VANKÚŠ, P. (2009): História matematickej analýzy ako motivačný prvok pri výučbe tohoto predmetu, In: EMATIK 2008: Zborník príspevkov z konferencie, FMFI UK Bratislava, ISBN 978-80-89186-55-6, s. 124-131

HISTÓRIA MATEMATICKEJ ANALÝZY AKO MOTIVAČNÝ PRVOK PRI VÝUČBE TOHTO PREDMETU*

Peter VANKÚŠ

Abstrakt

V predkladanom článku opisujeme používanie histórie matematiky ako činiteľa, ktorý má potenciál ovplyvniť pozitívne vyučovanie matematiky. V článku sa venujeme výskumom týkajúcim sa vplyvov používania histórie vo vyučovaní a následne analyzujeme historický problém Grandiho radu a jeho aplikácie vo vyučovaní matematickej analýzy, konkrétne časti týkajúcej sa nekonečných radov. Cieľom článku je potom prezentovať takéto možnosti integrácie histórie matematiky do vyučovania matematickej analýzy na FMFI UK Bratislava so zámerom skvalitniť prípravu študentov na cvičeniach z daného predmetu.

ÚVOD

Pri vyučovaní abstraktných odvetví matematiky sa vyučujúci často stretáva s nezáujmom študentov, spojeným so skutočnosťou, že v chápaní študentov sú tieto znalosti "odtrhnuté od reality" a vzdialené bežným problémom praxe. Takýto nezáujem a nedostatok motivácie sa potom prejavuje v tom, že len veľmi málo študentov je ochotných študovať dané odvetvia matematiky hlbšie, než si to vyžaduje nutný štandard vedomostí potrebných pre zvládnutie skúšok. To je škoda, ak si uvedomíme, aké bohatstvo myšlienok a nápadov v sebe matematika skrýva a koľko podnetov pre rozvoj logického, strategického a matematického myslenia poskytuje. Preto sa v predkladanom článku snažíme prezentovať možnosť použitia histórie matematiky ako elementu, ktorý by mohol žiakom predstaviť matematiku ako živú vedu, plnú skvelých osobností, ale i problémov, ktorých riešenie si vyžadovalo veľa času a úsilia a často bolo sprevádzané staročia trvajúcimi polemikami. Študenti tak majú možnosť vidieť za abstraktnými vedomosťami ľudí, ktorí ich na základe sily svojho myslenia a niekedy i metódou pokusu a omylu vytvárali a tým si dané vedomosti "priblížiť".

GRANDIHO RAD

Ako konkrétny príklad možného použitia histórie vo vyučovaní uvedieme nasledovný matematický problém, týkajúci sa Grandiho radu. Jedná sa o úlohu, ktorú môžeme zaradiť do vyučovania nekonečných radov v rámci matematickej analýzy. Pôvodný problém predostrel taliansky kňaz, filozof a matematik Luigi Guido Grandi (1671 – 1742) v roku 1703 (A. G. Konforovič, Významné matematické úlohy, Praha, SPN 1989, 156; http://en.wikipedia.org/wiki/History_of_Grandi%27s_series):

*Článok bol podporený z Grantu UK Bratislava UK/390/2008: "História matematickej analýzy ako motivačný prvok pri výučbe tohto predmetu"

VANKÚŠ, P. (2009): História matematickej analýzy ako motivačný prvok pri výučbe tohoto predmetu, In: EMATIK 2008: Zborník príspevkov z konferencie, FMFI UK Bratislava, ISBN 978-80-89186-55-6, s. 124-131

Nech $1-1+1-1+...+(-1)^{n+1}+...=S$, potom $S=(1-1)+(1-1)+...=0+0+...=0$, ale zároveň $S=1+(-1+1)+(-1+1)+...=1+0+0+...=1$. Teda dostali sme, že $1=0$. Tento výsledok Grandi interpretoval ako možnosť stvorenia sveta z ničoho.

V skutočnosti Grandi ale, podobne ako veľa matematikou na začiatku 17. storočia, veril, že výsledok tejto sumy je $\frac{1}{2}$.

