Košický matboj, 30. 4. 2010, 1. časť

1.1. V domčeku žijú tri sestry Janka, Danka a Majka. Každá z nich buď klame, alebo hovorí pravdu. Janka povedala: Všetky klameme. Danka povedala: Iba jedna z nás hovorí pravdu. Ktoré dievčatá klamú a ktoré vravia pravdu?

1.2. Koľkokrát je najmenší spoločný násobok čísel 84 a 126 väčší ako ich najväčší spoločný deliteľ?

1.3. Predpokladajme, že Zem má tvar gule a rovník má dĺžku 40000 km. Predstavme si, že ponad rovník natiahneme drôt o 20 metrov dlhší ako dĺžka rovníka tak, že medzera, ktorá vznikne, bude všade rovnaká (drôt bude mať tvar kružnice so stredom v strede Zeme). Môže popod tento drôt prejsť človek?

1.4. Päťuholník $MRKVA$ je pravidelný. Zistite hodnotu $|\sphericalangle RKM| + |\sphericalangle KMV| + |\sphericalangle MVA|$ (v stupňoch).

1.5. Vieme, že $x + 2y = a$ a $2x - 3y = b$. Akú hodnotu má výraz $6x - 2y$?

1.6. Koľko trojciferných čísel má aspoň jednu číslicu rovnú aritmetickému priemeru ostatných dvoch?

1.7. If it were two hours later, it would be half as long until midnight as it would be if it were an hour later. What is the time now?

1.8. Pre strany a, b, c trojuholníka ABC platí $a \leq 7 \leq b \leq 8 \leq c \leq 15$. Aký najväčší obsah môže mať trojuholník ABC?

1.9. Koľko usporiadaných trojíc reálnych čísel x, y, z vyhovuje zároveň rovniciam

$$x^2 - y = z^2, \qquad y^2 - z = x^2, \qquad z^2 - x = y^2 \ ?$$

1.10. Nájdite najmenšie prirodzené číslo n, pre ktoré je počet uhlopriečok pravidelného n-uholníka násobkom čísla 2010.

1.11. V konvexnom päťuholníku budeme ťažnicou nazývať úsečku spájajúcu vrchol so stredom protiľahlej strany. Vieme, že v konvexnom päťuholníku $ABCDE$ sa všetky ťažnice pretínajú v jednom bode P, ktorý rozdelí všetky ťažnice v rovnakom pomere (teda pomer dĺžky úseku ťažnice medzi vrcholom a bodom P ku dĺžke úseku ťažnice medzi P a stredom strany je rovnaký pre všetky ťažnice). Vyjadrite veľkosť tohto pomeru pomocou dĺžok strán päťuholníka $ABCDE$.

1.12. Nájdite najmenšie číslo S také, že každé dva štvorce, ktorých obsah je spolu 1, sa dajú umiestniť do obdĺžnika s obsahom S bez toho, aby sa prekrývali (strany štvorcov musia byť rovnobežné so stranami obdĺžnika).

Košický matboj, 30. 4. 2010, 2. časť

2.1. Aký je súčet nominálnych hodnôt všetkých možných rôznych platných eurových bankoviek a mincí?

2.2. Valec má objem 200 litrov. Aký objem (v litroch) má druhý valec, ktorý je dvakrát širší a má polovičnú výšku?

2.3. Schodište vysoké 3,6 m bolo nahradené novým. Počet schodov sa zväčšil o 3, výška schodu sa zmenšila o 4 cm. Koľko schodov má nové schodište?

2.4. Určte počet všetkých štvorcov s vrcholmi ležiacimi vo vrcholoch daného pravidelného n-uholníka.

2.5. Rodina Novohradských sa okrem rodičov skladá z dvoch detí rôzneho veku a izbového psa. Vieme, že aspoň jedno z detí je dievča. Aká je pravdepodobnosť, že obe deti sú dievčatá? (Môžete predpokladať, že počatie chlapca i dievčaťa je rovnako pravdepodobné.)

2.6. Nájdite najmenšie prirodzené číslo, ktorého ciferný súčin je 3600.
(Ciferný súčin čísla je súčin jeho číslic, napr. pre číslo 2342 dostaneme $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 = 48$.)

2.7. Find the number of rectangular parallelepipeds of volume 60 with integer dimensions such that length $\leq$ width $\leq$ height.

