýza

V druhej etape štatistickej analýzy nasledovala exploračná faktorová analýza (Costello & Osborne, 2005) s prvým podsúborom. Cieľom exploračnej faktorovej analýzy bolo priradiť otázky k jednotlivým faktorom, prípadne vyradiť tie otázky, ktoré mali nedostatočné psychometrické vlastnosti (teda nedostatočne korelovali s ostatnými otázkami, takže sa nedali priradiť k žiadnemu faktoru). Pokúsili sme sa tiež obsahovo a významovo pomenovať všetky faktory, pretože ak sa otázky zoskupia do jedného latentného faktora / dimenzie, znamená to, že spolu vzájomne korelujú viac, ako korelujú s inými otázkami, čo by malo mať obsahové, nielen štatistické zdôvodnenie. V tejto fáze bolo vyradených 5 položiek (z 31), pretože mali veľmi slabé faktorové sýtenia. V exploračných faktorových analýzach mali všetky faktorové modely pre každú z troch batérií veľmi dobrú zhodu s dátami, aj keď bolo následne nevyhnutné vyradiť niekoľko položiek, ktoré mali slabé psychometrické vlastnosti.

Overenie vnútornej konzistencie (reliability)

Tretím krokom bolo overenie vnútornej konzistencie (reliability). Uvádzali sme hodnoty indexov Cronbachova alpha, McDonaldova omega, hierarchická omega a ECV. Všetky tieto indexy boli vypočítané najskôr pre prvý podsúbor (31 položiek), a následne boli validizované použitím druhého podsúbora (26 položiek, bez vyradených položiek).

Zďaleka najpoužívanejším indexom internej konzistencie (reliability) je Cronbachova alpha. Tento index má však niektoré zásadné nedostatky:

- má tendenciu byť automaticky vyšší pri vyššom počte položiek bez ohľadu na ich vnútornú konzistenciu;
- nijako nezohľadňuje dimenzionalitu (počet faktorov) v dátach. Napriek rozšírenej mienke jeho vysoké hodnoty neznamenajú, že položky tvoria jeden faktor / dimenziu;
- najzávažnejším nedostatkom je, že predpokladá takzvanú tau-ekvivalenciu, teda to, že každá položka prispieva k vnútornej konzistencii približne rovnako. V štatistickom jazyku faktorových analýz sa tento predpoklad dá vyjadriť tak, že každá položka má približne rovnaké faktorové sýtenie (teda štandardizovanú regresnú váhu) vzhľadom na faktor. V reálnom svete empirických dát je tento predpoklad ťažko dosiahnuteľný. Z tohto dôvodu súčasné psychometrické odporúčania (Dunn et al., 2014) nabádajú k používaniu iného, oveľa presnejšieho indexu vnútornej konzistencie (reliability), a tým je McDonaldova omega.

McDonaldova omega sa vyhýba nedostatkom Cronbachovej alpha jednoducho preto, lebo sa počíta z reálnych faktorových sýtení v dátach. Jeho ďalšou výhodou je, že umožňuje zároveň posúdiť dimenzionalitu (Reise et al., 2010). McDonaldova omega je vlastne podielom vysvetleného rozptylu z celkového rozptylu, zvyšok sú náhodné chyby.

Interná konzistencia jedného všeobecného faktora sa overuje mierne modifikovaným indexom hierarchická omega. Tento index vyčísľuje pomer, koľko rozptylu vysvetľuje jediný všeobecný faktor v porovnaní s čiastkovými faktormi a náhodnými chybami.

Index ECV (explained common variance, spoločný vysvetlený rozptyl) je indexom jednodimenzionality. Tento index vyjadruje, koľko z vysvetleného rozptylu (teda bez zohľadnenia chýb) pripadá na jeden všeobecný faktor a koľko vysvetľujú čiastkové faktory. Ak má ECV nízke hodnoty, nemôžeme sa spoľahnúť, že jediný faktor vysvetľuje dostatočne rozptyl v dátach a musíme brať do úvahy čiastkové faktory – teda záverom bude, že dotazník je viacfaktorový (viacdimenzionálny).

Konfirmačná faktorová analýza

Konfirmačnou faktorovou analýzou sme overili faktorovú štruktúru z exploračných faktorových analýz, ale na druhej polovici výskumného súboru.

Všetky tri modely mali vynikajúcu zhodu s dátami aj v druhom podsúbore, takže ich faktorové štruktúry sme pokladali za definitívne potvrdené.

Testovanie predikčných hypotéz

Použilo sa štrukturálne modelovanie, pričom v každom modeli bol závislou premennou vzťah žiaka voči matematike a nezávislými premennými boli latentné faktory určené v predošlých konfirmačných faktorových analýzach (bolo ich osem) a pozorované (teda nie latentné) prediktory: postoj matky voči matematike, postoj otca voči matematike, navštevovaný ročník v škole a pohlavie.

Výsledky testovania predikčných hypotéz neboli ešte konečnými výsledkami, pretože sme v poslednej etape zohľadnili skupinové efekty.

Zohľadnenie skupinových efektov

Poslednou etapou štatistickej analýzy bolo zohľadnenie prípadného vplyvu učiteliek a učiteľov. Mohli sme oprávnene predpokladať, že mnohé názory a postoje žiakov voči matematike, ako aj voči učiteľom, ovplyvňuje to, ktorý učiteľ ich matematiku učí. Žiaci, ktorých učí ten istý učiteľ, mohli poskytovať vzájomne podobné odpovede. Skupinové efekty sa dajú zohľadniť viacúrovňovým modelom.

Výsledky výskumu

Základným zistením výskumu bolo, že žiaci hodnotia svoj vzťah k matematike skôr pozitívne – priemer 3,24 (hodnotenie prebehlo na sedemstupňovej škále, pričom 1 = mám matematiku rád/rada, 7 = nemám matematiku rád/rada), pričom najčastejšou hodnotou bola hodnota 2.

Po spresnení na základe viacúrovňových modelov majú všetky prediktory okrem predstáv o dôležitosti matematiky v budúcnosti štatisticky signifikantný vplyv na postoje žiakov k matematike. Z hľadiska vecnej významnosti najdôležitejšími prediktormi sú obľúbenosť matematiky žiakmi (či ich baví) a dosahované výsledky. Stredne významné sú postoje rodičov k matematike, správanie učiteľa a pocity žiakov. Ostatné prediktory (pozitívny prístup učiteľa, snaha žiaka v predmete matematika, hlučná atmosféra v triede, ročník, pohlavie) sú z vecného hľadiska zanedbateľné, pretože ich vplyv, napriek štatistickej významnosti, je z hľadiska veľkosti efektu minimálny.

prediktor	regresný koeficient (Std.)	p
obľúbenosť matematiky	0,702	< 0,001
výsledky v MAT	0,703	< 0,001
vzťah matky k MAT	0,306	< 0,001
správanie učiteľa	0,265	< 0,001
vzťah otca k MAT	0,230	< 0,001
pocity voči MAT	–0,203	< 0,001
hlučná atmosféra v triede	0,149	< 0,001
snaha v predmete MAT	0,100	< 0,001
pozitívny prístup učiteľa	–0,097	< 0,001
ročník	0,086	< 0,001
pohlavie	0,021	0,032
dôležitosť MAT pre budúcnosť	0,005	0,681

Tabuľka 1: Výsledky výskumu

Ako vidíme z výsledkov uvedených v tabuľke 1, čím je žiakmi **matematika obľúbenejšia**, tým k nej mali pozitívnejší vzťah. Podobne žiaci, ktorí pokladali svoje **výsledky za dobré**, mali aj pozitívnejší vzťah k matematike.

Žiaci, ktorí pociťovali väčšie obavy vo vzťahu k matematike, mali paradoxne lepší vzťah k matematike, s tým mohlo súvisieť aj zistenie, že čím pozitívnejší bol názor žiakov na učiteľa matematiky, tým slabší bol ich vzťah k matematike.

- Výskum ukázal, že nie je rozdiel v postojoch chlapcov a dievčat k matematike.
- Výsledky potvrdili, že so zvyšujúcim sa ročníkom (vekom) sa postoj k matematike zhoršuje.

Odporúčania pre prax

Výsledky výskumu ukázali, že dobré výsledky v matematike vedú k budovaniu pozitívneho vzťahu žiakov k matematike, a preto odporúčame vytvárať atmosféru na hodinách matematiky tak, aby každý žiak mohol zažiť pocit, že dosahuje dobré výsledky vzhľadom na svoje možnosti.

Výsledky ukázali aj štatisticky významnú závislosť medzi vnútornou motiváciou žiakov a ich postojov k matematike. Odporúčame vytvárať podmienky na zvyšovanie vnútornej motivácie žiakov pre učenie sa matematiky, aktívne viesť hodiny matematiky a vytvárať priestor pre aktivitu žiaka.

Napriek tomu, že výsledky ukázali negatívnu koreláciu medzi pocitmi a postojmi žiakov k matematike, môže mať zníženie matematickej úzkosti vplyv na zvýšenie sebadôvery, a tým na zvýšenie pozitívneho vzťahu žiakov k matematike. Učitelia by mali vytvárať podmienky na zníženie pocitu úzkosti a obáv žiakov zo zlyhania pri riešení matematických úloh a vnímať chybu ako príležitosť na zlepšenie žiakových výkonov, nie ako znak jeho zlyhania.

Vzhľadom na to, že výsledky ukázali stredne významnú závislosť medzi tým, ako vnímajú žiaci postoj svojich rodičov k matematike a ich vlastným postojom k matematike, pričom väčší vplyv má vnímanie postoja mamy, odporúčame oboznámiť rodičov o tomto zistení a nabádať ich, aby svoje skúsenosti s matematikou prezentovali v pozitívnom zmysle a podporovali svoje deti aj v matematickom vzdelávaní.

Stredne významná závislosť bola identifikovaná medzi správaním učiteľa, čiže jeho záujmom, pomocou zo strany učiteľa, poskytnutím priestoru na vlastný názor žiakov a postojom žiakov k matematike. Učitelia by mali vo väčšej miere poskytovať spätnú väzbu žiakom, najmä v zmysle povzbudenia a identifikácie slabých miest, poskytovať im priestor na vlastný názor, prezentovanie svojich riešení a prácu s chybou.

Dôležitosť matematiky pre budúcnosť podľa výsledkov výskumu nemala vplyv na postoje žiakov k matematike. Napriek tomu odporúčame prepájať vedomosti a zručnosti získané vyučovaním matematiky s bežným životom, či už pracovným alebo osobným počas celého matematického vzdelávania, ukázať potrebu matematiky v ľudskom živote.

Literatúra

[1] Costello, A. B. & Osborne, J. W. (2005). Best Practices in Exploratory Factor Analysis: Four Recommendations for Getting the Most from Your Analysis. *Practical Assessment, Research & Evaluation*, 10(7), 1-9.

[2] Dunn, T. J., Baguley, T. & Brunsden, V. (2014). From alpha to omega: A practical solution to the pervasive problem of internal consistency estimation. *British Journal of Psychology*, 105(3), 399–412.

[3] Hayton, J. C., Allen, D. G. & Scarpello, V. (2004). Factor Retention Decisions in Exploratory Factor Analysis: A Tutorial on Parallel Analysis. *Organizational Research Methods*, 7(2), 191-205.

[4] Kundu, A. & Ghose, A. (2016). The Relationship between Attitude towards and Achievement in Mathematics among Higher Secondary Students. *International Journal of Multidisciplinary Research and Development*, 3(6). 69 – 74. Dostupné na internete: www.allsubjectjournal.com

[5] Ma, X. & Xu, J. (2004). Determining the Casual Ordering between Attitude toward Mathematics and Achievement Mathematics. *American Journal od Education*, 110(3), 256 – 280.

[6] Reise, S. P., Moore, T. M., & Haviland, M. G. (2010). Bifactor models and rotations: Exploring the extent to which multidimensional data yield univocal scale scores, *Journal of Personality Assessment*, 92, 544-559.

PaedDr. Monika Reiterová, PhD.
Štátny pedagogický ústav
Pluhová 8
SK – 830 00 Bratislava
e-mail: monika.reiterova@statpedu.sk

VZDELÁVACÍ PROGRAM MATEMATIKY TROCHU INAK

REITEROVÁ MONIKA, ČIPKOVÁ HAMPLOVÁ LUJZA

ABSTRAKT. *Mimoriadna situácia v školskom roku 2019/2020, ktorú musela riešiť aj pedagogická verejnosť, urýchlila kroky smerujúce k úpravám vzdelávacích programov jednotlivých vyučovacích predmetov ŠVP. V príspevku sa dozviete, aké zmeny to vyvolalo vo vzdelávacom programe matematiky.*

Zdôvodnenie vzniku Rámcových učebných plánov podľa cyklov vzdelávania a Upravených cieľov a obsahu vzdelávacích oblastí a vyučovacích predmetov

V školskom roku 2019/2020 nastala mimoriadna situácia v súvislosti so šírením vírusu COVID19 a školské vyučovanie v základných, stredných i vysokých školách bolo prerušené. Prezenčná forma výučby sa zmenila na dištančnú. Učitelia i žiaci sa ocitli v neznámej situácii, ktorú sa snažili čo najlepšie riešiť. No nie každý žiak si počas dištančnej výučby dostatočne osvojil vedomosti a zručnosti na požadovanej úrovni daného ročníka, či pri výstupe stupňa vzdelania. Niektorí žiaci nemali podmienky k dištančnému vzdelávaniu, nemali dostatok sebadisciplíny, motivácie a neučili sa takou intenzitou, na ktorú boli zvyknutí pri prezenčnej forme. Tieto okolnosti prispeli k zväčšeniu rozdielov v úrovni vedomostí a zručností medzi žiakmi. Preto Štátny pedagogický ústav považoval za potrebné reagovať na vzniknutú situáciu a pripravil Dodatok k Štátnemu vzdelávaciemu programu spolu s Metodickým usmernením k aplikácii Rámcových učebných plánov podľa cyklov vzdelávania a Upravených cieľov a obsahu vzdelávacích oblastí a vyučovacích predmetov.

Prínos úpravy cieľov, obsahu a časového rozvrhnutia vzdelávania

Prínosov úpravy cieľov, obsahu a časového rozvrhnutia vzdelávania je hneď niekoľko:

- žiak plynulo a v súlade so svojím tempom i schopnosťami pokračuje vo vzdelávaní v ročníku, do ktorého v novom školskom roku nastúpi,
- školy nepresúvajú učivo z ročníka do ročníka a nedoháňajú zmeškané v kumulácii s predpísanými ročníkovými vzdelávacími štandardmi,
- školy si upravia obsah vzdelávania vzhľadom na potreby žiakov v súlade s ich vedomosťami a schopnosťami,
- školy získajú viac flexibility a voľnosti pri úprave školských vzdelávacích programov,
- učitelia sa sústredia na podstatné vzdelávacie ciele vymedzené v rámci vzdelávacích oblastí a vyučovacích predmetov.

Uplatnenie Rámcových učebných plánov podľa cyklov a Upravených cieľov a obsahu vzdelávania v školských vzdelávacích programoch

Vytvorením a zverejnením dokumentov – Rámcových učebných plánov podľa cyklov a Upravených cieľov a obsahu vzdelávania v školských vzdelávacích programoch – nestrácajú platnosť Rámcové učebné plány ani vzdelávacie štandardy Štátneho vzdelávacieho programu z roku 2015. Škola si sama vyberie, či a v akej miere využije možnosť úprav Školského vzdelávacieho programu podľa týchto materiálov. Podmienkou však je, že sa musí prihlásiť a zapojiť do programu pilotného overovania tohto prístupu, koordinovaného Štátnym pedagogickým ústavom. V rámci pilotného overovania prihlásená škola dostane osobitnú podporu a asistenciu.

Cykly vzdelávacieho programu vyučovacieho predmetu matematika

Vzdelávací program jednotlivých vyučovacích predmetov, aj matematiky, nie je rozdelený do ročníkov, ale do väčších ucelených častí – troch cyklov. V porovnaní s platnou legislatívou nám namiesto dvoch vzdelávacích stupňov vznikli tri cykly. Spojením hodinovej dotácie do cyklov v rámci základnej školy získajú školy možnosť rozvrhnutia obsahu vzdelávania podľa ich potrieb. Prvý cyklus tvorí prvý až tretí ročník základnej školy. Druhý cyklus združuje posledný ročník 1. stupňa základnej školy a začiatočný ročník 2. stupňa základnej školy, teda štvrtý ročník s piatym. Tretí cyklus vznikol spojením šiesteho až deviateho ročníka základnej školy. Počty hodín matematiky v jednotlivých cykloch uvádza tabuľka 1.

Vyučovací predmet	1. cyklus (1. – 3. ročník)	2. cyklus (4. – 5. ročník)	3. cyklus (6. – 9. ročník)
Matematika	12 hodín	8 hodín	17 hodín

Tabuľka 1: Počet hodín matematiky v cykloch

Výhodou druhého cyklu je, že žiaci, ktorí nedokážu do ukončenia štvrtého ročníka naplniť ciele primárneho vzdelávania, môžu potrebné nadobudnúť v piatom ročníku, teda nemusia opakovať ročník. Ako opatrenie vyrovnávacieho charakteru bolo prijaté spojenie štvrtého a piateho ročníka základnej školy, hoci patria do rôznych stupňov vzdelávania v zmysle ustanovení Školského zákona. Platná legislatíva je momentálne prekážkou celoplošného využívania upravených dokumentov.