Pre daný výsledok existovali viaceré argumenty: $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...=\sum_{i=0}^{\infty}(-x)^i$. (Daný rozvoj je možné dostať tak, že daný zlomok upravíme delením čitateľa menovateľom metódou delenia polynómu polynómom.) Ak potom za x dosadíme 1, dostaneme pre súčet Grandiho postupnosti: $1-1+1-1+...=\frac{1}{2}$.

Rovnaký výsledok dostaneme nasledovným postupom: $S=1-1+1-1+...+(-1)^{n+1}+...$, potom $S-1=-1+1-1+1+...+(-1)^n+...=-S$, teda $S-1=-S \Rightarrow 2S=1 \Rightarrow S=\frac{1}{2}$. (Ako predpoklad tu figuruje, že S existuje.)

Grandi sa pokúsil uvedený súčet demonštrovať nasledovným príkladom (G. Grandi, Infinitis infinitorum, et infinite parvorum ordinibus disquisitio geometrica, 1710):

Dvaja bratia zdedili od otca diamant. Otec im ho ale zakázal predať, preto sa dohodli, že každý brat ho bude rok vlastniť a následne ho na rok predá druhému bratovi. Ak táto dohoda trvá večnosť, každý z bratov vlastní vlastne polovicu drahokamu, aj keď tento je nekonečne krát predaný druhému bratovi.

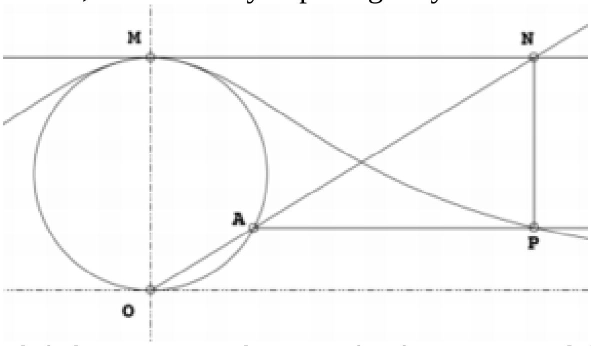
Uvedený problém vyvolal búrlivú polemiku významných matematikou danej doby. Zúčastnili sa jej napr. Leibniz, Jacob Bernoulli, Lagrange, Euler, Frobenius...

Významný nemecký matematik Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) bol do diskusie týkajúcej sa Grandiho postupnosti vtiahnutý filozofom Christianom Wolffom, ktorý ho žiadal o vyjadrenie jeho názoru na daný problém v roku 1711.

V skutočnosti Leibniz už v roku 1674 vo svojom diele De Triangulo Harmonico spomenul Grandiho postupnosť v nasledujúcom príklade: $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{1}-\frac{1}{1+1}$, teda potom platí, že $\frac{1}{1+1}=1-1+1-1+...$

V liste, ktorý bol odpoveďou Wolffovi a bol vydaný knižne v Acta Eruditorum, Leibniz rozobral uvedený problém z viacerých strán. Skutočnosť, že uvedená suma je rovná $\frac{1}{2}$ považoval Leibniz za pravdivú, ako dostačujúci dôkaz považoval nasledovnú Grandiho geometrickú interpretáciu:

Vezmime kružnicu a na nej ľubovoľný priemer daný úsečkou OM. Pre ľubovoľný ďalší bod kružnice A zostrojíme sečnicu $\overleftrightarrow{OA}$. Bod N následne dostaneme ako priesečník tejto sečnice s dotyčnicou ku danej kružnici v bode M. Následne zostrojíme rovnobežku s $\overleftrightarrow{OM}$ cez bod N a rovnobežku s $\overleftrightarrow{MN}$ prechádzajúcu cez bod A, priesečníkom týchto rovnobežiek nech je bod P. Pri posúvaní bodu A po kružnici opíše bod P krivku, ktorá sa nazýva po anglicky "witch of Agnesi".



