Lineárna algebra: determinanty; Cramerovo pravidlo

Determinant matice 2 x 2
krížové pravidlo

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 8 - 3 = 5$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinant matice 3 x 3

Sarusovo pravidlo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & -3 & -2 & 5 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 3 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 \cdot (-2) + 0 \cdot (-1) \cdot 5 - 2 \cdot (-1) \cdot (-3) - 1 \cdot 4 \cdot 5 - 0 \cdot 3 \cdot (-2) =$$

$$= -9 - 16 + 0 - 6 - 20 - 0 = -51$$

Determinant matice 4 x 4 až n x n
Rozvoj podľa riadku *(stĺpca)*

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Determinant matice 4 x 4 až n x n
Rozvoj podľa i-teho riadku

$$|A| = (-1)^{i+1} a_{i1} |A_{i1}| + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} |A_{in}|$$

kde A_{in} je matica, ktorá vznikne z A vynechaním i-teho riadku a n-tého stĺpca

Determinant matice n x n
Pomocou trojuholníkovej matice

- Determinant trojuholníkovej matice je súčin jej diagonálnych prvkov

- Pri úprave sa mení determinant nasledovne:
  - Výmena riadkov: zmena znamienka
  - Vynásobenie riadku konštantou: vynásobenie determinantu
  - Pripočítanie násobku iného riadku: determinant sa nemení

Determinant matice n x n
Pomocou trojuholníkovej matice

- Determinant trojuholníkovej matice je súčin jej diagonálnych prvkov
- Pri úprave sa mení determinant nasledovne:
  - Výmena riadkov: zmena znamienka
  - Vynásobenie riadku konštantou: vynásobenie determinantu
  - Pripočítanie násobku iného riadku: determinant sa nemení

Vypočítajte determinant matice jej úpravou na trojuholníkovú maticu

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = ?$$

Cramerovo pravidlo

- Sústava *n* rovníc o *n* neznámych
- Hodnosť matice $h(A)=n$ (*Koľko riešení?*)
- Na riešenie možno použiť Cramerovo pravidlo

Veta:

Nech A je štvorcová matica rádu n. Hodnosť matice $h(A)=n$ práve vtedy, keď $|A| \neq 0$

(Danú maticu potom nazývame regulárna.
Ak je determinant nulový, matica je singulárna.)

Cramerovo pravidlo

Znenie pravidla:

Nech $D = |A|$ je determinant matice systému n lineárnych rovníc o n neznámych.

Ak $D \neq 0$, tak má systém jediné riešenie:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, ..., x_n = \frac{D_n}{D}$$

kde $D_1, D_2, \ldots, D_n$ sú determinanty matíc ktoré vzniknú z matice systému nahradením n-tého stĺpca pravou stranou sústavy rovníc

Cramerovo pravidlo

Vyriešte pomocou Cramerovho pravidla:

$$3x - y + z = 10$$

$$5x + y + 2z = 29$$

$$-4x + y + 2z = 2$$