Vzdelávací štandard v cykloch

Definovanie vzdelávacieho štandardu do cyklov umožňuje väčšiu variabilitu, či už v rámci ročníka alebo cyklu. Učiteľ má možnosť určiť si sám poradie tematických celkov, môže ich presúvať aj medzi ročníkmi (súčasné zaradenie tematických celkov do ročníkov).

Dochádza k redukcii výkonových štandardov v zmysle odstránenia duplicity, ich komplexnejšiemu a rámcovejšiemu zadefinovaniu.

Uvádzame príklady upravených výkonových štandardov:

- Výkonový štandard pre prvý cyklus *Prečítať, zapísať, usporiadať a porovnať prirodzené čísla do 10 000* je výkonom pre 1. až 3. ročník, pričom v každom ročníku sa realizuje na inom číselnom obore – v 1. ročníku do 20, v 2. ročníku do 100 a v 3. ročníku do 10 000.
- Výkonový štandard pre druhý cyklus *Vykonávať počtové operácie s prirodzenými číslami* je výkonom pre 4. až 5. ročník, pričom zahŕňa počítanie spamäti aj písomne, s prechodom cez základ 10, bez prechodu cez základ 10.
- Výkonový štandard pre tretí cyklus *Orientovať sa na číselnej osi* je výkonom pre 6. až 9. ročník, pričom v 6. ročníku sa realizuje na desatinných číslach, v 7. ročníku na zlomkoch a v 8.ročníku na celých číslach.

Jednoducho povedané, jeden výkon sa môže viazať na viacero obsahov.

Vymedzenie vzťahov s inými vzdelávacími oblasťami a s prierezovými témami

Jedným z cieľov úprav bolo aj posilnenie vnútropredmetových a medzipredmetových (medzioblastných) vzťahov. Naskytli sa príležitosti na využívanie vzťahov vzdelávacej oblasti *Matematika a práca s informáciami* s inými vzdelávacími oblasťami:

- *Jazyk a komunikácia* – čítanie s porozumením a nesúvislé texty,
- *Človek a príroda* – jednotky času, dĺžky a objemu, tabuľky a grafy, závislosti, percentá, zmesi a formulovanie hypotéz,
- *Človek a spoločnosť* – tabuľky, grafy a závislosti, mierka mapy a formulovanie hypotéz,
- *Človek a svet práce* – konštrukcie, stavby a ich plány, mierka, počtové operácie, percentá,
- *Umenie a kultúra* – najmä geometria.

Vo vzťahu k finančnej gramotnosti sa zaraďujú rôzne kontextové úlohy.

Predpoklady pre úspešnosť

Predpokladmi pre úspešnosť realizácie Rámcových učebných plánov podľa cyklov vzdelávania a Upravených cieľov a obsahu vzdelávacích oblastí a vyučovacích predmetov sú:

- diferencované vyučovanie z pohľadu učiteľa (učiteľ si musí naplánovať vyučovaciu hodinu tak, aby každý žiak mal šancu byť aktívny a zažiť pocit úspechu), ale aj pohľadu žiaka (žiaci musia byť pripravení na to, že vyučovanie neprebieha frontálne, ale skôr v skupinách, dvojiciach alebo individuálne podľa aktuálnej situácie v triede),
- individuálny prístup smerom k žiakom (učiteľ musí mať prehľad, akú podporu a pomoc potrebuje jednotlivec a podľa toho nastaviť podmienky vyučovania),
- informovanosť a podpora zo strany rodičov (keďže ide o pomerne neštandardný (hoci by to už dávno nemalo platiť) spôsob vyučovania, mali by byť o ňom oboznámení rodičia, aby mohli prípadne svojim deťom vysvetliť situáciu a byť nápomocní).

Otvorené otázky

Otvorenými otázkami zostávajú:

- Ako bude fungovať prechod medzi cyklami v prípade nezvládnutia vzdelávacieho štandardu stanoveného pre daný cyklus?
- Opakovať sa môže len tretí, piaty, prípadne deviaty ročník?
- Ako sa bude hodnotiť v jednotlivých ročníkoch? Čo bude indikátormi?
- Ako učiteľ vo vyššom ročníku bude vedieť, kam sa konkrétny žiak dostal?
- Budú skôr zmiešané skupiny – t. j. vekovo rozdielne, ale s rovnakým obsahom vzdelávania alebo diferencované vyučovanie?

Na tieto i mnohé ďalšie otázky nám môže ponúknuť odpovede pripravované pilotné overovanie „vzdelávania podľa cyklov“.

Literatúra

[1] Štátny pedagogický ústav: *Dodatok č. 8 k Štátnemu vzdelávaciemu programu*, Bratislava, 2020, dostupné na https://www.statpedu.sk/files/sk/svp/pilotne-overovanie/rup-podla-cyklov-vzdelavania/dodatok-c-8.pdf

[2] Štátny pedagogický ústav: *Dodatok č. 8 k ŠVP príloha č. 1 – Rámcový učebný plán podľa cyklov vzdelávania,* Bratislava, 2020, dostupné na https://www.statpedu.sk/files/sk/svp/pilotne-overovanie/rup-podla-cyklov-vzdelavania/dodatok-c-8-priloha-c-1.pdf

[3] Štátny pedagogický ústav: *Matematika a informatika – Upravené ciele a obsah vzdelávacích oblastí a vyučovacích predmetov,* Bratislava, 2020, dostupné na https://www.statpedu.sk/files/sk/svp/pilotne-overovanie/upravene-ciele-obsah/aktualizovane-vs/vo_mai.pdf

[4] Štátny pedagogický ústav: *Metodické usmernenie k aplikácii Rámcových učebných plánov podľa cyklov vzdelávania a Upravených cieľov a obsahu vzdelávacích oblastí a vyučovacích predmetov*, Bratislava, 2020, dostupné na https://www.statpedu.sk/files/sk/svp/pilotne-overovanie/metodicke-usmernenie/metodicke_usmernenie_bez_dodatku.pdf

PaedDr. Monika Reiterová, PhD.
Štátny pedagogický ústav
Pluhová 8
SK – 830 00 Bratislava
e-mail: monika.reiterova@statpedu.sk

PaedDr. Lujza Čipková Hamplová, PhD.
Štátny pedagogický ústav
Pluhová 8
SK – 830 00 Bratislava
e-mail: lujza.hamplova@statpedu.sk

MATEMATICKÉ WEBY AKO UŽITOČNÝ POMOCNÍK UČITEĽA

SAHUĽ ĽUBOMÍR

ABSTRAKT. Prednedávnom som v rámci facebookovej skupiny pre učiteľov matematiky (Učitelia matematiky, nápady, odkazy, rady) vytvoril tabuľku, ktorá zbiera zoznam matematických webov, aby sa učitelia matematiky mohli navzájom inšpirovať. V tomto príspevku by som vám rád niektoré zaujímavé webové stránky predstavil a verím, že budú pre vás v niečom obohatením.

V 21. storočí je práca s počítačmi a digitálnym obsahom neoddeliteľnou súčasťou našich každodenných životov. Tomuto trendu sa nevyhlo ani školstvo a vzdelávanie. Papierové žiacke knižky nahradilo elektronické známkovanie, triedne knihy a dochádzku vystriedalo zapisovanie na „*Edupage*“ [33] a vysvetlenie nového učiva je možné riešiť pomocou interaktívnych prvkov, ktoré ponúka „neobmedzený“ svet internetu. Mnohé zmeny ohľadom zavádzania informačno-komunikačných technológií do vzdelávania v našej krajine sa líšili podľa individuálneho prístupu škôl a učiteľov, ktoré ich implementovali rôznym tempom. Avšak rok 2020 (situácia ohľadom šírenia ochorenia Covid-19) a následný prechod výučby zo škôl do domáceho prostredia prinútil vzdelávacie inštitúcie ešte viac siahnuť po digitálnom vzdelávaní. Aké sú možnosti v rámci predmetu matematiky v online priestore? Aké portály môžu byť nápomocné učiteľovi alebo študentovi pri výučbe aritmetiky, geometrie či kombinatoriky v škole a v dištančnom vzdelávaní? Tento krátky príspevok sa pokúsi predstaviť aspoň niektoré z nich.

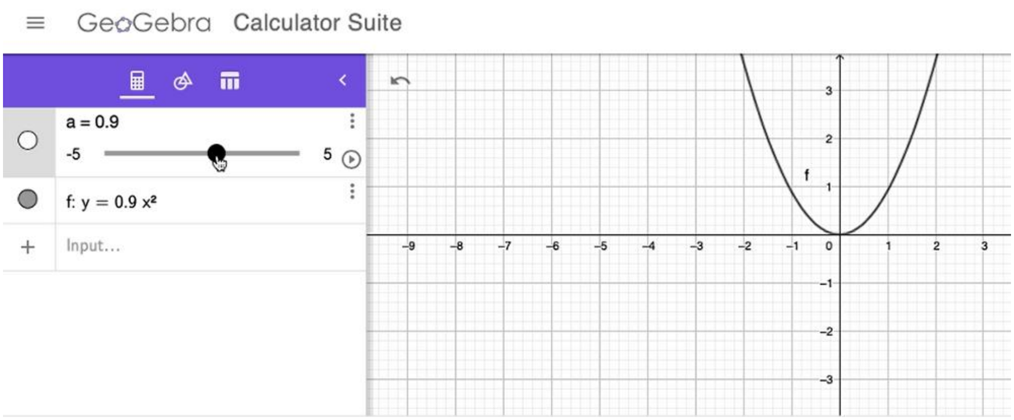
Celé to začalo v učiteľskej Facebook skupine *Učitelia matematiky, nápady, odkazy, rady*[34], kde som v auguste 2020 vytvoril tabuľku, ktorá obsahuje rôzne odkazy na pestré matematické weby. Tie majú byť inšpiráciou pre učiteľov základných a stredných škôl. Tabuľka je vytvorená ako otvorený systém, takže každý v rámci tejto skupiny môže do nej pridávať nové odkazy, ktoré môžu byť druhým pedagógom nápomocné pri ich vzdelávacej činnosti. Na úplnom začiatku som tam sám pridal niektoré zaujímavé webové lokality a pár by som vám z nich predstavil v nasledovných odsekoch.

Prvý portál, ktorý by som priblížil je *Geogebra*.[35] Určite ju mnohí z vás poznajú, ale skôr by som upriamil pozornosť na niektoré ďalšie funkcie. Samozrejme ponúka široké možnosti pri tvorbe rôznych funkcií či planimetrických a stereometrických útvarov. Výhodou je napríklad vytváranie funkčných predpisov aj s parametrami, pri ktorých sa nám objaví posuvník na zmenu parametru, čo nám bude plynule meniť priebeh funkcie. Pri kvadratickej funkcii môžeme meniť koeficient *a*, ktorý bude meniť tvar paraboly z konvexnej na konkávnu.

[33] Edupage - komplexný informačný systém pre základné školy a stredné školy

[34] https://www.facebook.com/groups/uciteliamatematiky

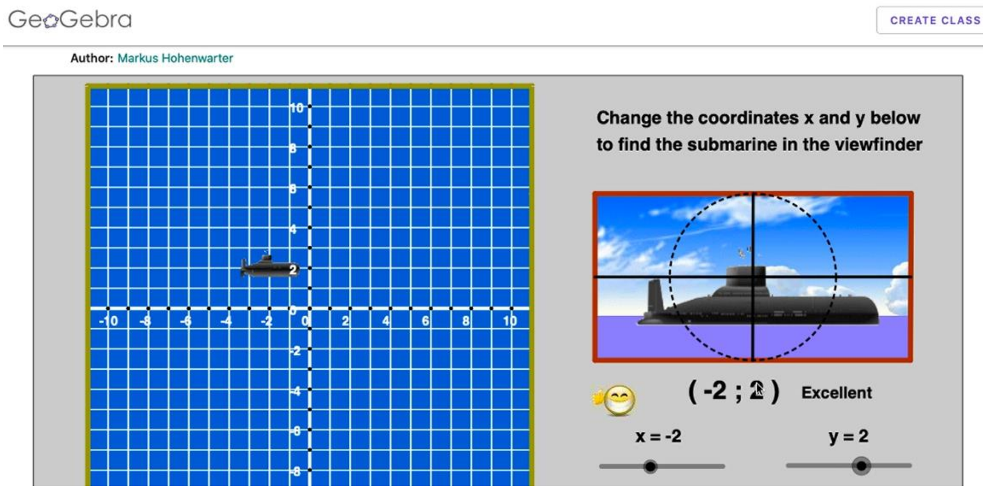
[35] https://www.geogebra.org



Obrázok č. 1: Funkcie s parametrom v Geogebre

Taktiež je možné vytvárať modely v 3D priestore, ktoré sú veľmi nápomocné pri výučbe tém na rezy kociek a iných útvarov. Možnosťou je využitie aj pri výpočte uhlov, vzájomnej polohe priamok, povrchu či objemu telies. Študenti takto môžu pomocou názornosti oveľa viac pochopiť dané súvislosti. Netreba zabudnúť ani na analytickú geometriu, pretože ku každej priamke je vygenerovaná jej všeobecná rovnica.

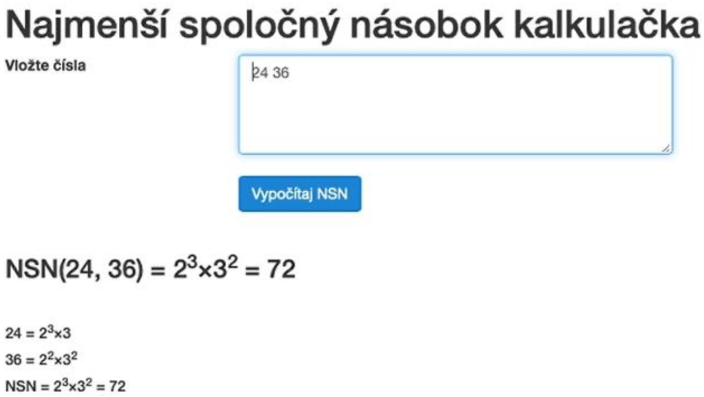
Ak niekto nemá dostatok času a kreativity, tak *Geogebra* na svojej hlavnej stránke ponúka vyhľadávací nástroj, kde sa dajú nájsť už vytvorené aplety na rôzne oblasti z matematiky. Odporúčam používať pojmy v angličtine, pretože z nich pozostáva najväčšia databáza. Zaujímavosťou je možnosť vyhľadať rôzne hry, ktoré môžu precvičovanie určite spestriť a zatraktívniť. Príkladom môže byť určovanie súradníc *x* a *y* formou lokalizovania ponorky periskopom.[36]



Obrázok č. 2: Hry v Geogebre

[36] https://www.geogebra.org/m/dyaxqKdP

Ďalšie možnosti odkiaľ môžeme čerpať inšpiráciu sú slovenského pôvodu. Prvým z nich je portál *Hackmath*.[37] Nájdeme tam veľkú ponuku zaujímavých príkladov zo všetkých tém matematiky pre ZŠ a SŠ. Výhodou je aj prístup k mnohým praktickým úlohám z bežného života, na čo sa kladie v dnešnom vzdelávacom systéme veľký dôraz. Nemenej cenné sú aj rôzne logické hlavolamy a rébusy. Veľmi zaujímavým doplnkom, ktorý obohacuje túto webovú lokalitu je lišta Kalkulačky. Pod ňou sa neskrýva klasická kalkulačka na výpočet jednoduchých a zložitejších operácií. Dokážeme pomocou jednotlivých nástrojov urobiť prvočíselný rozklad, vypočítať najmenší spoločný násobok, nájsť korene kvadratickej rovnice alebo určiť veľkosti všetkých uhlov, strán či obvod a obsah ľubovoľného trojuholníka. Tieto kalkulačky môžu byť nápomocné pre rýchlu tvorbu úloh na vyučovaciu hodinu.



Obrázok č. 3: Najmenší spoločný násobok na portáli Hackmath

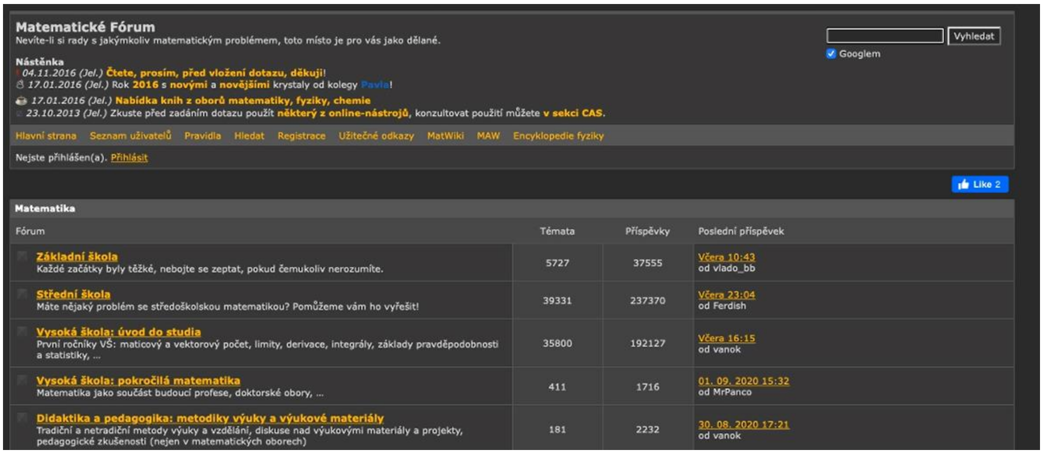
Druhý slovenský portál, ktorý tu spomeniem, nesie názov *Interaktívne cvičenia z matematiky*.[38] Príklady sú zamerané pre študentov stredných škôl. Prostredníctvom tohto webu je možné prejsť všetkými témami stredoškolskej matematiky. Môže slúžiť na upevňovanie učiva počas vyučovacích hodín, ale aj na precvičenie matematických zručností počas dištančnej výučby. Úlohy sú spracované pestrým spôsobom a žiaci vyberajú odpovede pomocou interaktívnej ponuky, čo pôsobí určite atraktívnejšie, ako len bežné riešenie príkladov.