Obrázok 1 Krivka nazývaná po anglicky "witch of Agnesi", zdroj: http://en.wikipedia.org/wiki/Witch_of_Agnesi

Pôvod anglického mena uvedenej krivky je kuriózny. V skutočnosti sa jedná o krivku, ktorú študovali v časovej následnosti napr. Pierre de Fermat, Guido Grandi a talianska filozofka a matematička Maria Gaetana Agnesi. Taliansky názov uvedenej krivky "versiera" navrhla práve posledne menovaná na základe latinských termínov vertere, versus, znamenajúcich točenie, zatáčanie, ktoré používal v súvislosti s danou krivkou už Grandi. Na počesť talianskej matematičky dostala krivka potom názov "la versiera di Agnesi", čiže Agnesina krivka. Anglický matematik, John Colson, ktorý prekladal Agnesine práce do angličtiny, si pravdepodobne pomýlil slovo "la versiera" s "l'avversiera", kde "avversiera" znamená "žena stojaca proti bohu", čiže bosorka. Tento názov sa ujal nielen v anglicky hovoriacich krajinách, ale postupne prenikol i napr. do španielsky hovoriacich krajín, kde uvedenú krivku nazývajú "La Bruja de Agnesi". (zdroj: D. J. Struik (ed.), A source book in mathematics, 1200-1800, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1986, 178-180; R. Bruen, A Brief History of The Lucasian Professorship of Mathematics at Cambridge University, Boston College 1995)

Ak vezmeme ako počiatok súradnicovej sústavy bod O a položíme priemer uvažovanej kružnice rovný d, tak danú krivku je možné analyticky zapísať v tvare: $y=\frac{d^3}{x^2+d^2}$. Po vydelení čitateľa aj menovateľa daného zlomku d^2 dostaneme zlomok $\frac{d}{1+\frac{x^2}{d^2}}$, ktorý sa dá rozvinúť do geometrického radu $\sum_{i=0}^{\infty} d\cdot\left(-\frac{x^2}{d^2}\right)^i = d-\frac{x^2}{d}+\frac{x^4}{d^3}-\frac{x^5}{d^4}+...$ Grandi následne do daného predpisu dosadil $d=x=1$, z čoho dostal rovnosť $\frac{1}{2}=1-1+1-1+...$

Ako bolo povedané, Leibniz s daným výsledkom súhlasil. Rovnako súhlasil s argumentom, ktorý na dosiahnutie uvedenej rovnosti využíval rad $1-x+x^2-x^3+...=\sum_{i=0}^{\infty}(-x)^i=\frac{1}{1+x}$ a následné dosadenie $x=1$. Nevidel dôvod, prečo by daný vzťah nemal byť správny i pre takéto x, keď platí pre x menšie ako 1. Ostrej kritike ale podrobil Grandiho príbeh o dedičstve, ktorý podľa neho nemá so sumou

Grandiho radu nič spoločné. Ak napr. vezmeme ľubovolný konečný párny počet rokov, majetok jedného z bratov je jedna. aj keď súčet radu je nula.

Leibniz sa pokúsil stanoviť sumu daného nekonečného radu priamo, bez jeho vyjadrenia v tvare $\frac{1}{1+x}$. Vychádzal z toho, že ak vezmeme konečný párny počet členov daného radu, ich súčet je: $1-1=1-1+1-1=(1-1)+(1-1)+...=0$. Ak vezmeme konečný nepárny počet členov, dostaneme súčet: $1=1-1+1=1+(-1+1)+(-1+1)+...=1$. Nekonečný rad nemá párny ani nepárny počet členov, preto podľa Leibniza jeho súčet musel byť medzi týmito hodnotami a podľa zákonov "pravdepodobnosti" a zákonov "spravodlivosti" bol rovný aritmetickému priemeru uvedených hodnôt, t.j. $\frac{1}{2}$. Leibniz sám pripustil, že v uvedenom argumente je viac metafyziky ako matematiky, ale konštatoval, že metafyzických právd je v matematike viac, ako sa všeobecne pripúšťa (M. Kline, Euler and Infinite Series, Mathematics Magazine 56, n. 5, 1983, 307–314). Keď sa však Christian Wolff po obdržaní listu snažil aplikovať prístup aritmetického priemeru na iné rady, napr. $1-2+4-8+16+...+(-2)^{n-1}+...$, Leibniz to intuitívne označil za nesprávne, lebo ako podotkol, uvedený súčet sa musí dať zapísať ako súčet nekonečného radu kladných členov, ktorého jednotlivé členy s rastúcim n idú k nule, čo však podľa neho po správnom uzátvorkovaní Grandiho rad spĺňa ($S=1+(-1+1)+(-1+1)+...=1+0+0+...$).

