Lineárna algebra: sústavy lineárnych rovníc, matice, hodnosť matice, Gaussova eliminačná metóda

Úloha: EHK 1, 351

- Kyselina sírová sa skladá z vodíka, síry a kyslíka, pričom pomer hmotnosti vodíka a síry je 1:16 a pomer hmotnosti kyslíka a síry je 2:1.

  Koľko každého prvku obsahuje 1323g kyseliny?

Vyriešte

$$x + y = 2$$
$$x - y = 0$$

$$x + y = 0$$
$$2x + 2y = 0$$

$$x + y = 1$$
$$2x + 2y = 5$$

Riešenie systému lineárnych rovníc

- Lineárna rovnica s n neznámymi x_1, x_2, ..., x_n nazývame rovnicu tvaru:

  $a_1x_1+a_2x_2+\dots a_nx_n = b;\ a_i,\ b\in R$
  (a_i koeficienty)
- Vyriešiť sústavu znamená nájsť všetky jej korene. Pričom koreň rovnice je číslo, ktoré keď dosadím do pôvodnej rovnice za neznámu, dostaneme pravdivý výrok.
  (To musí platiť pre všetky rovnice danej sústavy.)

Riešenie systému lineárnych rovníc

- Možné výsledky pri riešení systému lineárnych rovníc:
  - *A) systém rovníc má práve jedno riešenie*
  - *B) systém rovníc má nekonečne veľa riešení*
  - *C) systém rovníc nemá žiadne riešenie*
- Ako si zjednodušiť riešenie systému lineárnych rovníc – matice

Matica

- Definícia: Matica je tabuľka čísel zostavená z *m* riadkov a *n* stĺpcov. Označujeme ju:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- *A* je matica typu *m x n*, čísla a_{ij} sú prvky matice.

Matica

- $m = n$ štvorcová matica
- $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ hlavná diagonála
- jednotková matica napr.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- trojuholníková matica napr.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Hodnosť matice

- Hodnosť matice A je maximálny počet lineárne nezávislých riadkov. Označujeme ju *h(A)*
- Lineárne nezávislé riadky:

  ak $c_1 r_1 + c_2 r_2 + \ldots + c_n r_n = 0$ len ak $c_1, c_2, \ldots, c_n = 0$

Hodnosť matice

Hodnosť matice nemenia tieto úpravy:

- a) vzájomná výmena dvoch ľubovoľných riadkov matice
- b) vynásobenie ľubovoľného riadku matice číslom $c \neq 0$
- c) pripočítanie lineárnej kombinácie iných riadkov matice k danému riadku matice (pozn. lineárnou kombináciou riadkov $r_1, \ldots, r_k$ rozumieme $r = c_1 r_1 + c_2 r_2 + c_k r_k$; $c_i \in R$
- d) pridanie alebo vynechanie riadku matice, ktorý je lineárnou kombináciu jej iných riadkov, vynechanie riadku, ktorý obsahuje samé nuly

Hodnosť matice

Hodnosť **trojuholníkovej** matice: **počet nenulových riadkov**

Stanovte hodnosť matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Stanovte hodnosť matice systému a rozšírenej matice systému

$$x + y = 2$$
$$x - y = 0$$

$$x + y = 0$$
$$2x + 2y = 0$$

$$x + y = 1$$
$$2x + 2y = 5$$

Frobeniova veta

Systém lineárnych rovníc má riešenie, ak je **hodnosť matice sústavy rovná hodnosti rozšírenej matice sústavy**

1. **$h(A) = h(Ar) = n$** **práve jedno riešenie**
2. **$h(A) = h(Ar) < n$** **nekonečne veľa riešení**
3. **$h(A) \neq h(Ar)$** **žiadne riešenie**

Gaussova eliminačná metóda

1. Úprava rozšírenej matice na trojuholníkový tvar
2. Určenie počtu riešení (Frobeniova veta)
3. Výpočet riešení z trojuholníkovej matice

Vyriešte sústavu lineárnych rovníc Gaussovou eliminačnou metódou:

$$x-2y+z=1$$

$$-x+3y+2z=0$$

$$2x-y+5z=5$$