Komplexné čísla

PPP Matematika, Peter Vankúš

Príklad z praxe

Riešením Schrödingerovej rovnice pre atóm vodíka dostávame tri **2*p*** orbitály $\psi_1 = N_1 \cdot e^{-\frac{r}{2a_0}} \cdot r \cdot \sin\theta \cdot e^{i\phi}, \psi_0 = N_2 \cdot e^{-\frac{r}{2a_0}} \cdot r \cdot \cos\theta, \psi_{-1} = N_1 \cdot e^{-\frac{r}{2a_0}} \cdot r \cdot \sin\theta \cdot e^{-i\phi}$, kde N_1, N_2 sú konštanty, a_0 je Bohrov polomer, r je vzdialenosť elektrónu od jadra. Nájdite reálnu a imaginárnu zložku ψ_0 a ψ_{-1}.

Vyriešte!

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

- V ***R*** nemá riešenie
- Komplexné čísla, ***C***
- Imaginárna (komplexná) jednotka:

$$i^2 = -1$$

Vyriešte!

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$D = 4 - 8 = -4$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

Úloha

Vyriešte v obore komplexných čísel:

$$x^2 - 4x + 6 = 0$$

Zápisy komplexných čísel

Algebraický tvar: napr. $-1+i$

$$z = a + b \cdot i$$

a – reálna zložka komplex. čísla
b – imaginárna zložka komplex. čísla

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$ – absolútna hodnota komplex. čísla

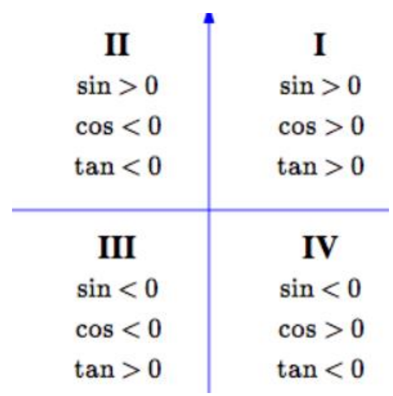
Zápisy komplexných čísel

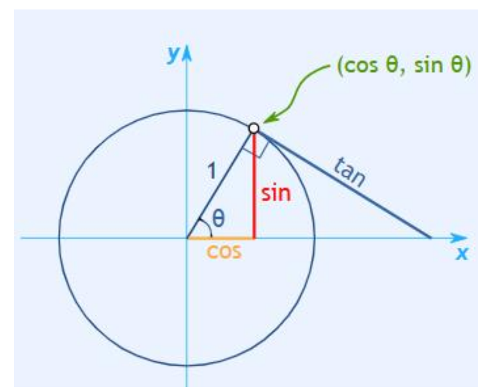
Goniometrický tvar:

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{|z|}, \sin\alpha = \frac{b}{|z|}$$

Angle θ				
Degrees	Radians	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0	0	0	1	0
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	undefined
180	π	0	-1	0
270	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	undefined
360	2π	0	1	0





Zápisy komplexných čísel

Eulerov vzťah: $\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$

Exponenciálny tvar:

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = |z|e^{i\alpha}$$

Moivreov vzorec

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$$

DOKÁŽTE!

Odvoďte vzorce pre:

$$\cos 2\alpha =$$

$$\sin 2\alpha =$$

Úlohy

Zapíšte v goniometrickom a exponenciálnom tvare komplexné čísla:

a) $z_1 = 2$ b) $z_2 = 1 + 2i$ c) $z_3 = -1 - \sqrt{3} \cdot i$

Vypočítajte:

a) $z_2 + z_3, z_2 - z_3$ b) $z_2 \cdot z_3, \dfrac{z_2}{z_3}$

c) $(z_2)^4, \sqrt{z_3}$