Jacob Bernoulli (1654 – 1705), jeden z ôsmich významných matematikov v rodine Bernoulliovcov, sa venoval obdobnému nekonečnému radu v roku 1696 vo svojom diele Positiones arithmeticae de seriebus infinitis. Na základe delenia polynómu polynómom študoval podiel $\frac{k}{m+n}=\frac{k}{m}-\frac{kn}{m^2}+\frac{kn^2}{m^3}-\frac{kn^3}{m^4}+...$, pričom ak položíme $m=n$ dostaneme $\frac{k}{2m}=\frac{k}{m}-\frac{k}{m}+\frac{k}{m}-\frac{k}{m}+...$ Poslednú rovnosť nazval Bernoulli "nie neelegantný paradox".

Pierre Varignon (1654 – 1722), významný francúzsky matematik, ktorý si medzi prvými uvedomil dôležitosť testovania konvergencie nekonečných radov, sa venoval Grandiho radu v správe Précautions à prendre dans l'usage des Suites ou Series infinies résultantes, ktorá bola v plnom znení vydaná v roku 1715 v diele Histoire de l'Académie royale des sciences avec les mémoires de mathématique et de physique tirés des registres de cette Académie 1666-1790, 203-226. V uvedenej správe, ktorá bola napísaná ako reakcia na úvahy Jacoba Bernoulliho, Varignon poukazuje na divergentnosť Grandiho radu, na základe čoho Jean le Rond d'Alembert (1717 – 1783) v encyklopédii Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers v roku 1751 uvádza, že Grandiho argumentácia rozvojom do radu bola Varignonom vyvrátená. Je zaujímavým faktom, že Varignon, ktorý bol Leibnizovým priateľom, napísal správu v izolácii, preto sa v nej nevenoval Leibnizovej práci na danú tému.

Na základe listovej komunikácie s Leibnizom sa Grandiho radu venoval i taliansky matematik Jacopo Francesco Riccati (1676 – 1754). V diele Saggio intorno al sistema dell'universo (1754) kritizuje Grandiho argumentáciu rozvojom do radu, keďže ako konštatuje, základný problém je, že sme začali s divergentným radom, v ktorom sa nedajú od istého člena nasledovné členy zanedbať, čo je vlastnosť charakteristická len pre konvergentné rady.

Leonhard Paul Euler (1707 – 1783), významný švajčiarsky matematik, sa venoval Grandiho radu, ako aj iným divergentným radom, v diele De seriebus divergentibus (1760). Euler považuje argumentovanie rozvojom do radu $1-x+x^2-x^3+\dots$ za "dosť rozumné odôvodnenie". Pritom protiargument, že pre $x \geq 1$ platí, že v rozvoji $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\dots\pm x^n \mp \frac{x^n}{1+x}$ nemôžeme posledný člen zanedbať, vidí Euler ako nedôležitý, keďže nekonečný rad posledný člen vlastne nemá. Názor Eulera na daný problém dokumentuje nasledovný citát (L. P. Euler, 'De seriebus divergentibus', Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, 1760, n. 5, 211):

Aj keď uvedená polemika sa môže javiť ako dôležitá, žiadna z argumentujúcich strán nemôže byť usvedčená z omylu v žiadnom z prípadov používania takýchto radov v analýze, čo je silným argumentom, že žiadna strana sa nemýli, ale nezhody sú čisto slovného charakteru. Pretože ak rad $1-1+1-1+1-1+\dots$ *nahradím číslom* $\frac{1}{2}$, *nikto ma nemôže obviniť z chyby, čo by mohol urobiť hocikto, ak by som ho nahradil niektorým iným číslom. Nemôže byť preto vyslovená pochybnosť, že rad* $1-1+1-1+1-1+\dots$ *a* $\frac{1}{2}$ *sú ekvivalentné a je vždy dovolené nahradiť jedno vyjadrenie druhým bez toho, aby vznikla akákoľvek chyba. Celá otázka sa teda zmenila na polemiku, či budeme nazývať zlomok* $\frac{1}{2}$ *korektnou sumou radu* $1-1+1-1+1-1+\dots$ *a je zrejmé, že tí, čo toto označenie odmietajú, ale neodvažujú sa spochybniť prezentovanú ekvivalentnosť, prepadli slovičkáreniu.*