Veľmi dobrým projektom je česká webová lokalita *Matematické Fórum.*[39] Funguje ako klasické fórum, ktoré pozostáva z rôznych diskusných príspevkov. Tie sa zameriavajú na riešenie príkladov z rôznych vzdelávacích úrovní, ktoré tam pridávajú diskutujúci. Zaujímavosťou je podávanie riešenia úloh. To sa nikdy nedáva celé, ale snaha je pomôcť naviesť pýtajúceho sa k správnej odpovedi tak, aby prišiel na to sám. Portál sa venuje aj riešením pravidelných testovacích úloh. Okrem toho je tu možnosť debaty aj o didaktike matematiky a vymieňaní si postrehov z bežnej učiteľskej praxe. Jednoducho a v skratke, ak máte nejakú otázku z matematiky, tak *Matematické fórum* vytvára dobrý priestor na nájdenie vhodnej odpovede.

[37] https://www.hackmath.net/

[38] https://www.gymmoldava.sk/ICV/CELYWEB/indexICV.php

[39] https://forum.matematika.cz/



Obrázok č. 4: Matematické Fórum – úvodná stránka

V závere by som ešte rád uviedol v rámci online výučby aj príklady niektorých video kanálov, ktoré môžu byť spoľahlivým doplnkom počas dištančnej výučby. Využiť sa dajú aj na priblíženie niektorých matematických pojmov vhodnou ukážkou, ktorá sa tomu venuje. Kanály nájdeme mnohokrát priamo na Youtube a zaoberajú sa matematickým učivom základnej a strednej školy. Tvorcovia sa snažia vysvetliť pojmy danej látky a precvičiť ich na ukážkových príkladoch. Zdrojom takýchto neustále pribúdajúcich videí je *Isibalo*[40], *B-Akademia.sk*[41], *MaTYkár*[42] *alebo Mathematicator*.[43]

V tomto príspevku bolo mojou snahou vám priblížiť aspoň zopár možnosti, ktoré ponúka online priestor na zaujímavejšie vedenie hodín matematiky a uľahčenie tvorby pedagogických príprav. V situácii dištančného vzdelávania sú takéto portály nevyhnutnosť. Verím, že vám budú aspoň trocha nápomocné. Ak by ste chceli získať viac inšpirácií, tak odporúčam sa pridať do Facebook skupiny *Učitelia matematiky, nápady, odkazy, rady*[44]. Tam si vyhľadáte tabuľku obsahujúcu všetky tieto odkazy a mnohé ďalšie. Samozrejme môžete tam pridať aj ďalšie portály, ktoré ešte tam nie sú uvedené a obohatiť výučbu slovenských matematikárov.

Mgr. Ľubomír Sahuľ
Cirkevná spojená škola
Okružná 2062/25
026 01 Dolný Kubín
lubomirsahul@gmail.com

---

[40] https://www.youtube.com/c/Isibalocom/videos

[41] https://www.youtube.com/c/Bakademia/videos

[42] https://www.youtube.com/c/MaTYk%C3%A1r/videos

[43] https://www.youtube.com/channel/UCLfEwNGlcQBpDiWbWnVa0Pg/videos

[44] https://www.facebook.com/groups/uciteliamatematiky

ZISTIME O ŽIACKYCH VEDOMOSTIACH VIAC

SLAVÍČKOVÁ MÁRIA

ABSTRAKT. *V príspevku sa venujeme organizačnej forme vyučovania podporujúcej rovesnícke vyučovanie. Aké úlohy zadávať a ako žiakov, resp. študentov zapojiť do tvorby úloh na prebranú tematiku a ako nám ich výtvory vedia prezradiť, nakoľko a či danej problematike rozumejú.*

Úvod, alebo niekoľko otázok na zamyslenie

Zamýšľali ste sa niekedy, aké úlohy riešime s našimi žiakmi, študentmi na hodinách matematiky? Z akých zdrojov ich čerpáme, s akými učebnicami (ak vôbec) pracujeme, koľko z úloh je zameraných nižšie kognitívne procesy a koľko na vyššie? V akom kontexte s nimi pracujeme, nakoľko sú pre žiakov zaujímavé, vzbudzujú záujem o riešenie a pod.

Potom je tu iná stránka veci – aké úlohy zaraďujeme do písomiek, testov, previerok? Akú spätnú väzbu nám tieto úlohy poskytnú? Vytvárame naše „písomky" na mieru, alebo ich „recyklujeme", alebo nebodaj dedíme písomky po skúsenejších kolegoch?

O matematikároch sa hovorí, že patria medzi najvystresovanejších učiteľov – každú chvíľu, z každej strany sa na nich valí testovanie žiakov. Ako našich žiakov a študentov pripravujeme na testovania? Trénujeme ich na zvládnutie konkrétnych úloh zo starších ročníkov? Alebo na hodinách pracujeme priebežne tak, aby boli naši žiaci a študenti schopní neučebnicové úlohy zvládnuť? Skutočne sa zameriavame aj na spomínané vyššie kognitívne procesy? A vieme vôbec, čo k nim patrí?

Motivácia a jej vplyv na riešenie úloh

Ako motivujeme našich žiakov a študentov k výkonom? Snažíme sa o vnútornú motiváciu, alebo sa „uspokojíme" s vonkajšou? S druhom motivácie veľmi úzko súvisí aj spôsob, akým bude náš žiak, či študent predloženú úlohu riešiť. Ako Eisenmann a kol. [1] hovoria, pri vonkajšej motivácii žiak počíta bez spätnej väzby o správnosti riešenia, alebo priamo aplikuje naučené postupy a algoritmy (aj keď to nie je práve vhodné). Naopak, pri vnútornej motivácii žiak siaha po tzv. heuristických stratégiách (napr. pokus-omyl-oprava, systematické experimentovanie, analógia a pod.)

Ďalším faktorom ovplyvňujúcim ochotu riešiť a zamýšľať sa nad stratégiou je kontext úlohy. Pokiaľ je problematika zaujímavá, žiak je nielen motivovanejší úlohu začať riešiť, ale aj riešenie dokončiť a diskutovať o ňom. Pozrime sa na nasledovné zadania:

Variant A:

Z hodnôt v tabuľke nižšie vypočítajte pre každý riadok (ozn. A, B, C) aritmetický priemer, určte modus, medián, minimum, maximum, rozptyl a údaje graficky znázornite.

	1	2	3	4	5	6	7
A	15,2	14,8	15,0	14,7	14,3	14,5	14,5
B	15,8	15,7	15,4	15,0	14,8	14,6	14,5
C	15,6	15,5	14,8	15,1	14,5	14,7	14,5

Variant B:

V tabuľke nižšie sú zaznamenané výsledné časy troch dievčat v behu na 100 m v tomto roku. Iba jedno dievča môže ísť reprezentovať na súťaž. Ktoré by ste vybrali a prečo?

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Danka	15,2	14,8	15,0	14,7	14,3	14,5	14,5
Janka	15,8	15,7	15,4	15,0	14,8	14,6	14,5
Zuzka	15,6	15,5	14,8	15,1	14,5	14,7	14,5

Len jedna z úloh mi odmeria, či žiaci niečo vedia o štatistike. Netvrdíme, že úlohy na precvičenie určitých vzťahov nie sú dôležité, no nie sú cieľom vyučovania matematiky. Preto by sme si mali dobre rozmyslieť, aké úlohy na hodinách zaraďujeme. Ak totiž stále prichádzame s novými vzorcami a nútime žiakov aby sa ich naučili, nemôžeme sa čudovať, že vzťah „učiteľ=google“ a „žiak=pasívny prijímateľ“ vedie k memorovaniu a to z dlhodobého hľadiska nefunguje. Ak pristupujeme k žiakovi ako k „prázdnej nádobe“ ktorú treba naplniť, potom nejde o vyučovanie orientované na žiaka. Aký má takéto vyučovanie prínos a pridanú hodnotu oproti čítaniu encyklopédie?

Žiak v úlohe tvorcu úloh

Môže nám prísť až čudné, že by žiaci mali tvoriť úlohy. Nečakáme ale od nich ,že vytvoria profesionálnu zvierku úloh, ani že úlohy, ktoré budú tvoriť budú dokonalé. Naopak, bude v nich veľa chýb, ale na chybách sa najviac poučíme a dozvieme. A o to nám práve ide – niečo sa naučiť.

Tvorba úloha má niekoľko pozitív týkajúcich sa aktivity žiaka na hodine:

- Rozvoj kritického myslenia
- Podpora argumentácie a dôvodenia
- Rozvoj kreativity
- Zvýšenie matematickej sebadôvery
- Rozvíjanie zmyslu pre spravodlivosť

Freire [2] tvrdí, že vyučovanie orientované na žiaka umožní žiakom si vytvoriť poznatok a podporí kritické myslenie. Ak chcem úlohu vytvoriť, musím danému konceptu najskôr rozumieť, kreatívne k nemu pristúpiť, ak nechcem mať len „bežnú úlohu“. Potom potrebujem jasne sformulovať svoje myšlienky, byť schopný argumentovať riešenie, ktoré považujem za správne, pri hodnotení ostatných úloh nemusí byť práve úloha môjho kamaráta tá najlepšia.

Žiacke úlohy majú prínos aj pre nás, učiteľov. Ide najmä o:

- Spätnú väzbu o pochopení konceptu
- Podporu spolupráce a diskusie v triede
- Spoznanie žiakov a ich záujmov
- Zvýšenie motivácie u žiakov

Predtým, ako žiakom zadáme úlohu aby „vymysleli zadanie, ktoré...“ by mali mať určitú skúsenosť s preberaným konceptom, resp. konceptom, ku ktorému chceme od nich úlohu vymyslieť. Ako sme už skôr spomínali, úlohy môžu byť zamerané na rôzne úrovne kognitívnych procesov.

Kam by sme zaradili úlohy 1 až 3?

Úloha 1: Vypočítaj $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}-\frac{1}{2}=$

Úloha 2: Urči hodnoty, ktoré majú byť na pozíciách A, B

Úloha 3: Rieš rovnicu $\frac{1}{4}(x+2)+\frac{1}{6}x=1$

A kam by sme zaradili úlohy 4 až6?[45]

Úloha 4: Janka prešla $\frac{1}{8}$ km. Jej cieľom je prejsť $\frac{3}{4}$ km. Koľko kilometrov ešte musí prejsť, aby dosiahla cieľ?

Úloha 5: Janka prešla $\frac{1}{8}$ km do školy. Koľko takýchto ciest ešte musí prejsť, aby dosiahla svoj cieľ prejsť $\frac{3}{4}$ km?

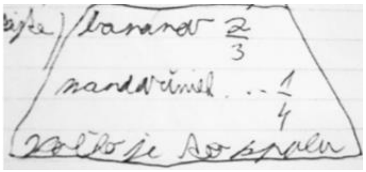
Úloha 6: Doplňte chýbajúce hodnoty (viď obr. 1), aby platili nerovnosti a približné rovnice. Použité čísla sa nesmú v jednotlivých úlohách opakovať (platí aj pre už predtlačené)

Obrázok 6: Úloha so zlomkami

Vidíme, že zadané úlohy sa líšia nielen dĺžkou zadania, ale aj úrovňou kognitívnych procesov, ktorá ja vyžadovaná. Tiež prístup k riešeniu je odlišný. Zvykli sme si na „dohodnuté príkazové slovesá“, ako ich veľmi trefne pomenoval kolega doc. Kubáček (t.j. „rieš“, „vypočítaje“ a pod. namiesto „nájdi všetky reálne čísla, pre ktoré...“) a pritom predpokladáme, že všetci vedia, čo tým myslíme. Ide o tzv. didaktický kontrakt (podľa [4]), zjednodušene povedané o nepísanú dohodu medzi učiteľom žiakom, keď učiteľ niečo očakáva od žiaka a žiak niečo očakáva od učiteľa.

Keď sme požiadali žiakov o vymyslenie úlohy, ktorá by sa mohla riešiť $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$, toto skracovanie sa krásne prejavilo. Zadania boli buď veľmi stručné (ako na obr. 2), alebo nekorešpondovali s obsahom (napr.: Vypočítajte obvod obdĺžnika s rozmermi $\frac{2}{3}cm, \frac{1}{4}cm$), ale našli sme aj „správne“ riešenia (napr. Jano išiel na bicykli $\frac{2}{3}km$, potom mal prestávku na malinovku a ešte išiel $\frac{1}{4}km$. Koľko km prešiel?)

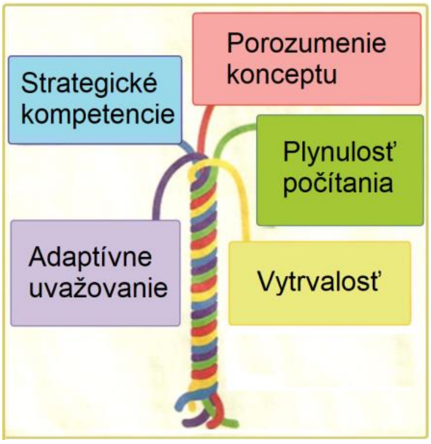
[45] Úlohy 4 až 6 sú inšpirované [3]



Obrázok 7: Žiacke zadanie k danej úlohe

Vzniknuté úlohy by nemali upadnúť do zabudnutia. Minuli by sa účinku. Preto v rámci podpory diskusie v triede a umožnenie žiakom byť partnermi učiteľa pri vyučovaní, úlohy by mali byť neskôr použité. Či už na písomke, pri opakovaní, počítaní na hodine. Alebo zadáme žiakom úlohu na tvorbu pracovného listu, pričom úlohu doň spoločne vyberieme, alebo v skupinách a pod.

Takýmito (a podobnými) aktivitami môžeme výrazne prispieť k rozvoju tzv. matematickej zručnosti (viď obr. 3). Ide o 5 navzájom prepletených zručností:



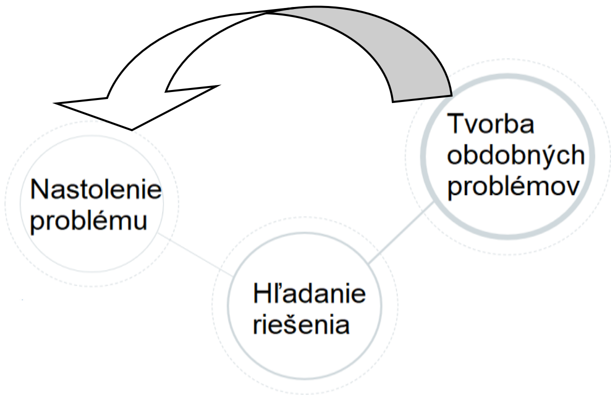
Obrázok 8: Zručnosti tvoriace matematickú zručnosť (podľa [3])

Pričom pod *porozumením konceptu* sa myslí aj porozumenie operáciám a vzťahom medzi nimi. *Plynulosťou počítania* sa nemyslí že žiak rýchlo niečo vypočíta, ale že je schopný vybrať vhodnú stratégiu počítania. Pochopenie konceptu je pre túto zložku kľúčové. *Vytrvalosťou* sa myslí vnímanie matematiky ako užitočnej a hodnotnej disciplíny, viera vo vlastnú šikovnosť a schopnosť riešiť matematické problémy. Pod *adaptívnym uvažovaním* sa myslí logické myslenie, reflexia, vysvetlenie a zdôvodnenie riešenia. A *strategické kompetencie* zahŕňajú schopnosť formulovať, riešiť a prezentovať matematické úlohy a problémy.

Pokiaľ má žiak, resp. študent tieto zručnosti dostatočne rozvinuté, možno ho považovať za matematicky zručného. Preto organizácia vyučovania „učiteľ napíše, žiak zopakuje" nevychováva matematicky zručných jedincov.

Súvisiace zmeny v organizácii vyučovania

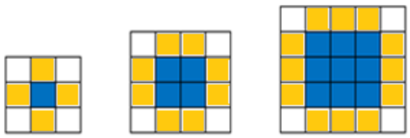
Hlavná zmena je znázornená na obr. 4. Ide o spôsob zadania úloh a stavanie na vzniknutých odpovediach, otázkach a pod. Na začiatku zadáme problém (či už učiteľ, alebo žiak), tento problém môže vyplynúť z predchádzajúceho už riešeného problému, úlohy a pod. V druhom kroku žiaci samostatne, alebo v skupinách hľadajú riešenie, učiteľ je v pozícii moderátora a pozorovateľa. Zodpovie na prípadné nejasnosti, avšak nenapovedá riešenie stanoveného problému. Zdanlivo poslednou fázou je tvorba obdobných problémov, ktorý častokrát vyplynú zo samotného riešenia, alebo po nájdení výsledku. Toto vedie k ďalšiemu nastoleniu problému a proces pokračuje.