2.8. Ak $x + \dfrac{1}{y} = 12$ a $y + \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{8}$, aká je najväčšia možná hodnota výrazu xy?

2.9. Trojuholník ABC má pravý uhol pri vrchole B a odvesny dĺžok $|AB| = 5$, $|BC| = 8$. Na odvesnách AB a BC ležia v tomto poradí body D a E tak, že $|BD| = 3$ a $|BE| = 5$. Vypočítajte obsah oblasti spoločnej trojuholníku ABC a obdĺžniku, ktorého tri vrcholy ležia bodoch B, D, E.

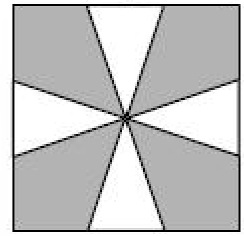
2.10. Nájdite množinu reálnych čísel x, pre ktoré platí nerovnosť $x^3 + 1 > x^2 + x$.

2.11. Vnútorné uhly trojuholníka ABC pri vrcholoch A, B, C majú postupne veľkosť 59, 60, 61 stupňov. Označme O stred kružnice opísanej trojuholníku ABC. Na kratšom z jej oblúkov AB leží bod M. Označme K a L priesečníky kolmice z bodu M na priamku AO s priamkami AB a AC (v tomto poradí). Označme N a P priesečníky kolmice z bodu M na priamku BO s priamkami BA a BC (v tomto poradí). Vieme, že platí $|KL| = |MN|$. Zistite veľkosť uhla MLP.

2.12. Určte všetky možné hodnoty výrazu $3x^2y^2$, ak x a y sú celé čísla spĺňajúce vzťah

$$y^2 + 3x^2y^2 = 30x^2 + 517.$$

Košický matboj, 30. 4. 2007, 3. časť



3.1. Súčet dvoch čísel je 765. Keď zväčšíme jedno z nich o 30%, zväčšíme ich súčet o pätinu. Aké je menšie z pôvodných dvoch čísel?

3.2. Strany štvorca na obrázku sú priečkami prechádzajúcimi stredom štvorca rozdelené na tretiny. Ak je obsah vyšrafovanej časti 10, aký je obsah celého štvorca?

3.3. Nájdite poslednú číslicu čísla $3^{2010^{2010}}$. (Pozor: $x^{a^b} = x^{(a^b)}$.)

3.4. Stavebný pozemok s rozmermi 110×154 m je potrebné rozdeliť na rovnaké štvorcové parcely s čo najväčšou výmerou. Koľko parciel vznikne pri takomto rozdelení?

3.5. Nech $f(x) = x^2 - x + 2$. Nájdite súčet všetkých čísel x, pre ktoré platí $f(x-2) = 22$.

3.6. V koľkých štvorciferných číslach vieme škrtnúť dve číslice tak, aby sme dostali dvojciferné číslo väčšie ako 98?

3.7. In how many ways can six labeled computers be networked so that each computer is directly connected to exactly two others computers, and all computers are connected directly or indirectly?

3.8. Nájdite všetky reálne riešenia rovnice

$$\sqrt{11x+3} - \sqrt{2-x} - \sqrt{9x+7} + \sqrt{x-2} = 0.$$

3.9. Koľko dvojíc stenových uhlopriečok kocky je tvorených navzájom mimobežnými priamkami? (Stenová uhlopriečka kocky je uhlopriečka steny tejto kocky.)

3.10. Daný je rovnobežník $ABCD$ so stranami dĺžok 7 cm a 10 cm zvierajúcimi uhol 60 stupňov. Osi štyroch strán tohto rovnobežníka sa popretínajú v štyroch rôznych bodoch, ktoré sú vrcholmi štvoruholníka $KLMN$. Vypočítajte obsah štvoruholníka $KLMN$.

3.11. Nájdite prirodzené čísla m a n také, že $m > n$, čísla 1234^m a 1234^n majú rovnaké posledné trojčíslie a súčet $m+n$ je minimálny.

3.12. Pre ktoré prirodzené čísla n rôzne od 5 existuje polynóm P stupňa n s reálnymi koeficientmi taký, že $P(0), P(1), P(2), \ldots, P(n-1), P(n+1), P(n+2), P(n+3)$ sú celé čísla a $P(n)$ nie je celé číslo?