Aj napriek zdanlivo presvedčenému vyjadrovaniu Euler prezentoval vo svojej korešpondencii s Nicolausom I. Bernoullim pochybnosti ohľadne súčtov divergentných radov. Bernoulli na to reagoval vyjadrením, že úvahy týkajúce sa nahradenie nekonečného radu konečným výrazom budú chybné, ak by sa ukázalo, že určitému nekonečnému rozvoju je možné priradiť rôzne konečné vyjadrenia, ktoré majú rôznu hodnotu. Eulerov prístup ku Grandiho radu bol založený na jeho pevnej viere, že $\frac{1}{2}$ je jediná hodnota, ktorá daný rad vyjadruje. V roku 1745 v liste Christianovi Goldbachovi Euler prezentuje, že si nie je vedomý nijakého protipríkladu.

Uvedený protiklad našiel Jean Charles Callet (1744 – 1799). V nepublikovanom memorande, ktoré predložil Lagrangeovi, poukázal na to, že $\frac{1+x}{1+x+x^2}=1-x^2+x^3-x^5+x^6-x^8+x^9+\dots$ Ak dosadíme do danej rovnosti za x jednotku, dostaneme: $\frac{2}{3}=1-1+1-1+1-1+\dots$. Lagrange s uvedeným argumentom nesúhlasil, vychádzajúc z Leibnizovho určovania súčtu divergentného radu pomocou "pravdepodobnosti". Ak zapíšeme rad, ktorý dostal Callet, v jeho úplnom tvare $1+0x-x^2+x^3+0x^4-x^5+x^6+\dots$, po dosadení jednotky za x dostávame rad

$1+0-1+1+0-1+1+0-1+\ldots$. Keď teraz uzátvorkujeme uvedený rad nasledovnými spôsobmi (všetky ostatné postupy uzátvorkovania sú ekvivalentné, ak berieme do úvahy podmienku, že vždy do zátvorky vložíme po sebe nasledujúce čísla $0, 1, -1$ v ich ľubovoľnom poradí), postupne dostaneme: $(1+0-1)+(1+0-1)+\ldots=0$; $1+(0-1+1)+(0-1+1)+\ldots$; $1+0+(1+0-1)+(1+0-1)+\ldots=1$, teda tri čísla, ktorých suma je dva, t.j. "pravdepodobnostná" hodnota daného radu je $\frac{2}{3}$. To je rozdiel oproti radu $1-1+1-1+\ldots$, ktorého "pravdepodobnostná" hodnota je $\frac{1}{2}$.

Anglický matematik Edward Waring (1736 – 1798) v druhom vydaní svojho diela Traité de calcul differéntiel et du calcul intégral (1810) píše o rozvoji $\frac{a}{a-x}=1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\ldots$, že uvedený rad možno považovať za "rozvoj" danej funkcie, ktorý nemá vždy hodnotu funkcie, ku ktorej prislúcha. Uvedený rozvoj dáva hodnotu funkcie len pre $|a|<|x|$, píše Waring (M. Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, volume 2, Oxford, Oxford University Press 1990). V súlade s Eulerom ale Waring predpokladá, že každý rad je spätý s nejakou funkciou pre ľubovoľné x, preto pri práci s radmi môžeme na ne pozerať ako na funkcie.