Obrázok 9: Cyklus vzniku a riešenia problémov na hodinách matematiky

Aby takto organizované vyučovanie bolo možné, je potreba zmien v inštrukciách na hodinách z Rieš, Vypočítaj, Zapíš,... na Porovnaj, Spolupracuj, Komunikuj, Vytvor, Over, Použi,.. spomenutý cyklus ukážeme na jednom príklade z pilotnej štúdie v prime.

Nastolenie problému: Chceme si na záhrade vydláždiť priestor okolo bazénu tak, ako je znázornené na obrázkoch nižšie (pre rôzne veľkosti bazénu).



obr. 1 **obr. 2** **obr. 3**

Koľko dlaždíc budeme potrebovať na vydláždenie okolo bazéna na obrázku 3, 4, 20, 100, n?

Hľadanie riešenia: V riešeniach sme našli množstvo zaujímavých prístupov, vyberáme len niektoré z nich.

Riešenie 1: 4.4 = 16 5.4 = 20 n.4 = n

Odôvodnenie: štvorec má 4 strany (použijeme .4) ktorej počet sa za každým zvyšuje

Riešenie 2: Štvorec (bazén) má 4 strany. Na každej strane je nejaký počet kachličiek napr. 5. To znamená že každá strana krát počet kachličiek na jednej strane (4.5) + 4 kachličky, ktoré sú v rohoch

Riešenie 3: Zistil som že ku každému obrázku pribúdajú 4 kachličky. To znamená, že ich počty znázorňujú násobky čísla 4. Ale obrázok 1 má 4.2 kachličiek. Takže obrázok 3 nie je 3.4 ale 4.4. A teda vždy dám: (číslo obrázka+1).4

Tvorba obdobných problémov: Prirodzená otázka je, aký veľký by mal byť bazén, lebo veď musí mať aspoň nejakú dĺžku. Aké sú veľké kachličky? Aký najmenší bazén je pre jednu osobu? Čo ak chceme bazén iného tvaru? Obdĺžnik, alebo iný (aj nekonvexný) útvar? Našla sa aj zmena kontextu ako stavanie oplotenia záhrady, alebo jej kosenie (tu však už dochádza k zmene pôvodného problému)

Najčastejšie problémy: Kto je n? koľko to má byť? Žiaci v cca 90 % za n dosadili nejaké číslo (napr. n=5, alebo n=1200) pričom od veľkosti zvoleného čísla je možné určiť úroveň abstrakcie, ktorej je žiak už schopný.

Záver

Písané aktivity a zmeny sa nedajú urobiť zo dňa na deň. Je dôležité si uvedomiť, že ide o systematické budovanie klímy v triede, keď podporujeme zmysluplnú komunikáciu medzi žiakmi, aby žiaci boli ochotní spolupracovať a komunikovať so spolužiakmi a tak sa posilnilo rovesnícke vyučovanie. My, učitelia, si musíme dať pozor akú spätnú väzbu vysielame našim žiakom, aby sme nehodnotili príliš kriticky (ale ani za objav teplej vody nenavrhovali Nobelovu cenu), viesť ich k dodržiavaniu autorského zákona, a k zodpovednosti za úlohy a ich riešenie.

Takáto výučba je samozrejme náročnejšia ako na prípravu, tak na realizáciu, miestami (najmä zo začiatku) môže byť chaotická, hlučnejšia. Prečo sa teda trápiť? Lebo to je autentické. Ak je to autentické, potom riešenie nie je len o získaní známky a tým sa zvýšia žiacka angažovanosť, nadchnutie pre vec, prepojeniu školy a mimoškolskej aktivity (najmä pri tvorbe vlastných úloh)

A na záver voľný preklad slov od jedného z učiteľov v článku [5]: Naše deti neustále premýšľajú. Otázkou nie je, ako ich donútime rozmýšľať, ale ako postaviť naše vyučovanie na tom, o čom žiaci (študenti) už premýšľajú, t.j. čo vedia a čo chcú vedieť.

Poďakovanie

Príspevok vznikol za podpory projektu KEGA 014UK-4/2020 Podpora vzdelávania učiteľov matematiky na základných a stredných školách prostredníctvom zdieľania inovačných materiálov, foriem a metód vyučovania.

Literatúra

[1] Eisenmann, P., Přibyl, J., Novorná, J. Břehovský, J., Cihlář, J.: Volba heuristických strategií v závislosti na věku. *Scienta in educatione, 8(2)*. 2017. ISSN 1804-7106

[2] Ferie, P.: *Pedagogy of the Oppressed* (Myra B. Ramos, Prekl.). New York-London Continuum, 2005. https://envs.ucsc.edu/internships/internship-readings/freire-pedagogy-of-the-oppressed.pdf [navštívené 4.9.2020]

[3] Van de Walle, J. A. Karp, K. S., Bay-Williams, J. M.: *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally.* Pearson. 2014

[4] Brousseau, G.: Theory of didactical situation. (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Prekl.) Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.1997

[5] Behizadeh, N.: Enacting Problem-Posing Education through Project-Based Learning. *The English Journal, 104(2)*, 99-104. 2014. Retrieved August 30, 2020, from http://www.jstor.org/stable/24484422

PaedDr. Mária Slavíčková, PhD.
Katedra didaktiky matematiky, fyziky a informatiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave
Mlynská dolina,
SK – 851 06 Bratislava
e-mail: slavickova@fmph.uniba.sk

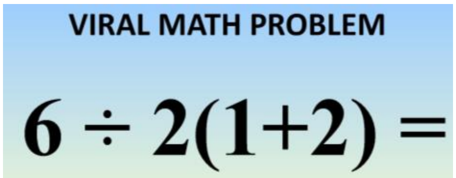
RIEŠENIE HLAVOLAMOV S MATEMATICKÝM POZADÍM

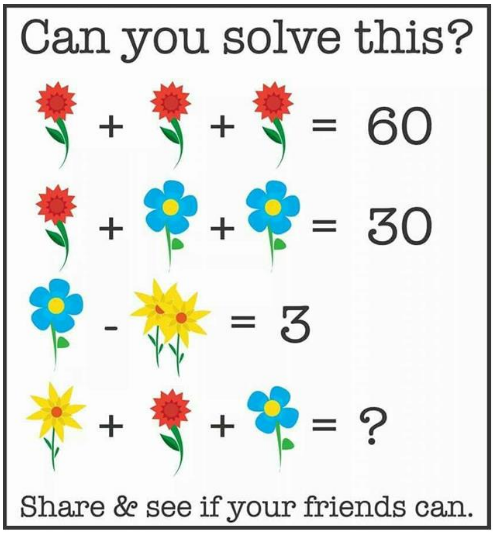
UHER MATEJ

__ABSTRAKT.__ Hlavolamy sú obľúbená voľnočasová aktivita nielen dospelých, ale aj pre deti. V škole sa dajú viaceré využiť aj na trénovanie rôznych zručností, ako matematických, tak aj nematematických. Na pár príkladoch (obdĺžniky, kakuro, sudoku, ...) sa to aj prakticky pokúsime priblížiť, ako sa dajú rozvíjať matematické zručnosti práve pomocou nich.

Namiesto úvodu

Skúste sa zamyslieť nad správnymi odpoveďami na nasledovné dva virálne problémy, ktoré som postrehol na facebooku:





Obrázok 1 a 2: problémy z internetu na zamyslenie (zdroj: youtube.com; facebook.com)

Oba problémy sú zaujímavé a veľmi vhodné na bližšiu analýzu. Avšak skúste sa nad nimi zamyslieť sami a na konci príspevku nájdete správne odpovede s malou poznámkou od autora. Takže najprv riešte sami, až potom sa pozrite na koniec.

Hlavolamy – spôsob, akým zaujať

Oba tieto hlavolamy sú dobré príklady na trénovanie základných zručností a algoritmov v matematike. Prvá vysvetľuje niečo o prednosti operáciách, druhá je pekný príklad na sústavu 3 rovníc o troch neznámych. Oba sú však zadané zaujímavým spôsobom. Prvý podnecuje k „diskusii“. Na internete, kde som daný príklad videl prvýkrát, bolo mnoho komentárov, ktoré sa striedavo prikláňali ku odpovediam 1 a 9, dokonca k odpovedi 5, alebo iným úplne zvláštnym číslam. To je krása a rozmanitosť online diskusie. Tí komentujúci, ktorí boli ochotní diskutovať, uviedli aj dôvody, prečo sú výsledky 1 a 9 správne.

Druhý zase zaujal svojim vzhľadom. Nakoľko sa „predsa jedná len o kvetinky“, tak to ľudí navnadí k riešeniu. Samozrejme si nevšimnú určité drobnosti, ktoré sú v úlohe schované, takže ľuďom budú prichádzať na rôzne výsledky. A to opäť privádza k diskusii, čo vedie ku zaujímavým poodhaleniam v ľudskom rozmýšľaní.

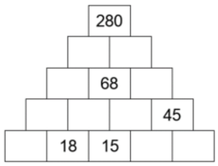
Celkovo takéto hlavolamové úlohy spĺňajú viaceré ciele matematiky, ako je to dané v štátnom vzdelávacom programe. Nielen že trénujú algoritmické zručnosti, ako sme popísali pred chvíľou, ale rozvíjajú logické uvažovanie, vytvárajú priestor na prezentovanie výsledkov a v prípade toho, že žiaci prídu na rôzne výsledky, tak ich nútia k diskusii o výsledkoch. Preto sme sa rozhodli poukázať v tomto príspevku na hlavolamy, ktoré učitelia môžu využiť vo vyučovaní a tak zatraktívniť vyučovanie tém, ktoré sa inak trénujú iba manuálnym počítaním veľkého množstva (inak nie veľmi zaujímavých) príkladov.

Zoznam vhodných úloh

V nasledujúcej časti sa pokúsime priblížiť pár vhodných hlavolamov, ktoré sa na internete dajú ľahko dohľadať. Najprv uvádzame názov úlohy, následne jej pravidlá. Potom sa pokúsime priblížiť, aké koncepty sa nimi dajú rozvíjať a nejaký krátky komentár k danej úlohe. Nakoniec uvádzame zdroj, kde sa takéto úlohy dajú nájsť, ale väčšinou platí, že stačí vyhľadať názov cez webový prehliadač a nájdete veľké množstvo vhodných úloh.

Pyramída s operáciami

Pravidlá: Vpíšte čísla do políčok tak, aby číslo v hornej časti bolo dané ako súčet/ rozdiel/ podiel/ súčin spodných dvoch políčok.

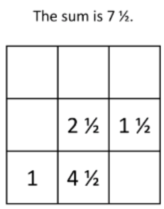


Jednoduchá úloha na precvičenie sčítania, malej násobilky, opakovanie záporných čísel, alebo aj zlomkov. Dá sa so zadaním pekne vyhrať, pretože obmedzenie na obsah jednotlivých políčok nie je dané.

Zdroj: Vlastná tvorba, alebo [edu-games]

Magický štvorec

Pravidlá: Vpíšte čísla do mriežky tak, aby súčet čísel v riadkoch, stĺpcoch (niekedy aj diagonálach) bol rovnaký a zhodný so zadaním súčtom.

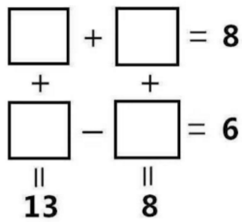


Podľa toho, koľko vyplníme políčok vieme nastaviť úroveň a náročnosť danej úlohy. Od jednoduchých úloh na sčítavanie, až po náročnejšiu prácu so zlomkami. Ľahko vieme z týchto úloh vyrobiť úlohu na riešenie rovnice s neznámou (napríklad skúste dokončiť naznačenú úlohu s tým, že súčet nepoznáte a treba ho určiť).

Zdroj: Vlastná tvorba, alebo [math salamander]

Matematický štvorec

Pravidlá: Vpíšte čísla, kde n je rozmer mriežky tak, aby platili naznačené rovnice. Najčastejšie sa jedná o čísla 1-n, ale nie je to podmienka.

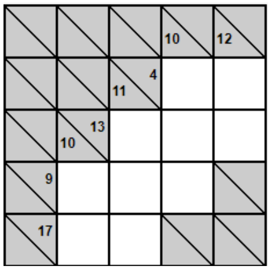


Veľmi pekná úloha, ktorou sa dá upozorniť, že záleží na priorite operácii. Trénuje sa základná práca s číslami a prikladá sa stále väčší význam aj logickému mysleniu. Taktiež môžeme nechať žiakov odhaliť jednoduchý systém tipovania a teda trénujeme základné metódy vypisovania a skúšania možností.

Pre lepšiu predstavu: Uvedený príklad sa dá vyriešiť iba vtedy, keď dovolíme používať aj zlomky. S prirodzenými číslami sa úloha dokončiť nedá.

Zdroj: Vlastná tvorba, alebo [edu-games]

Kakuro

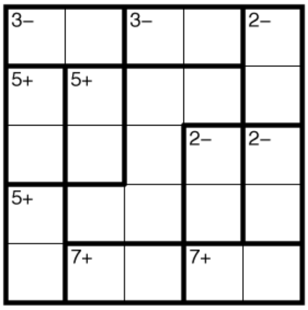


Pravidlá: Číselná krížovka. Vložte čísla 1-9 do políčok tak, aby sa v „slovách“ čísla neopakovali. Čísla na začiatku riadkoch/stĺpcoch určujú súčet čísel v danom smere.

Podľa veľkosti úlohy vieme nastaviť náročnosť, pričom treba kombinovať viaceré smery, zistiť si, ktoré súčty sú zaujímavé (napríklad súčet 4 na dve čísla musí byť 1 a 3, inak by sa čísla v danom „slove“ opakovali) a postupne logickými úvahami vypĺňať danú mriežku. Vhodné na trénovanie logického usudzovania.

Zdroj: kakuroconquest

KenKen

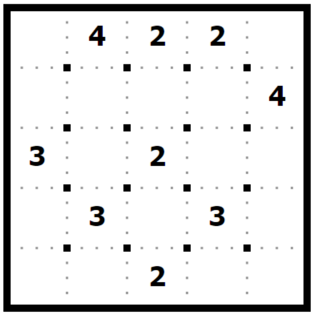


Pravidlá: Vložte do políčok čísla 1-n (kde n je rozmer mriežky), tak, aby sa čísla neopakovali v riadkoch a stĺpcoch. Tabuľka je rozdelená na menšie regióny a v nich musí platiť, že keď použijeme naznačenú operáciu medzi číslami v regióne, dostaneme naznačené číslo.

Veľmi podobná úloha ako kakuro, avšak dovoľuje aj zvyšné operácie. Ak by sme napríklad mali všade zadané znamienka násobenia, tak by sme dostali úlohu na trénovanie rozkladu čísel na delitele. Teda môže slúžiť ako trénovanie rozkladu čísel. Inak platí, podobne ako pre kakuro, že rozvíja logické myslenie a usudzovanie.

Zdroj: kenkenpuzzle

Obdĺžniky



Pravidlá: Rozdeľte mriežku na obdĺžniky tak, aby každý obsahoval práve jedno číslo, pričom toto číslo určuje, aký je jeho obsah.

Aby neboli všetky príklady zamerané iba na aritmetiku, posledný uvedieme aj jeden využiteľný v geometrii. Tu sa dá hrať s pojmami obsah štvorca a obdĺžnika, pričom sa pekne upevňuje vzťah $S = a \cdot b$. Ďalej to rozvíja už spomenuté rozkladanie na delitele (aké strany môže mať obdĺžnik s obsahom 21?) a vypisovanie všetkých možností.

Zdroj: puzzle-shikaku

Záver

Na záver sa teda vrátim k prvým dvom príkladom.

V prvom je správny výsledok 9. Vychádza to z toho, že my máme prednosti operácii nastavené nasledovne: prvé zátvroky, potom krát a deleno a nakoniec plus a mínus. Pričom krát/deleno nemajú nad sebou žiadnu prioritu (to isté platí aj pre plus / mínus), takže sa čítajú zľava doprava. Teda vyčíslenie by prebehlo nasledovne:

$$6 \div 2 \cdot (1 + 2) = 6 \div 2 \cdot 3 = 3 \cdot 3 = 9$$

Avšak je zaujímavé, že vraj tomu tak vždy nebolo a dávnejšie boli tie pravidlá iné. Tie v určitých prípadoch dávali prednosť krát pred deleno a teda vtedy je výsledok naozaj 1.

A aj to svojím spôsobom dáva zmysel, nakoľko sa tento príklad dá (v určitom kontexte) čítať ako $\frac{6}{2\cdot(1+2)}$ a teda je výsledok 1.

V druhom príklade by „správna“ odpoveď mala byť 25. Trik je v tom, že červená kvetina má hodnotu 20, modrá kvetina s 5 lupienkami má hodnotu 5 a dve žlté kvetiny majú hodnotu 2. Teda posledná rovnica je 1 (lebo je tam iba 1 žltá kvetinka a nie 2) + 20 + 4 (lebo má iba 5 lupienkov a nie 4 lupienky), čo je dokopy 25.

Avšak tu vzniká priestor na diskusiu: kto si všimol všetky tieto chytáky? A naozaj vieme povedať, že ak 5-lupienková modrá má hodnotu 5, tak 4-lupienková modrá má hodnotu 4? To by znamenalo, že stonka nemá hodnotu. Je to tak správne? Ako by ste pozmenili zadanie, aby tam takéto problémy nevznikali? Okamžite tak pobádame žiakov k analýze daného problému, o čo sa snažíme, ako matematici stále.