Symbolické posledné slovo v polemike týkajúcej sa Grandiho radu priniesol krátky článok Über die Leibnitzsche Reihe (Journal für Mathematik, volume 89, 1880), napísaný nemeckým matematikom Ferdinandom Georgom Frobeniusom (1849 – 1917). Uvedený článok môžeme považovať za zrod moderného počítania s divergentnými radmi. Frobenius napísal tento článok po preštudovaní prác Leibniza, Bernoulliho a po prečítaní Raabeho komentároch k prácam oboch menovaných matematikov na tému divergentných radov a ich vyjadrenia konečnými výrazmi. Frobenius v článku tvrdí, že vo svojej práci na danú tému Leibniz nepriamo vyslovil Abelovu vetu, v súčasnosti známu ako Frobeniusovu vetu. Moderná formulácia tejto vety znie: Každý rad, ktorý je Cesàrovsky sumovateľný je sumovateľný aj Ábelovsky. V nasledujúcom období sa prudko rozvinuli prístupy sumovania divergentných radov a uvedená oblasť prestala byť pre matematiku zahalená arómou paradoxov, ako o nej napísal ešte v roku 1828 Niels Henrik Abel (V. S. Varadarajan, Euler Through Time: A New Look at Old Themes, American Mathematical Society, 2006).

DISKUSIA:

Prezentovaný problém Grandiho radu je zaujímavý z viacerých hľadísk. Je to skvelý príklad postupného vývoja matematického poznania a spresňovania pojmov. Prvotné naivné idey boli korigované a až presné formálne vybudovanie teórie konvergentných a divergentných radov umožnilo daný problém vyjasniť. Toto spresňovanie pojmov je potom pomocou aj pre študentov, ktorí pri budovaní vedomostí z oblasti konvergencie, divergencie a súčtu nekonečných radov prechádzajú podobným vývojom chápania ako tomu bolo v rámci historického vývoja (A. Sierpińska, 'Humanities students and epistemological obstacles related to limits', Educational Studies in Mathematics, 18 (4), 1987, 371–396; G. T. Bagni, 'Infinite Series from History to Mathematics Education', International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 2005, [http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/bagni.pdf]). Grandiho rad im môže priblížiť význam určovania konvergencie radov a prinesie im vhľad do problematiky konvergencie a divergencie. V neposlednom rade daný problém ukazuje výhodu moderného matematického aparátu, kde je Grandiho problém vďaka korektnému vybudovaniu pojmov konvergencie a divergencie triviálny. Uvedený problém slúži ako motivácia i ako podnet pre prípadné samostatné štúdium napr. niektorých metód sumovania divergentných radov. Problém je ako motivačný vhodný i svojím relatívne jednoduchým zadaním a historickou príťažlivosťou matematikov, ktorí sa na jeho riešení podieľali. Veríme preto, že uvedený problém týkajúci sa Grandiho radu má potenciál zlepšiť vyučovanie tejto tematiky v rámci cvičení z matematickej analýzy.

ZÁVER

V článku sme prezentovali prínosy používania histórie vo vyučovaní matematiky. Potenciál tejto metódy je hlavne v priblížení matematiky študentom a ich motivácii prostredníctvom vzbudenia záujmu o preberané učivo. Ako vhodné sa ukazuje aj používanie historicky motivovaných problémov, ktorých riešenie viedlo v minulosti k rozvoju matematickej teórie. Tieto problémy sú pre študentov neraz pútavé a ich riešenie im prináša radosť zo znovuobjavovania matematických právd.

Problematickým prvkom používania histórie sa javí jednak výber vhodných historických tém a ich spracovania a tiež časová náročnosť prípravy historicko-matematických materiálov. Preto sme v článku poskytli použiteľný príklad matematického problému aj s historickým kontextom jeho riešenia. Uvedený problém je možné potom prezentovať študentom v rámci cvičení z matematickej analýzy.

Konkrétne sa jedná o problém hľadania súčtu Grandiho radu. Na tomto historickom probléme je možné sledovať vývoj matematických poznatkov z oblasti konvergencie, divergencie a sumovania nekonečných radov a prácu matematikov, ktorá ku týmto poznatkom viedla. Študenti si vďaka tomuto problému ujasnia vlastné chápanie základných pojmov z uvedenej oblasti a potenciálne získajú motiváciu pre ďalšie štúdium tejto tematiky.

Veríme, že náš článok poskytol podnety na zamyslenia sa nad možnými prínosmi integrácie histórie do vyučovania matematickej analýzy a materiál pre vyskúšanie tohto prístupu vo vyučovaní matematickej analýzy. Pre záujemcov sme na stránke www.geocities.com/historiaanalyzy uviedli ďalšie materiály týkajúce sa problematiky integrovania histórie do vyučovania matematickej analýzy.

LITERATÚRA

[1] Bagni, G. T. (2005): 'Infinite Series from History to Mathematics Education', In: International Journal for Mathematics Teaching and Learning, [http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/bagni.pdf]

[2] Bernoulli, Jacob (1696): Positiones arithmeticae de seriebus infinitis

[3] Bruen, R. (1995): A Brief History of The Lucasian Professorship of Mathematics at Cambridge University, Boston College

[4] Calinger, R. (ed.) (1996): Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching, MAA

[5] Euler, L. P. (1760): 'De seriebus divergentibus', In: Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, n. 5

VANKÚŠ, P. (2009): História matematickej analýzy ako motivačný prvok pri výučbe tohoto predmetu, In: EMATIK 2008: Zborník príspevkov z konferencie, FMFI UK Bratislava, ISBN 978-80-89186-55-6, s. 124-131

[6] Fauvel, J., Maanen, J. (eds.) (2000): History in mathematics education: the ICMI study, Dordrecht, Kluwer

[7] Fried, M. N. (2001): 'Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist?', In: Science & Education n. 10, 391-408

[8] Friedelmeyer, J.-P. (1993): 'Eclairages historiques des mathématiques', In: Repères IREM, n. 13, 111-129

[9] Frobeniusom, F. G. (1880): 'Über die Leibnitzsche Reihe', In: Journal für Mathematik, volume 89

[10] Grandi, G. (1710): Infinitis infinitorum, et infinite parvorum ordinibus disquisitio geometrica, Pisis, Bindi

[11] Hairer, E; Wanner, G. (1996): Analysis by its history, New York, Springer

[12] http://en.wikipedia.org/wiki/History_of_Grandi%27s_series

[13] http://en.wikipedia.org/wiki/Witch_of_Agnesi

[14] http://www.geocities.com/historiaanalyzy

[15] Katz, V. (ed.) (2000): Using History to Teach Mathematics: An International Perspective, MAA

[16] Kline M. (1983): 'Euler and Infinite Series', In: Mathematics Magazine 56, n. 5, 307–314

[17] Kline, M. (1990): Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, volume 2, Oxford, Oxford University Press

[18] Konforovič, A. G. (1989): Významné matematické úlohy, Praha, SPN

[19] Lagrange, J. L. (1901): Lectures on elementary mathematics, Open Court

[20] Leibniz, G. W. (1674): De Triangulo Harmonico

[21] M:ATH (1991): 'Mathématiques: approche par des textes historiques', In: Repères IREM, n. 3, 43-51

[22] Riccati, J. F. (1754): Saggio intorno al sistema dell'universo

[23] Sierpińska, A. (1987): 'Humanities students and epistemological obstacles related to limits', In: Educational Studies in Mathematics, 18 (4), 371–396

[24] Spagnolo, F., Margolinas, C., (1993): 'Un ostacolo epistemologico rilevante per il concetto di limite: il postulato di Archimede', In: La matematica e la sua didattica, n. 4, 410–427

[25] Struik, D. J. (ed.) (1986): A source book in mathematics, 1200-1800, Princeton University Press, Princeton, New Jersey

[26] Toeplitz, O. (1927): 'Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihre Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an höheren Schulen', In: Jahresberichte DMV 36

[27] Varadarajan, V. S. (2006): Euler Through Time: A New Look at Old Themes, American Mathematical Society

[28] Varignon, P. (1715): 'Précautions à prendre dans l'usage des Suites ou Series infinies résultantes', In: Histoire de l'Académie royale des sciences avec les mémoires de mathématique et de physique tirés des registres de cette Académie 1666-1790, 203-226

[29] Vygodskii, M Y. (1931): Základy infinitezimálneho počtu, Moskva-Leningrad