Literatúra a online zdroje

[1] Edu games: Math Pyramid Game Worksheet. [online] dostupné na internete [10/2020] https://www.edu-games.org/math/games/math-pyramid-game.php

[2] Edu games: Math square worksheet maker. [online] dostupné na internete [10/2020] https://www.edu-games.org/math/games/math-squares-worksheet.php

[3] Kakuroconquest: Free online kakuro puzzles. [online] dostupné na internete [10/2020] https://www.kakuroconquest.com/4x4/easy

[4] Kenkenpuzzle: Play. [online] dostupné na internete [10/2020] http://www.kenkenpuzzle.com/play_now

[5] Math salamanders: Magic Square Worksheets. [online] dostupné na internete [10/2020] https://www.math-salamanders.com/magic-square-worksheets.html

[6] Puzzle shikaku: Shikaku. [online] dostupné na internete [10/2020] https://www.puzzle-shikaku.com/

Mgr. Matej Uher
Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
uher.matej@gmail.com

OBŤAŽNOSŤ MATEMATICKÝCH ÚLOH Z POHĽADU KONTEXTU

VALENTOVÁ LENKA

ABSTRAKT. *Príspevok je zameraný na komparáciu obťažnosti úloh s matematickým a reálnym kontextom v primánom vzdelávaní. Súčasťou je aj analýza riešenia vybranej úlohy žiakmi 5. a 7. ročníka ZŠ.*

Úvod

Národný ústav certifikovaných meraní vzdelávania (NÚCEM) dlhodobo organizuje celonárodné testovanie žiakov piateho (T5) a deviateho (T9) ročníka z matematiky. Cieľom testovaní je objektívne zistenie úrovne matematickej gramotnosti žiakov a komparácia výkonov jednotlivých žiakov pri vstupe a výstupe z 2. stupňa základnej školy. Testy sú zamerané na overovanie trvácnosti, hĺbky a rozsahu vedomostí a schopnosť žiakov osvojené vedomosti a poznatky zmysluplne využívať (NÚCEM a, b). Pre účely príspevku sa budeme venovať výhradne výsledkom z testovania T5.

Piatacké testy obsahujú 20 otvorených a 10 uzatvorených úloh z matematiky, ktoré sú rozdelené podľa tematických okruhov [46], a podľa kontextu, ktorý môže byť buď matematický alebo reálny (úlohy z praktického života) [47]. V rámci článku sa zameriame na analýzu úloh z testovania piatakov z hľadiska kontextu. Naším zámerom je zistiť, ktorý kontext je pre žiakov primárneho vzdelávania náročnejší na riešenie a zaujímavejší z pohľadu žiaka.

Matematické úlohy z pohľadu kontextu

Matematické úlohy sú situácie, ktorých riešenie si vyžaduje určité matematické znalosti. V školskom prostredí sú pre riešenia matematických úloh zväčša vopred zadané určité algoritmy, ktoré by mali žiaci poznať (Zhouf, 2010). K riešeniu matematických úloh žiaci využívajú rôzne stratégie riešení [48].

Matematické úlohy sa delia na základe viacerých faktorov [49]. V príspevku sa zameriame na delenie matematických úloh podľa kontextu. Na objektívne porovnanie úspešnosti piatakov v matematických úlohách, sme analyzovali výsledky v testovaní T5 v rokoch 2016-2019.

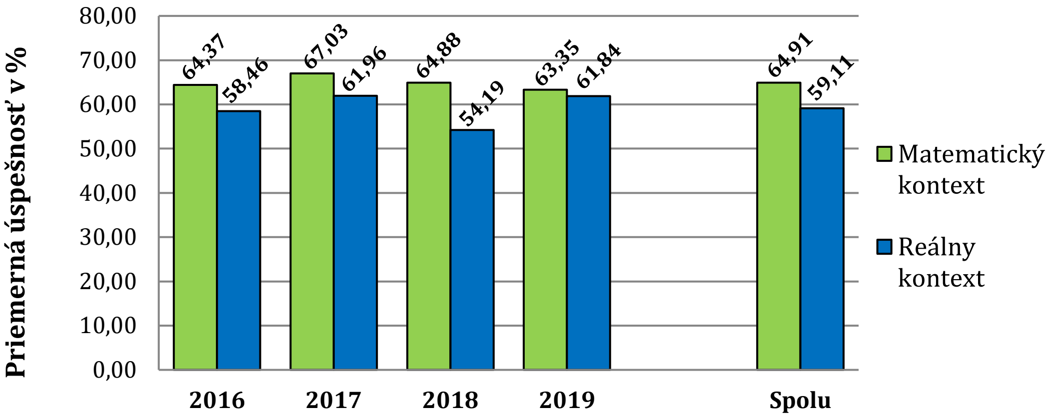
---

[46] Tematické okruhy rozdeľujeme v zhode s M. Balgová (2020, s. 9): 1. Čísla, premenná a počtové výkony s číslami; 2. Postupnosti, vzťahy, funkcie a diagramy; 3. Geometria a meranie; 4. Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika; 5. Logika, dôvodenie, dôkazy.

[47] Rozdelenie kontextu úloh na matematický a reálny je v súlade s delením podľa Národného ústavu certifikovaných meraní vzdelávania (NÚCEM) pri testovaní piatakov T5 a deviatakov T9 (Balgová, 2020).

[48] Stratégiám riešenia sa venujú viacerí autori, ako G. Pólya (1973), J. Kopka (2010), či L. Csachová a L. Valentová (2020).

[49] V literatúre sa stretávame s rôznym delením matematických úloh. Porov. J. Zhouf (2010), J. Polák (2016), NÚCEM (2020) a pod.



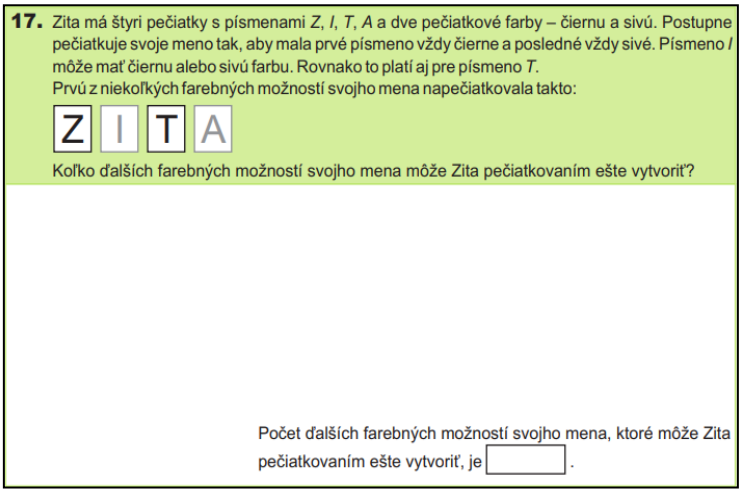
Tabuľka 1: úspešnosť žiakov v T5 podľa kontextu v rokoch 2016-2019 (vlastné spracovanie na základe výsledkov z NÚCEM-u)

Z grafu 1 je zrejmé, že v každom zo sledovaných rokov je úspešnosť žiakov v úlohách s reálnym kontextom nižšia, ako v prípade úloh s matematickým kontextom.

V rámci nášho výskumu zameraného na analýzu kritických miest v školskej matematike sme sa zamerali na identifikáciu príčin zvýšenej obťažnosti úloh s reálnym kontextom. V príspevku prezentujeme analýzu riešenia vybranej úlohy žiakmi 5. a 7. ročníka ZŠ.

Analýza vybranej úlohy žiakmi 5. a 7. ročníka ZŠ

Pre komparáciu kontextov sme vybrali z testovania piatakov T5 úlohu, ktorá v nami sledovanom období (2016-2019) robila žiakom 5. ročníka najväčšie problémy, jej úspešnosť bola 19,4%. Úloha je z roku 2018, je z tematického okruhu 4: *Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika* a autori testu ju zaradili medzi úlohy s reálnym kontextom (Obrázok 1).


17. Zita má štyri pečiatky s písmenami *Z*, *I*, *T*, *A* a dve pečiatkové farby – čiernu a sivú. Postupne pečiatkuje svoje meno tak, aby mala prvé písmeno vždy čierne a posledné vždy sivé. Písmeno *I* môže mať čiernu alebo sivú farbu. Rovnako to platí aj pre písmeno *T*.
Prvú z niekoľkých farebných možností svojho mena napečiatkovala takto:

Z I T A

Koľko ďalších farebných možností svojho mena môže Zita pečiatkovaním ešte vytvoriť?

Počet ďalších farebných možností svojho mena, ktoré môže Zita pečiatkovaním ešte vytvoriť, je ☐.

Obrázok 1: úloha s reálnym kontextom NÚCEM T5 č. 17/2018 (obťažnosť 19,4%)

Podľa zadania prvej úlohy sme sa rozhodli vytvoriť úlohu s matematickým kontextom (Obrázok 2) tak, aby podstata pôvodnej úlohy ostala nezmenená.

> Máme číslice 1, 2, 6 a 7, z ktorých sme vytvorili číslo 2716. Koľko ďalších 4-ciferných čísel môžeme z daných číslic vytvoriť, ak na mieste tisícok ostane 2, vytvorené číslo musí byť párne a nepárne číslice sa môžu v čísle opakovať?
>
> Počet ďalších 4-ciferných čísel, ktoré môžeme z daných číslic vytvoriť, je ☐ .

Obrázok 2: úloha s matematickým kontextom (vlastné spracovanie)

Obe úlohy sme dali riešiť žiakovi 5. ročníka, žiačke 5. ročníka a žiačke 7. ročníka ZŠ [50] a následným rozhovorom sme zisťovali, ktorú úlohu považujú za jednoduchšiu, zaujímavejšiu, a čo považujú za najväčší problém pri ich riešení.

Pri otázke týkajúcej sa prvého dojmu zo zadaných úloh považovali všetci žiaci za zaujímavejšiu úlohu s reálnym kontextom, avšak pri otázke, ktorá úloha je jednoduchšia a pochopiteľnejšia, považovala siedmačka za menej náročnú úlohu s reálnym kontextom, zatiaľ čo piatak a piatačka sa prikláňali k úlohe s matematickým kontextom.

Po vyriešení oboch úloh sme rozhovorom zisťovali pocity a dojmy žiakov. Všetci traja žiaci sa zhodli, že ich bavilo riešiť obe úlohy, a to aj napriek tomu, že piatak mal s riešením (aj podľa vlastných slov) problémy. Pri úlohe s matematickým kontextom uviedol, že aj napriek porozumeniu zadania nevedel, ako má danú úlohu vyriešiť. Siedmačka uviedla, že najväčším problémom pri riešení bolo zadanie v úlohe s matematickým kontextom, pretože tam bolo veľa podmienok, ktoré bolo potrebné dodržať.

Pri určení, ktorá z úloh bola jednoduchšia, označil piatak a siedmačka úlohu s matematickým kontextom. Čo sa týka zaujímavosti, piatačka považovala obe úlohy za rovnocenné, piatak, na rozdiel od svojho pôvodného pocitu, označil za zaujímavejšiu úlohu s matematickým kontextom a siedmačka naopak úlohu s reálnym kontextom.

Vyjadrenia žiakov nám ukazujú, že žiaci vyšších ročníkov považujú za zrozumiteľnejšie úlohy s reálnym kontextom. Podľa nášho názoru to môže byť pravdepodobne spôsobené častejším zaradením úloh s reálnym kontextom do hodín matematiky vo vyšších ročníkoch.

Záver

Na základe analýzy uvedených žiackych riešení nie je možné korektne odpovedať na otázku, kde je príčina problémov žiakov s úlohami s reálnym kontextom. Ich odpovede však naznačujú, že ak má byť matematika pre žiakov zaujímavá, je potrebné, aby bola čo najviac prepojená s reálnym životom, a to je možné aj cez riešenie úloh s reálnym kontextom.

[50] Jedná sa o žiakov, ktorí sa vyznačujú kladným vzťahom k matematike a dosahujú v nej priemerné až nadpriemerné výsledky.

Z toho dôvodu považujeme za dôležité, aby učitelia matematiky čo najviac ukazovali žiakom, že matematika nie je len abstraktná veda, ktorá v bežnom živote nemá uplatnenie. Preto odporúčame zobrazovať matematiku v situáciách jej bežného používania, a tým zdôrazniť jej nevyhnutnosť a využiteľnosť v reálnom kontexte.

Poďakovanie

Výskum bol realizovaný s podporou VEGA 1/0079/19 *Analýza kritických miest v školskej matematike a identifikácia faktorov ovplyvňujúcich postoj žiakov k matematike* a s podporou NÚCEM.

Literatúra

[1] Balgová, M.: *Testovanie 5 2019 : priebeh, výsledky a analýzy*, Bratislava, NÚCEM, 2020. Dostupné online: https://www.nucem.sk/dl/4361/Spr%C3%A1va%20T5%202018%205.4.2018%20-%20final.pdf

[2] Kopka, J.: *Ako riešiť matematické problémy*, Ružomberok, Verbum, 2010, ISBN 978-80-8084-563-6.

[3] NÚCEM a: *O testovaní 5*, Dostupné na: https://www.nucem.sk/sk/merania/narodne-merania/testovanie-5/o-testovani-5

[4] NÚCEM b: *O testovaní 9*, Dostupné na: https://www.nucem.sk/sk/merania/narodne-merania/testovanie-9/o-testovani-9

[5] NÚCEM: *Test z matematiky : Celoslovenské testovanie žiakov 5. Ročníka ZŠ – T-2018*, Bratislava, NÚCEM, 2018. Dostupné na: https://www.nucem.sk/dl/4016/T5-2018%2F%2FTest%20z%20matematiky%20v%20slovenskom%20jazyku.pdf

[6] Polák, J.: *Didaktika matematiky : Jak učit matematiku zajímavě a užitečně. II. Část : Obecná didaktika matematiky*, Plzeň, Fraus, 2016, ISBN 978-80-7489-326-1.

[7] Pólya, G.: *How to solve it : A New Aspect of Mathematical Method*, New York, Doubleday Anchor Books, 1957.

[8] Valentová, L., Csachová, L.: *Stratégie riešenia „školských" úloh*, in Obzory matematiky, fyziky a informatiky, volume 49, number 3, pages 1-9, ISSN 1335-4981, 2020.

[9] Zhouf, J.: *Tvorba matematických problémů pro talentované žáky*, Praha, Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2010, ISBN 978-80-7290-432-7.

Mgr. Lenka Valentová
Katedra predškolskej a elementárnej pedagogiky, Pedagogická fakulta
Katolícka univerzita v Ružomberku
Hrabovská cesta 1
SK – 034 01 Ružomberok
e-mail: lienka.valentova@gmail.com

AKTIVIZUJÚCE METÓDY VYUČOVANIA MATEMATIKY (KONTINUÁLNE VZDELÁVANIE)

VANKÚŠ PETER

ABSTRAKT. *V rámci nášho príspevku budeme hovoriť o inovačnom kontinuálnom vzdelávaní, ktoré na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave realizujeme pre učiteľov matematiky ZŠ a SŠ. Povieme si niečo o obsahu vzdelávania a tiež predstavíme niektoré zaujímavé materiály, ktoré boli pre vzdelávanie vytvorené.*

Úvod

V rámci nášho článku predstavíme inovačné kontinuálne vzdelávanie s názvom Aktivizujúce motivačné metódy, formy a prostriedky na rozvíjanie pozitívneho vzťahu žiakov k matematike na ZŠ a SŠ. Uvedené vzdelávanie realizujeme na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave od r. 2019. Vzdelávanie je akreditované Ministerstvom školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod akreditačným číslom 41/2019 – KV. V našom článku si predstavíme uvedené vzdelávanie, jeho ciele a tiež obsah. Veríme, že článok bude prínosný pre učiteľov z praxe poukázaním na aktivizujúce metódy vyučovania matematiky a možné zdroje námetov z tejto oblasti.

Špecifikácia vzdelávania

V tejto časti článku si predstavíme naše vzdelávanie, jeho ciele a prehľad tematických celkov, ktorým sa v rámci vzdelávania venujeme.

Posilnenie a skvalitnenie prírodovedného vzdelávania žiakov v sebe zahŕňa aj skvalitnenie vyučovania matematiky na základných a stredných školách, keďže matematické vzdelanie je neoddeliteľnou súčasťou edukácie a je potrebné pre plnohodnotný život a uplatnenie v spoločnosti, ako to potvrdzuje aj uznesenie vlády SR č. 302/2018, ktoré ukladá úlohy aj v oblasti podpory matematickej gramotnosti.

Na základe tejto potreby sme sa rozhodli pripraviť naše vzdelávania, ktorého program je vypracovaný aj na základe skúseností a pozitívneho ohlasu z realizácie podobne obsahovo zameraného kontinuálneho vzdelávania Netradičné metódy vyučovania matematiky so zameraním na motiváciu, tvorivosť a rozšírenie kľúčových kompetencií učiteľov matematiky na ZŠ a SŠ, ktoré realizovala FMFI UK Bratislava v rokoch 2013-2018.

Hlavným cieľom vzdelávania je inovácia a zdokonalenie profesijných kompetencií učiteľov zameraných na využívanie aktivizujúcich motivačných metód, foriem a prostriedkov vo vyučovaní matematiky na ZŠ a SŠ. Tento cieľ chceme realizovať zameraním sa na zdokonalenie zručností absolventov vzdelávania, na základe ktorých bude vedieť:

1) Zvoliť vhodnú aktivizujúcu motivačnú metódu, zdôrazňujúcu inkluzívny prístup vo vyučovaní matematiky na rozvíjanie pozitívneho vzťahu žiakov k matematike vzhľadom na význam a dôležitosť matematiky pre budúci život v modernej spoločnosti.

2) Získať potrebné poznatky v oblasti rozvoja kognitívnych kompetencií, kritického myslenia, riešenia problémových situácií a rozvoja tvorivého myslenia a tvorivých schopností žiakov.

3) Využívať moderné digitálne technológie, nové aktivizujúce metódy, formy a prostriedky v rámci vyučovania matematiky na ZŠ a SŠ.

4) Chápať motivačný, ilustratívny a metodický význam histórie matematiky a dokáže využiť tieto poznatky aj pri vytváraní podnetného prostredia vo vyučovaní matematiky na ZŠ a SŠ.

Obsah vzdelávania na základe jeho cieľov potom pozostáva z nasledujúcich okruhov, pričom pri každom z nich uvádzame čiastkové ciele, ktoré danou témou realizujeme:

1) Úvod vzdelávania. Motivácia žiakov pre štúdium matematiky prostredníctvom aktivizujúcich metód jej vyučovania na ZŠ a SŠ

Čiastkový cieľ: Oboznámenie s obsahom vzdelávania, aktivizujúcimi metódami, formami a prostriedkami vyučovania matematiky, podporujúcimi pozitívny vzťah žiakov k matematike vzhľadom na jej význam a dôležitosť pre spoločnosť.

2) Edukačné metódy vhodné na rozvoj pozitívneho vzťahu žiakov k matematike. Inovačné témy súčasnej pedagogiky, alternatívne a inovačné školy.

Čiastkový cieľ: Rozvíjanie tvorivého myslenia vo vyučovaní matematiky. Významné matematické úlohy, rozvíjanie priestorovej predstavivosti. Oboznámenie s niektorými alternatívnymi školami, zaujímavosťami v matematike so zámerom rozvíjania pozitívneho vzťahu k nej.

3) Úloha a využitie digitálnych technológií v rozvíjaní pozitívneho vzťahu žiakov k matematike

Čiastkový cieľ: Vyučovanie matematiky v digitálnom prostredí a aktivizujúce metódy ako napr. didaktické hry, využitie šachu vo vyučovaní matematiky a iné.

4) Vytváranie podnetného prostredia. Ukončenie vzdelávania a zhrnutie poznatkov získaných v rámci vzdelávania.

Čiastkový cieľ: Vytváranie podnetného prostredia v rámci vyučovania matematiky.

Pre konkrétnejšiu predstavu o obsahu vzdelávania uvádzame v tabuľke 1 stručný obsah vzdelávania.

Tematický celok	Jednotlivé podtémy
1. Motivácia žiakov pre štúdium matematiky prostredníctvom aktivizujúcich metód jej vyučovania.	Aktivizujúce, motivačné metódy, formy a prostriedky vyučovania matematiky. Motivačné metódy vyučovania matematiky. Význam a dôležitosť matematiky pre spoločnosť. Individualizácia ako prostriedok humanizácie vyučovania matematiky. Významné matematické úlohy. Geometrická predstavivosť. Riešenie divergentných úloh z geometrie.
2. Edukačné metódy vhodné na rozvoj pozitívneho vzťahu žiakov k matematike.	Humanizácia vyučovania matematiky.

Inovačné témy súčasnej pedagogiky, alternatívne a inovačné školy.	Rekordy a kuriozity v matematike. Význam histórie matematiky v matematickom vzdelávaní. Slávni matematici – ich matematika. Alternatívne a inovačné školy. Inovačné témy súčasnej pedagogiky: inklúzia. Projektové vyučovanie matematiky.
3. Úloha a využitie digitálnych technológií a ďalších aktivizujúcich metód v rozvíjaní pozitívneho vzťahu žiakov k matematike	Úloha a využitie motivačných počítačových programov vo vyučovaní matematiky za účelom podpory pozitívneho vzťahu žiakov k matematike napr. v téme geometria. Možnosti skvalitnenia matematickej edukácie prostredníctvom digitálnych technológií. Didaktické hry v matematike. Príklady používania rozmanitých hier vo vyučovaní, napr. šach a matematika.
4. Vytváranie podnetného prostredia.	Podnetné prostredie na vyučovanie matematiky. Individualizácia a humanizácia vyučovania matematiky.

Tabuľka 1: Tematické oblasti kontinuálneho vzdelávania

Po oboznámení sa s cieľmi a obsahom nášho vzdelávania v ďalšej časti článku priblížime zdroje niektorých námetov používaných v rámci vzdelávania.

Námety vzdelávania

V tejto časti článku si predstavíme námety súvisiace s niektorými témami nášho vzdelávania. K téme používania histórie vo vyučovaní matematiky sa nám ako výborný zdroj námetov a úloh osvedčila publikácia autora P. Bero Matematici, ja a ty [1]. Táto kniha ponúka prehľad zaujímavých historických postáv z vývoja matematiky. Úvahy týchto matematikou sú ilustrované na veľmi pútavých a rozmanitých úlohách.

V rámci rozvoja geometrickej predstavivosti využívame publikáciu autorov J. Brincková, V. Uherčíková a P. Vankúš Netradičné metódy rozvíjania predstavivosti v matematike [2]. Táto publikácia obsahuje mnohé námety na aktivity s hlavolamom Tangram, ktorý je cenným pomocníkov pri rozvoji geometrickej predstavivosti. Okrem toho publikácia uvádza sadu didaktických hier, ktoré sú tiež zamerané na školské témy týkajúce sa geometrie.

Na tematiku didaktických hier je zameraná kniha autora P. Vankúš Didaktické hry v matematike [3], ktorá sa monotematicky venuje metóde didaktických hier vo vyučovaní matematiky. Táto publikácia obsahuje teoretické základe používania hier vo vyučovaní, prehľad histórie takého vyučovania, niektoré praktické odporúčania týkajúce sa úspešnej integrácie didaktických hier do vyučovania matematiky. Publikácia ponúka tiež zbierku hier určených pre veľký počet tém matematiky 2. stupňa ZŠ, ktoré sú priamo vhodné na využívanie v rámci bežných hodín matematiky.

Ako zdroj veľmi pútavých príkladov použitia šachu vo vyučovaní matematiky nám slúži práca autorky V. Haraštovej Didaktické hry na šachovnici [4]. Uvedená publikácia obsahuje úlohy, ktoré sú primárne určené pre žiakov základnej školy. Úlohy využívajú šach ako bohatý zdroj námetov na rozvoj matematického myslenia.

Záver

V rámci článku sme predstavili inovačné kontinuálne vzdelávanie s názvom Aktivizujúce motivačné metódy, formy a prostriedky na rozvíjanie pozitívneho vzťahu žiakov k matematike na ZŠ a SŠ, ktoré realizujeme na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave. Predstavili sme ciele a obsah vzdelávania. Praktickou časťou článku je poukázanie na zdroje námetov, ktoré sú používané v rámci vzdelávania resp. niektoré boli vytvorené priamo autormi vzdelávania pre jeho účely [2, 3]. Veríme, že tieto zdroje prospejú ako podklady pre aktivity vedúce k zvýšeniu motivácie žiakov k štúdiu matematiky.

Grantová podpora

Príspevok vznikol v rámci grantu KEGA 014UK-4/2020 Podpora vzdelávania učiteľov matematiky na základných a stredných školách prostredníctvom zdieľania inovačných materiálov, foriem a metód vyučovania.

Literatúra

[1] Bero, P.: *Matematici, ja a ty,* Bratislava, Mladé letá, 1989, ISBN 80-06-00118-9

[2] Brincková, J., Uherčíková, V., Vankúš, P.: *Netradičné metódy rozvíjania predstavivosti v matematike,* Bratislava, KEC FMFI UK Bratislava, 2013, ISBN 978-80-8147-019-6

[3] Vankúš, P.: *Didaktické hry v matematike*, Bratislava, KEC FMFI UK Bratislava, 2012, ISBN 978-80-8147-002-8

[4] Haraštová, V.: *Didaktické hry na šachovnici*, diplomová práca, Trnava, Trnavská univerzita v Trnave, 2015

PaedDr. Peter Vankúš, PhD.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: peter.vankus@fmph.uniba.sk

RÔZNE INTERPRETÁCIE POJMU ZLOMOK A ICH VPLYV NA VEDOMOSTI ŽIAKOV

VARGOVÁ LUCIA, PAVLOVIČOVÁ GABRIELA

ABSTRAKT. V príspevku sa zameriame na stručné popísanie jednotlivých interpretácií pojmu zlomok podľa Kierena. Následne poukážeme na niektoré problémy a miskoncepcie, ktoré sa ukázali u žiakov vzhľadom na vybrané interpretácie pojmu zlomok a tiež na dôležitosť využívania rôznych modelov vo vyučovaní matematiky.

Úvod

Téma zlomkov a racionálnych čísel patrí k jednému z najväčších problémov, s ktorými sa žiaci stretávajú na druhom stupni základnej školy na Slovensku, ale aj v zahraničí. Napriek tomu, že v oblasti pedagogického výskumu sa problematike zlomkov už desaťročia venuje veľká pozornosť, príčina ich nízkeho porozumenia žiakmi zostáva otázna. V jednej z teórií sa uvádza, že príčina nízkeho porozumenia zlomkom môže spočívať v rôznych interpretáciách pojmu zlomok.

Rôzne interpretácie pojmu zlomok

V polovici sedemdesiatych rokov Kieren [1] navrhol štyri rôzne možnosti interpretácie vnímania zlomku, medzi ktorými existuje určitý vzťah. Zlomok môžeme vnímať ako mieru, podiel, pomer a operátor. V každej z týchto možností sa objavuje význam zlomku aj ako časti celku. Preto časť celku môžeme považovať za piatu interpretáciu vnímania zlomku [2]. Tieto interpretácie zlomku sú matematicky a psychologicky nezávislé aj napriek tomu, že zobrazujú päť oddelených vzorcov myslenia týkajúcich sa zlomkov alebo racionálnych čísel [3].

Kieren tvrdí, že úplné porozumenie racionálnym číslam nezáleží iba od porozumenia jednotlivým oddeleným interpretáciám zlomkov, ale žiaci musia porozumieť aj tomu, ako sú tieto interpretácie vzájomne prepojené [4].

Zlomok ako časť celku

V interpretácii vnímania zlomku ako časti celku je zlomok definovaný ako stav, keď je súvislá množina alebo množina diskrétnych objektov rozdelená na rovnaké časti [2]. To znamená, že zlomok reprezentuje porovnanie počtu častí rozdeleného celku k celkovému počtu častí, na ktoré bol tento celok rozdelený. Ak žiaci úplne porozumeli interpretácii zlomku ako časti celku, mali by byť schopní rozdeliť súvislú množinu ale aj množinu diskrétnych objektov na rovnaké časti a rozlíšiť, či je celok rozdelený na rovnaké časti. Platí to aj v opačnom prípade, kedy si žiaci musia vedieť predstaviť celok, keď je daný zlomok (t.j. časť celku).

Zlomok ako miera

Keď hovoríme o zlomku ako miere, dôraz kladieme na úspešné rozdeľovanie nejakej jednotkovej úsečky. Možno teda konštatovať, že žiaci úplne porozumeli zlomku ako miere, ak sú úspešní v postupnom rozdeľovaní jednotkovej úsečky na menšie a menšie časti, sú schopní nájsť zlomok medzi dvomi danými zlomkami a sú schopní porovnať ľubovoľné dva zlomky [2].

Zlomok ako pomer

Pri interpretácii zlomku ako pomeru ide o vyjadrenie porovnania dvoch veličín, a preto je táto interpretácia považovaná skôr za porovnávací index ako za číslo [5] in [2].

Aby žiaci úplne porozumeli významu zlomku ako pomeru, potrebujú si skonštruovať myšlienku relatívneho množstva; uvedomiť si, že v pomere sa dve veličiny menia spoločne a vzťah medzi nimi zostáva nemenný; a tiež uvedomiť si, že ak dve veličiny v pomere vydelíme rovnakým nenulovým číslom, hodnota pomeru zostáva nezmenená [2].

Zlomok ako podiel

Racionálne čísla môžu byť tiež interpretované ako podiel, ktorý je výsledkom delenia. Na rozdiel od interpretácie zlomku ako časti celku, v interpretácii zlomku ako podielu uvažujeme o dvoch rôznych veličinách (napr. rozdeliť 3 pizze medzi 4 ľudí).

Nakoľko sa výsledok vzťahuje na numerickú hodnotu a nie na časti vzniknuté spravodlivým rozdeľovaním, v tomto vnímaní zlomku neexistuje obmedzenie týkajúce sa veľkosti zlomku. To znamená, že časť, ktorá vznikla spravodlivým rozdelením, musí byť väčšia, menšia alebo rovná ako jednotkové diely, na ktoré bol celok rozdelený [2].

Zlomok ako operátor

Operátor je podľa [6] súbor inštrukcií na uskutočnenie nejakého procesu. Napríklad „$\frac{2}{3}$ z niečoho“ je operátor, ktorý inštruuje, že musíme násobiť číslom 2 a výsledok vydeliť číslom 3. Pri úplnom pochopení zlomku ako operátora, by žiaci mali byť schopní násobiť zlomkom rôznymi spôsobmi v závislosti od konkrétneho zadania. Tiež sú schopní identifikovať operátor a určiť vplyv operátora na množinu diskrétnych objektov, ale aj na dĺžku úsečky a na zväčšovanie a zmenšovanie rovinného geometrického útvaru a jediným zlomkom pomenovať zložené operácie, ktoré vznikli použitím dvoch multiplikatívnych operácií (násobenia a delenia) [6].

Metodológia

Výskum sme realizovali v máji – júli 2017. Ako výskumný nástroj sme použili špeciálne vyvinutý test zameraný na zlomky. Autormi testu sú cyperskí výskumníci M. Pantziara a G. Philippou [7]. Test pozostáva z 21 úloh, ktoré sú usporiadané v siedmych skupinách označených číslami 1,2,3,4,5,6,7, ktoré postupne predstavujú rôzne interpretácie pojmu zlomok a v troch stĺpcoch označených písmenami A, B, C, ktoré predstavujú jednotlivé štádiá Sfardovej teórie reifikácie. Výskumnú vzorku tvorilo 930 žiakov deviateho ročníka základných škôl. Do výskumu sa zapojilo 35 základných škôl z 39 oslovených. Išlo o školy prevažne z Nitry, Nových Zámkov a z Lučenca.

Zistenia a interpretácia výsledkov

Pri analýze riešení úloh zameraných na zlomok ako časť celku sme zistili, že žiaci si neuvedomujú nutnosť rozdelenia celku na rovnaké časti pri práci so spojitými i diskrétnymi modelmi. Žiaci tiež nesprávne identifikovali celok alebo považovali časť celku za celok. Ďalším nedostatkom bolo slabé porozumenie významu čísel v zápise zlomku a ich vnímanie ako izolovaných prirodzených čísel bez vzájomného vzťahu. Žiaci si tiež neuvedomovali, že číslo v menovateli vyjadruje počet častí, na ktoré je celok rozdelený, a čitateľ vyjadruje počet týchto častí, čo sa ďalej prejavuje v problémoch pri ekvivalencii a porovnávaní zlomkov, no najmä pri sčítaní zlomkov. V niektorých riešeniach sa tiež objavilo vyjadrovanie časti celku na princípe interpretácie zlomku ako pomeru, čo svedčí o úplnom neporozumení zlomku ako časti celku [8].

Pri analýze riešení úloh zameraných na zlomok ako mieru sme zistili, že žiaci si často zamieňajú číselnú os s geometrickým pravítkom a následne označujú čísla nasledujúce po nule ako na pravítku pri meraní dĺžky, pričom ignorujú dané rozdelenie číselnej osi a čísel na nej umiestnených. Taktiež si často neuvedomujú danú jednotku merania na číselnej osi, napríklad že jednotková vzdialenosť od nuly je daná ako jedna tretina a nie jedna celá. Ďalším problémom sa ukázalo zamieňanie si číselnej osi so spojitým úsečkovým modelom a následné rozdeľovanie jednej celej úsečky na časti bez akceptácie danej dĺžky úsečky vyjadrenej číslom na číselnej osi, ktoré zároveň vyjadruje vzdialenosť daného bodu od nuly ako začiatku číselnej osi. Posledným identifikovaným problémom bolo umiestňovanie bodu na číselnej osi bez rozdeľovania danej jednotky na rovnaké časti, postupujúc od bodu daného na číselnej osi smerom k nule na základe nejakého deliaceho princípu s úplným ignorovaním nuly ako začiatku číselnej osi [8].

Ďalším významným zistením bolo, že žiaci používajú algoritmus násobenia zlomkov pri sčítaní zlomkov, čo vedie k samostatnému sčítaniu čísel v čitateli a čísel v menovateli bez uvedomenia si toho, že môžeme sčítavať len zlomky s rovnakým menovateľom, teda že celok musí byť rozdelený na rovnaké časti. Taktiež sa ukázalo, že žiaci často používali desatinné čísla v čitateli alebo menovateli zlomku pri vyjadrení zlomku ako časti celku alebo pri porovnávaní a usporiadaní zlomkov. Veľmi častým javom tiež bolo uprednostňovanie prevodu zlomku na desatinné číslo a následne práca s desatinnými číslami pri porovnávaní a usporiadaní zlomkov, čo je dôsledkom toho, že porovnávanie desatinných čísel je viac prepojené na porovnávanie prirodzených čísel [8].

Záver

Z pohľadu zistených miskoncepcií môžeme konštatovať, že základným zdrojom problémov žiakov pri práci so zlomkami je ich nedostatočné ukotvenie v oblasti porozumenia zlomku ako časti celku. S tým súvisí aj práca s modelmi, spojitými, diskrétnymi a s číselnou osou.

Ukázalo sa, že žiaci majú tendenciu pracovať s usporiadaným diskrétnym modelom, napríklad do tvaru obdĺžnika, ako so spojitým modelom.

Potvrdilo sa, že interpretácia diskrétneho modelu je pre žiakov náročnejšia, pretože si musia množinu diskrétnych objektov predstaviť ako celok. Okrem toho, tieto objekty nemusia mať rovnaký tvar a veľkosť. Z tohto dôvodu diskrétny model nie je vhodný pre zavádzanie zlomku ako časti celku. Neskôr vo vyučovacom procese je ale dôležité pracovať aj s diskrétnym modelom zlomkov, ktorý ďalej pomáha budovať predstavu aj o zlomku ako podiele alebo o zlomku ako operátore.

Ďalším zisteným nedostatkom je práca s číselnou osou ako s jedným zo základných modelov na usporiadanie, porovnávanie a ekvivalenciu zlomkov.

Literatúra

[1] Kieren, T.: *On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers, Number nad measurement, Columbus, ERIC, 1976*

[2] Charalambous, Y.CH., Pitta-Pantazi, D.: *Drawing on a theoretical model to study students´ understanding of fractions, Educational Studies in Mathematics,* Berlin/Heidelberg, Springer, 2007, ISSN 1573-0816

[3] Kieren, T.: *Recent research on number learning. Columbus, ERIC, 1980*

[4] Behr, M., Lesh, R. et al.: *Rational number concepts, Acquisition of mathematics concepts and processes,* New York, Academic Press, 1983

[5] Carraher, D.: *Learning about fractions, Theories of mathematical learning,* Mahwah, Erlbaum, 1996

[6] Lamon, S.: *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers,* New York, Routledge, 2012, ISBN 978-0-415-88612-5

[7] Pantziara, M. C., Philippou, G.: *Levels of students´ conception of fractions, Educational Studies in Mathematics,* Berlin/Heidelberg, Springer, 2012, ISSN 1573-0816

[8] Pavlovičová, G., Vargová, L., Švecová, V.: *Štrukturalizácia poznatkov o zlomkoch a niektoré jej špecifiká,* Lüdenscheid, RAM - Verlag, 2020, ISBN 978-03-942303-94-1

PaedDr. Lucia Vargová, PhD.
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
SK – 949 74 Nitra
e-mail: lvargova@ukf.sk

doc. PaedDr. Gabriela Pavlovičová, PhD.
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
SK – 949 74 Nitra
e-mail: gpavlovicova@ukf.sk

AKO SÚVISÍ SÚČET $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ S MULTIPLIKATÍVNOU TABUĽKOU?

VARGOVÁ MICHAELA

ABSTRAKT. *V nasledujúcom texte uvádzame ako na základe skúmania usporiadania čísel do určitých geometrických obrazcov (napr. multiplikatívnej tabuľky, ale i iných usporiadaní čísel) môžeme pomerne jednoducho nájsť niektoré zaujímavé (konečné) súčty, najmä súčty tvaru* $\mathbf{1^k} + \mathbf{2^k} + \ldots + \mathbf{n^k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Úvod

Je dobre známe (či už z rôznych výskumov alebo skúseností samotných učiteľov matematiky), že úlohy a situácie, ktoré umožňujú žiakom bádať, experimentovať, samostatne odhaliť určitý poznatok, zažiť radosť z objavu, ... majú vo vyučovaní matematiky nezastupiteľné miesto. Okrem toho, že takto koncipované úlohy majú výrazný motivačný charakter, rozvíjajú u žiakov napríklad schopnosť zovšeobecňovať, argumentovať či kriticky myslieť.

V nasledujúcom texte uvádzame ako na základe skúmania usporiadania čísel do určitých geometrických obrazcov (napr. multiplikatívnej tabuľky, ale i iných usporiadaní čísel) môžeme pomerne jednoducho nájsť niektoré zaujímavé (konečné) súčty, najmä súčty tvaru $1^k + 2^k + \ldots + n^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Súčet tretích mocnín prvých *n* prirodzených čísel

Uvažujme nasledujúcu multiplikatívnu tabuľku ($n \times n$) (viď *Obrázok 1* a)) a všimnime si súčty K_i, $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ čísel vo vyznačených útvaroch („koridoroch“)

$$K_1 = 1$$
$$K_2 = 2 + 4 + 2 = 8 = 2^3$$
$$K_3 = 3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 27 = 3^3$$
$$\vdots$$
$$K_n = n + 2n + \ldots + (n-1)n + n^2 + (n-1)n + \ldots + 2n + n = n^3.$$

.	1	2	3	4	5	…	n
1	1	2	3	4	5	…	n
2	2	4	6	8	10	…	$2n$
3	3	6	9	12	15	…	$3n$
4	4	8	12	16	20	…	$4n$
5	5	10	15	20	25	…	$5n$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
n	n	$2n$	$3n$	$4n$	$5n$	…	n^2

a)

.	1	2	3	4	5	…	n
1	1	2	3	4	5	…	n
2	2	4	6	8	10	…	$2n$
3	3	6	9	12	15	…	$3n$
4	4	8	12	16	20	…	$4n$
5	5	10	15	20	25	…	$5n$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
n	n	$2n$	$3n$	$4n$	$5n$	…	n^2

b)

Obrázok 1

Súčet všetkých čísel v tabuľke môžeme vyjadriť ako súčet čísel v uvažovaných vyznačených útvaroch, teda $K_1 + K_2 + \ldots + K_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$.

Súčet všetkých čísel v multiplikatívnej tabuľke (*Obrázok* 1 b)) získame aj nasledovne:

súčet v1.riadku: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = s$

súčet v 2. riadku: $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = 2s$

$\vdots$

súčet v *n*-tom riadku: $n + 2n + \ldots + n \cdot n = n(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = ns$

Nech *s* označuje súčet čísel v prvom riadku tabuľky, t.j. $s = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$. Súčet čísel v druhom riadku tabuľky potom je $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = 2s$. Analogicky, súčet čísel v *n*-tom riadku tabuľky môžeme vyjadriť ako $n(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = ns$. Pre súčet všetkých čísel v tabuľke (*Obrázok* 1 b)) teda platí

$$s + 2s + \ldots + ns = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)s = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2,$$

$$\text{resp.}(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + \ldots + n(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$

*Pozn*ámka. K rovnakému záveru by sme dospeli, keby sme rovnakú úvahu aplikovali na stĺpce uvažovanej tabuľky.

Pre súčet tretích mocnín prvých *n* prirodzených čísel teda dostávame

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2,$$

odkiaľ využitím vzťahu pre súčet prvých *n* prirodzených čísel dostávame rovnosť

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Súčet $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1)n$

Ak si lepšie všimneme už zmienenú multiplikatívnu tabuľku, tak našej pozornosti zrejme neunikne, že hľadaný súčet $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n-1)n$ získame spočítaním čísel vo vyznačených bunkách, ležiacich pod (resp. nad) diagonálou.

Tentokrát venujme našu pozornosť rozdielom súčtov čísel v susedných vyznačených útvaroch (*Obrázok* 3 b)) , teda číslam $K_k - K_{k-1}$, kde $k = 1, 2, \ldots, n$ (výhoda tohto postupu nám bude zrejmá z nasledujúcich riadkov)

.	1	2	3	4	5	…	n
1	1	$1\cdot2$	3	4	5	…	n
2	$1\cdot2$	4	$2\cdot3$	8	10	…	$2n$
3	3	$2\cdot3$	9	$3\cdot4$	15	…	$3n$
4	4	8	$3\cdot4$	16	$4\cdot5$	…	$4n$
5	5	10	15	$4\cdot5$	25	…	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$(n-1)n$
n	n	$2n$	$3n$	$4n$	…	$(n-1)n$	n^2

a)

.	1	2	3	4	5	…	n
1	1	$1\cdot2$	3	4	5	…	n
2	$1\cdot2$	4	$2\cdot3$	8	10	…	$2n$
3	3	$2\cdot3$	9	$3\cdot4$	15	…	$3n$
4	4	8	$3\cdot4$	16	$4\cdot5$	…	$4n$
5	5	10	15	$4\cdot5$	25	…	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$(n-1)n$
n	n	$2n$	$3n$	$4n$	…	$(n-1)n$	n^2

b)

Obrázok 3

„Pôvodná“ multiplikatívna tabuľka

.	1	2
1	1	1·2
2	1·2	4

.	1	2	3
1	1	1·2	3
2	1·2	4	2·3
3	3	2·3	9

Tabuľka rozdielov

$K_1+\left(K_2-K_1\right)$

.	1	2
1	1	1·2
2	1·2	3

$K_1+\left(K_2-K_1\right)+\left(K_3-K_2\right)$

.	1	2	3
1	1	1·2	1
2	1·2	3	2·3
3	1	2·3	5

Naznačeným spôsobom získame nasledujúcu tabuľku (*Obrázok* 4).

1	1·2	1	1	1	⋯	⋯	n
1·2	3	2·3	2	2	⋯	⋯	2
1	2·3	5	3·4	3	⋯	⋯	3
1	2	3·4	7	4·5	⋯	⋯	4
1	2	3	4·5	9	⋯	⋯	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋯	$n-2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	$(n-1)n$
1	2	3	4	⋯	$n-2$	$(n-1)n$	$2n-1$

Obrázok 4

Vzhľadom na spôsob, ktorým sme tabuľku (*Obrázok* 4). získali, súčet všetkých čísel v nej, t.j. $\sum_{i=1}^{n}(K_i-K_{i-1})$, už spočítame veľmi jednoducho: $\sum_{i=1}^{n}(K_i-K_{i-1})=K_1+(K_2-K_1)+\ldots+(K_n-K_{n-1})=K_n=n^3$. Súčet čísel v každom „koridore“ tabuľky 2.2 , t.j. číslo K_i-K_{i-1}, môžeme vyjadriť nasledujúcim spôsobom:

$K_i-K_{i-1}=2(1+2+\ldots+i-2)+2(i-1)i+\underbrace{2i-1}_{2(i-1)+1}=2\big(1+2+\ldots+(i-2)+(i-1)\big)+2(i-1)i+1$, odkiaľ po úprave dostávame $K_i-K_{i-1}=3(i-1)i+1$. Potom však súčet čísel v tabuľke 2.2 , t.j. $\sum_{i=1}^{n}(K_i-K_{i-1})$, môžeme vyjadriť tiež v tvare

$$\sum_{i=1}^{n}(K_i-K_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}(3(i-1)i+1)=n+3(1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+(n-1)n).$$

Na základe uvedeného dostávame rovnosť $n^3=n+3(1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+(n-1)n)$, odkiaľ pre súčet $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+(n-1)\cdot n$ získavame $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+(n-1)n=\frac{n^3-n}{3}=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

Súčet druhých mocnín prvých *n* prirodzených čísel

Vzhľadom na spôsob vypĺňania multiplikatívnej tabuľky si ľahko všimneme, že každé číslo tvaru $(i-1)i$ (t.j. číslo ležiace v $(i-1)$. stĺpci a *i*-tom riadku alebo opačne, (*Obrázok* 5) je možné vyjadriť v tvare $(i-1)i=i^2-i,\ i\in\{1,2,\ldots,n\}$. Súčet $\sum_{i=1}^{n}(i-1)i=1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+(n-1)n$ môžeme preto vyjadriť v tiež tvare $\sum_{i=1}^{n}(i-1)i=\sum_{i=1}^{n}(i^2-i)=(1^2+2^2+\ldots+n^2)-(1+2+\ldots+n)$, resp. $\sum_{i=1}^{n}(i-1)i=\sum_{i=1}^{n}(i^2-i)=(1^2+2^2+\ldots+n^2)-\frac{n(n+1)}{2}$.

.	1	2	3	4	5	…	n
1	1	$1\cdot 2$	3	4	5	…	n
2	$1\cdot 2$	2^2	$2\cdot 3$	8	10	…	$2n$
3	3	$2\cdot 3$	3^2	$3\cdot 4$	15	…	$3n$
4	4	8	$3\cdot 4$	4^2	$4\cdot 5$	…	$4n$
5	5	10	15	$4\cdot 5$	5^2	…	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$(n-1)n$
n	n	$2n$	$3n$	$4n$	…	$(n-1)n$	n^2

Obrázok 5

Využitím rovnosti $\sum_{i=1}^{n}(i-1)i = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$, získanej na základe predchádzajúcej úvahy, pre súčet druhých mocnín prvých *n* prirodzených čísel získavame vzťah $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Iné „tabuľky" a súčet druhých mocnín prvých *n* prirodzených čísel

Súčet $1^2+2^2+\ldots+n^2$ môžeme nájsť aj skúmaním iných „tabuliek" či usporiadaní čísel. K rovnosti $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ môžeme dospieť aj na základe skúmania čísel, usporiadaných napríklad do tabuľky $n\times n$ (*Obrázok* 6.)

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & 1\\
1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & \cdots & 2 & 2\\
1 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 & \cdots & 3 & 3\\
1 & 2 & 3 & 4 & & 4 & & 4 & 4\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots\\
1 & 2 & 3 & 4 & & i & \cdots & i & i\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots\\
1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & i & & n\text{-}1 & n\text{-}1\\
1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & i & \cdots & n\text{-}1 & n
\end{array}$$

Obrázok 6

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & 1\\
1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & \cdots & 2 & 2\\
1 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 & \cdots & 3 & 3\\
1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 4 & & 4 & 4\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & i & \cdots & i & i\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & i & \cdots & n\text{-}1 & n\text{-}1\\
1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & i & \cdots & n\text{-}1 & n
\end{array}$$

Obrázok 7

Poznámka. Spôsob vypĺňania tabuľky (*Obrázok* 6) číslami 1, 2, ..., *n* je založený na vzťahu $t_{n-1}+t_n = n^2$, kde $t_n = 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ sa nazýva aj *n*-té trojuholníkové číslo (vzhľadom na grafickú reprezentáciu tohto súčtu, pozri aj [3]).

Súčet čísel vo vyznačenom útvare „koridore" K_i tabuľky (*Obrázok* 6) môžeme vyjadriť v tvare: $K_i = (1+2+\ldots+i)+(1+2+\ldots+i-1) = \frac{i(i+1)}{2}+\frac{(i-1)i}{2} = i^2$. Pre súčet všetkých čísel v tabuľke potom platí $K_1+K_2+\ldots+K_n = 1^2+2^2+\ldots+n^2$.

Súčet čísel v tabuľke (*Obrázok* 6) však môžeme vyjadriť aj tak, že sčítame čísla na hlavnej diagonále a v smeroch s ňou rovnobežných (*Obrázok* 7). Tento spôsob sčítania nám umožní súčet čísel v Tab. (*Obrázok* 6) vyjadriť v tvare

$$(1+2+\ldots+n)+2(1+2+\ldots+n-1)+\ldots+2(1+2)+2\cdot 1=\frac{n(n+1)}{2}+2\left(\frac{(n-1)n}{2}+\frac{(n-2)(n-1)}{2}+\ldots+\ldots+\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{1\cdot 2}{2}\right)=\frac{n(n+1)}{2}+(n-1)n+(n-2)(n-1)+\ldots+2\cdot 3+1\cdot 2$$

Uvedené dva spôsoby sčítania všetkých čísel v tabuľke (*Obrázok* 6, resp. *Obrázok* 7) vedú k rovnosti

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)}{2}+(n-1)n+(n-2)(n-1)+\ldots+2\cdot 3+1\cdot 2.$$

Za predpokladu, že už poznáme rovnosť $(n-1)n+\ldots+2\cdot 3+1\cdot 2=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$, pre súčet $1^2+2^2+\ldots+n^2$ získavame vzťah. $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Figurálne čísla a súčty tvaru $1^k+2^k+\ldots+n^k$, $k\in\mathbb{N}$.

K uvedených vzťahov môžeme dospieť aj skúmaním usporiadaní čísel do útvarov, nazývaných figurálne čísla, spomínaných vyššie.

Pretože $T_n=\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{3\cdot 4}{2}+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}$, tak číslo $2T_n=1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)$ môže byť reprezentované usporiadaním čísel na obr. 8. Pretože usporiadanie čísel, na obr. 9 vyznačených červenou farbou, predstavuje číslo $T_n=1+(1+2)+\cdots+(1+2+\cdots+n)$, usporiadanie čísel na obr. 9 reprezentuje číslo $3T_n$.

Keďže reprezentácia čísla $3T_n$ predstavuje tabuľku s n riadkami a $(n+1)$stĺpcami, číslo $3T_n$ môžeme vyjadriť v tvare $3T_n=n\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, odkiaľ pre T_n dostávame $T_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

$$2T_n=\qquad \begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 4 & \ldots & n+1 & \\ & 3 & 4 & \ldots & n+1 & \\ & & 4 & \ldots & n+1 & \mathbf{n} \\ & & & \ldots & n+1 & \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & n+1 & \\ & & \mathbf{n} & & & \end{array}$$

Obrázok 8

$$3T_n=\qquad \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 & \mathbf{n} \\ \cdots & & & & \cdots & \vdots & \\ \cdots & & & & \ddots & \vdots & \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 & \\ & & & \mathbf{n+1} & & & \end{array}$$

Obrázok 9

Usporiadanie čísel na obr. 10 predstavuje súčet $S_n=1^2+2^2+\ldots+n^2=1\cdot 1+2\cdot 2+\ldots+n\cdot n$ a obr. 11 zas súčet S_n+T_n.

$$S_n = \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & & n \\ & 2 & 3 & \dots & & n \\ & & 3 & \dots & & n \\ & & & \dots & & n \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & n \end{array}$$

n

n

Obrázok 10

$$S_n + T_n = \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{array}$$

n+1

n

Obrázok 11

Z obr. 11 je zrejmé, že platí $S_n + T_n = (n+1) \cdot \frac{n(n+1)}{2}$, resp. $S_n + \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n(n+1)^2}{2}$, odkiaľ pre súčet S_n dostávame $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Poznámka. Žiakov je potrebné upozorniť, že vzťahy v predchádzajúcom texte boli odvodené na základe induktívneho uvažovania a ich platnosť pre všetky prirodzené čísla je potrebné rigorózne dokázať.

Záver

V predchádzajúcich riadkoch sme uviedli niekoľko spôsobov ako na základe experimentovania a vizualizácie prostredníctvom rôznych usporiadaní čísel možno dospieť k formulácii hypotéz o platnosti uvedených identít. Prezentované námety k experimentovaniu je možné prispôsobiť tak, aby boli použiteľné vo vyučovacom procese, napríklad použitím metódy riadeného objavovania.

Literatúra

[1] Kopka, J.: *Zkoumání ve školské matematice* , Ružomberok, Katolícka univerzita v Ružomberku, 2006, ISBN 80-8084-064-4

[2] Posamentier, A.S., Smith, B.S. *Teaching Secondary Mathematics*: *Techniques and Enrichement Units*,Pearson, 2014, ISBN 978-0-13-282483-5

[3] Slavíčková, M., Vargová, M. *Vybrané metódy riešenia matematických úloh*. Dva dni s didaktikou matematiky 2018. Zborník príspevkov. 87-92. ISBN 978-80-8147-087-5

Mgr. Michaela Vargová, PhD.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského
Mlynská dolina F1
842 48 Bratislava
e-mail: michaela.vargova@fmph.uniba.sk

UČITEĽ AKO KOMUNIKAČNÝ A VZŤAHOVÝ PARTNER RODIČA

VODIČKOVÁ BARBORA

***Abstrakt**. Článok sa venuje komunikácii medzi učiteľom a rodičom. Zdôrazňuje potrebu profesionálnej komunikácie zo strany učiteľa. Zameriava sa hlavne na extralingvistiku, neverbalitu a komunikačné bariéry. tiež zdôrazňuje, že dobrá komunikácia si vyžaduje porozumenie a priestor pre vytváranie vzťahu.*

Komunikácia podstatná časť učiteľovej práce

Profesia učiteľa je náročná a rôznorodá. V prvom rade je učiteľ odborníkom na svoj predmet, je špecialistom na obsah, ktorý učí. Dôležité je tiež ako učí, to je náplňou didaktiky daného predmetu. Do jeho práce však vstupujú ďalšie premenné, ktoré sú tiež pri učení dôležité, resp. proces učenia ovplyvňujú. Tými môžu byť napríklad osobnostná zrelosť učiteľa, jeho schopnosť sebareflexie v kontakte so žiakmi, jeho profesijné skúsenosti, znalosti o rôznorodosti a špecifikách žiakov, ale tiež schopnosť komunikovať. V práci učiteľa je potreba vysokej miery komunikácie so žiakmi, kolegami, rodičmi. Vzhľadom na to, že komunikácia je veľmi dôležitý nástroj jeho práce, učiteľ čelí nároku na profesionálne komunikačné zručnosti. Tiež si musí byť vedomý, že zo svojej pozície môže komunikáciu ovplyvňovať pozitívnym, ale ja negatívnym smerom. Tu môže byť vystavený riziku neprofesionality svojich komunikačných zručností, v zmysle že aj napriek svojej vysokej odbornosti v rámci svojho predmetu, nevie správne a vhodne komunikovať. Na druhej strane, správnou komunikáciou, môže veľmi efektívne usmerňovať svoje komunikačné obsahy. Zelinová (2010) podčiarkuje, že komunikácia je základným pracovným nástrojom a kľúčovou schopnosťou učiteľa, prinajmenšom takou, akou je odbornosť.

Ako komunikovať?

Ako komunikujeme? V rámci odpovede si môžeme zjednodušene položiť tri otázky:

ČO? = obsah komunikácie

AKO? = spôsob komunikácie

KDE? = miesto komunikácie

Rozoberieme bližšie odpoveď na otázku AKO? Na túto otázku odpovedajú definície zložiek komunikácie, a síce pragmatiky a metakomunikácie. **Pragmatika** sa vysvetľuje nasledovne, človek, ktorý hovorí, nielen niečo hovorí, ale obvykle tým sleduje i nejaký zámer. Na rozdiel od semantiky sa pragmatika neuspokojuje s ideálnym (slovníkovým) významom slov, ale všíma si **zámer i stratégie hovoriaceho, situáciu a kontext výpovede**. (www.cz.wikipedia.org). **Metakomunikácia** môže upresňovať, meniť, popierať vypovedané**.** Sem patria:

- **Extralingvistické obsahy, znaky** ako sú farba hlasu, intonácia, pauzy v hovorenej reči ai.
- **Neverbalita**, neverbálna, tzv. mimoslovná komunikácia je fylogeneticky a ontogeneticky staršia. Vo vývoji ľudstva i vo vývine dieťaťa predchádza slovnú komunikáciu. Často ju používame neuvedomelo a preto sa ťažšie ovláda a kontroluje vôľou. Patrí sem **mimika** (najdôležitejší je očný kontakt)

a gestikulácia (vyjadrovanie sa prostredníctvom rúk, prostredníctvom nich signalizujeme hnev, prijatie, neprijatie, otvorenosť alebo uzavretosť, nezáujem, podporu, povzbudenie, radosť, smútok...), **haptika** (neverbálne vyjadrovanie sa prostredníctvom dotyku, tiež veľmi výpovedný spôsob komunikácie, napr. podanie ruky), **proxemika** (neverbálna komunikácia prostredníctvom vzdialenosti medzi komunikujúcimi, kde ide o intímnu, osobnú, sociálnu a verejnú zónu. Tiež v tomto kontexte hovoríme aj o pozíciách. V školskom prostredí môžeme pozorovať asymetrické pozície, napr. keď učiteľ stojí nad malým dieťaťom, alebo naopak, keď učiteľ sedí a rodič stojí. Tieto nevyrovnané pozície môžu byť prekážkami v komunikácii), **posturológia** (zaoberá sa komunikáciou prostredníctvom polohy tela. Učiteľ by si mal v rámci komunikácie všímať, čo robí jeho telo a tiež sledovať polohy komunikačného partnera. To mu môže pomôcť jednak k lepšej sebareflexii v rámci vlastnej spätnej väzby (tj. ako pôsobím) a tiež k lepšiemu pochopeniu komunikačného partnera), **kinezika** (je komunikácia prostredníctvom pohybu) a **teritorialita** (aký a koľko priestoru v komunikácii zaberáme). (Gabura, Pružinská, 1995).

Z uvedeného vyplýva, že na tom ako komunikujeme veľmi záleží, a preto je dôležité snažiť sa vedome spôsob svojej komunikácie usmerňovať.

Komunikačné chyby, bariéry v komunikácii učiteľa

V reálnom živote sa stretávame s ľuďmi, ktorí komunikujú efektívne, ale aj s takými, ktorí robia komunikačné chyby, vytvárajú komunikačné bariéry a komplikujú nedorozumenia (Grigeľová, 2014).

Komunikačnými chybami v praxi učiteľa môžu byť:

- ✓ Nevhodná poznámka, obsah napr. *„Vaše dieťa má asi poruchu, on je taký..."*
- ✓ Ambivalentné posolstvá, môže ich umocňovať negujúca neverbalita, napr. hovorím pozitívny obsah, ale neverbálne komunikujem obranný, nepriateľský postoj.
- ✓ Neuvedomelá komunikácia, napr. neuvedomujem si, že moje neverbálne správanie signalizujúce nezáujem, môže umocňovať strach rodiča o dieťa.
- ✓ Nevhodné okolnosti, napr. komunikujem citlivé informácie v prítomnosti druhých, komunikačný partner nemá zabezpečenú intimitu a pocit bezpečia.
- ✓ Subjektívne hypotézy vs. fakty. Ako príklad môžeme uviesť už toľko známe príbehy Einsteina, Edisona, ktorých ich učitelia odpísali už na začiatku ich školskej kariéry, pretože sa domnievali, že sú zlými žiakmi.
- ✓ Preceňovanie svojej autority. Možno mladým učiteľom sa môže stať zo strachu alebo z neistoty, že príliš preceňujú svoju učiteľskú pozíciu.
- ✓ Obranné reakcie v komunikácii učiteľa sa môžu vyskytnúť napríklad vtedy, keď uskutoční rozhovor s rodičom na základe negatívnej skúsenosti s ním a dopredu deklaruje obranu alebo aj protiútok a tým opúšťa svoju profesionálnu rolu.
- ✓ Iný jazykový kód, v takejto situácii môže ísť o nepochopenie a neprispôsobenie svojej komunikácie kontextu rodiča.
- ✓ Asymetrické pozície sme spomínali v texte vyššie.
- ✓ Vzájomné nepočúvanie sa.

Učiteľ versus rodič

Podľa Chlupíkovej (2012) **rodič** je v prvom rade zákazník, zveruje dieťa do rúk učiteľa, dôveruje mu a očakáva profesionalitu. Je často nekritický, lebo svoje dieťa nevidí v iných situáciách a ani nemá možnosť porovnávania. Chce pomôcť dieťaťu, ale často nevie ako.

Doplnili by sme, ešte, že je náchylnejší na emočne podfarbenú komunikáciu, pretože sa bytostne dotýka jeho dieťaťa. Učiteľ je naopak poskytovateľ služby, vzdelaný odborník, ovláda psychologické minimum, musí byť profesionálny.

V komunikácii s rodičom je pre učiteľa dôležité si uvedomiť, s akým „typom rodiča“ komunikuje, môže ísť o dôverujúceho rodiča, s ktorým je komunikácia jednoduchšia, ale môže ísť aj o vystrašeného rodiča, ktorého treba upokojiť, navodiť pokojnú a bezpečnú atmosféru. Učitelia v praxi isto stretávajú aj tzv. „rodičov expertov“, alebo negatívne naladených rodičov. Aj v takejto situácii, musí učiteľ profesionálne komunikovať a mať zvládnuté niektoré asertívne techniky, ktoré neurážajú, neznevažujú, nie sú v obrannej pozícii, ale pomáhajú zvládať emočne náročnejšie komunikačné situácie.

Dobrá komunikácia – porozumenie – vzťah

Na budovanie vzťahu medzi učiteľom a rodičom je potrebný čas a priestor pre vzájomné spoznanie sa, príležitosti pre vzájomný kontakt a vytvorenie dôvery na oboch stranách. Covey (2010) v súvislosti s komunikáciou píše o **vklade na emočné konto** a **empatickom počúvaní.** V rámci vkladu na emočné konto rodiča v každodennej praxi, v kontakte s ním má byť učiteľ ústretový, otvorený, má informovať o pokrokoch, úspechoch, zaujímať sa o rodinu, povzbudzovať rodiča v jeho rodičovských kompetenciách. Takýto vklad na emočné konto poskytuje dobrú psychologickú atmosféru, pripravuje dobrú základňu pre kvalitný vzťah učiteľ - rodič, a tiež aj pre rešpektujúcu a konštruktívnu komunikáciu o možných potencionálnych ťažkostiach a problémoch dieťaťa. **Empatické počúvanie** umožňuje učiteľovi priblížiť sa vnímaniu problému z pohľadu rodiča. Nemusíme pritom s dotyčným súhlasiť. Dôležité je rešpektovať právo rodiča na jeho názor, postoj či pocit. Ako píšu Gabura a Pružinská (1995, s. 22), *„každý človek je autentické indivíduum formované svojim genetickým potenciálom, životnými skúsenosťami a zážitkami a na základe svojej individuálnej histórie môže vidieť a prežívať svet inak ako iní ľudia.“* Snažiť sa najprv pochopiť, emočne sa angažovať, vytvoriť dobrú psychologickú atmosféru nie je jednoduché. O mnoho jednoduchšie je ponúknuť zaručené rady, naše vychodené chodníčky. Ak sme schopní empaticky počúvať, uspokojíme potreby druhého, upokojíme ho, pochopíme, uvoľníme atmosféru. Až potom sa môžeme sústrediť na jeho ovplyvňovanie a skutočné riešenie problému (Covey, 2010). Waclawik, Bavelasová, Jackson (2012) zdôrazňujú metakomunikáciu. Podľa nich **schopnosť primerane metakomunikovať je nielen nepostrádateľnou podmienkou úspešnej komunikácie, ale je spojená s rozsiahlou problematikou uvedomovania si seba a ostatných.**

Ako by mal učiteľ profesionálne usmerňovať komunikáciu s rodičom v prospech dieťaťa? V prvom rade by mal vkladať na emočné konto rodiča, aj keď komunikuje nepríjemnú informáciu, zamerať sa aj na silné stránky a pozitívne perspektívy dieťaťa. Mal by empaticky počúvať, nemusí ponúkať vždy rýchle odpovede a riešenia, netreba reagovať situačne. Náročnejšiu komunikáciu je dobré dopredu si premyslieť, prípadne poradiť sa so starším kolegom. V komunikácii musí prevažovať profesionálny prístup, tzn. treba mať pod kontrolou svoje osobnostné limity a byť schopný vlastnej sebareflexie. Netreba zabúdať tiež na podmienky komunikácie, ktoré vyžadujú bezpečie. Dobré je vždy aj zhŕňať obsah dialógu, aby sme sa ubezpečili, či si rozumieme, aby sa naše komunikačné línie stretli.

Do komunikácie každého človeka sa premieta jeho jedinečnosť. Jeho osobitý štýl komunikácie, jeho osobnosť. Niekto viac gestikuluje a hovorí hlasnejšie, iný je pokojný, hovorí potichu. Nemôžeme sa vyzliecť zo svojej kože a byť zrazu iným človekom, to nejde. Naša jedinečnosť dáva ten správny punc našej komunikácii. Môžeme však pracovať na sebe, naučiť sa vnímať svoje rezervy a snažiť sa zlepšovať. Ak som veľmi temperamentným učiteľom/ učiteľkou a zvyknem všetkých poučovať, skákať im do reči, potrebujem sa naučiť viac počúvať. Ak som síce výborným učiteľom/ učiteľkou, ale menej výrazným, hovoriacim tichým hlasom, musím dať o sebe a svojej skvelej práci s deťmi vedieť. Všetci máme svoje silné, ale aj slabé stránky v komunikácii. Dôležité je ich skúmať, poznávať a zlepšovať sa. Stačí, keď si dáme malý záväzok, že dnes budeme ľudí iba počúvať, alebo naopak, dnes vstaneme, usmejeme sa a prehodíme pár slov s rodičom, ktorý na to čaká. Tiež by sme mali vedieť, kde použiť takt a byť radšej ticho. Sú to drobnosti, ktoré si treba len uvedomiť.

Poďakovanie

Príspevok vznikol v rámci projektu KEGA č. 072UK-4/2019 MŠVVaŠ SR "Formovanie učiaceho sa spoločenstva v inkluzívnej materskej a základnej škole."

Literatúra

[1] COVEY, R. S. *7 návykov skutočne efektívnych ľudí*, Bratislava, Eastone Books, 2010, ISBN 978 -80-8109-143-8

[2] CHLUPÍKOVÁ, A., BARANOVIČ, R. *Anna Chlupíková hovorí, že rodičia a škola sa musia naučiť spolupracovať*. Dostupné na internete: www.rodinka.sk. 20.12.2012, (20.7. 2016)

[3] GABURA, J., PRUŽINSKÁ, J*. Poradenský proces*, Praha : SLON, 1995, ISBN 80-85850-10-9

[4] GRIBEĽOVÁ, I. *Komunikácia ako činiteľ efektívneho riadenia materskej škol,* Bratislava : MPC, 2014, ISBN 978-80-8052-586-6

[5] ZELINOVÁ, B. *Komunikácia je základným pracovným nástrojom učiteľa.* Dostupné na internete: www. dobraskola.com 1.6.2010 (20.7.2016)

[6] WATZLAVIK, P., BAVELAS, J.B., JACKSON, D.D. *Pragmatika lidské komunikace, interakční vzorce, patologie a paradoxy,* Brno : Newton books, 2011, ISBN 978-80-87325-00-1

Mgr. Barbora Vodičková,PhD.
PdF UK, Katedra liečebnej pedagogiky
Šoltésovej č.4
SK – 811 08 Bratislava
e-mail: vodickova@fedu.uniba.sk

Dva dni s didaktikou matematiky 2020. Zborník príspevkov.

Editor:	Mária Slavíčková
Počet strán:	159
Vydala:	Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
	Univerzita Komenského v Bratislave
Miesto vydania:	Bratislava
Rok vydania:	2020

Táto publikácia neprešla jazykovou úpravou. Príspevky neboli recenzované. Za obsahovú náplň príspevkov a ich jazykovú stránku zodpovedajú autori.

ISBN 978 – 80 – 8147 – 095 - 0