DVA DNI S DIDAKTIKOU MATEMATIKY 2023

ZBORNÍK PRÍSPEVKOV

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
BRATISLAVA 7. – 8. 9. 2023

ORGANIZÁTOR

ODDELENIE DIDAKTIKY MATEMATIKY
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

PROGRAMOVÝ A ORGANIZAČNÝ VÝBOR

MÁRIA SLAVÍČKOVÁ
MONIKA DILLINGEROVÁ
EMÍLIA MIŤKOVÁ
PETER VANKÚŠ
MICHAELA VARGOVÁ

EDITOR

MÁRIA SLAVÍČKOVÁ

Táto publikácia neprešla jazykovou úpravou. Príspevky neboli recenzované. Za obsahovú náplň príspevkov a ich jazykovú stránku zodpovedajú autori.

Vyšlo v roku 2023

ISBN 978-80-8147-135-3

OBSAH

Milé kolegyne, milí kolegovia.

Ôsmy ročník konferencie Dva dni s didaktikou matematiky sme organizovali v zrekonštruovaných priestoroch Fakulty matematiky fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave. Teší nás, že každý rok pribudnú nové tváre na našej konferencii a dúfame, že sa s radosťou vrátia aj na ďalšie pripravované ročníky, či už s príspevkom, alebo bez neho. Odmenou za naše snaženie bolo vyhlásenie účastníčok: „Mali by ste organizovať Tri dni...“.

V mene programového a organizačného výboru ďakujem aj študentkám a doktorandom, ktorí pomáhali s organizáciou konferencie a prispeli tak k jej hladkému priebehu. Poďakovanie patrí projektu H2020 MaTeK za značnú finančnú pomoc, tiež kolegom z oddelenia propagácie fakulty za obrazovú dokumentáciu a tvorbu videozáznamov z vybraných príspevkov. Tie si budete môcť postupne pozrieť na našom FMFI YouTube kanáli.

So želaním úspešného školského roka a veľa dobrých nápadov

za programový a organizačný výbor želá
Mária Slavíčková

PREDNÁŠKA 1: PODPORA INTEGRACE MATEMATICKÉ, ČTENÁŘSKÉ A JAZYKOVÉ GRAMOTNOSTI U ŽÁKŮ ZÁKLADNÍCH ŠKOL - PROJEKT TAČR

JANA SLEZÁKOVÁ

Hlavním cílem projektu je navrhnout funkční koncepci vzájemného propojování matematické, čtenářské a jazykové gramotnosti na základních školách prostřednictvím práce se slovními úlohami a pomoci tak žákům při řešení slovních úloh. Výstupem projektu je metodika, kde je popsáno, jak pracovat se čtyřmi netradičními typy slovních úloh. Součástí práce s danými slovními úlohami je i rozvoj metakognitivních strategií žáků. Přednáška bude zaměřena na představení metodiky a podrobně jednoho typu slovních úloh Nedokončené strategie..

Prednášku si možno pozrieť na:
https://www.youtube.com/watch?v=u1WGiT9BjDE&t=38s

PhDr. Jana Slezáková, PhD.
Pedagogická fakulta, UK v Praze,
M. Rettigové 4, 116 39 Praha 1
e-mail: jana.slezakova@pedf.cuni.cz

PREDNÁŠKA 2: EUKLIDES: ZÁKLADY

JÁN ČIŽMÁR

Úvod

Euklidovo hlavné dielo $\Sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\iota\alpha$ (Stoicheia; Základy) vzniklo okolo roku 300 p.n.l. v starovekom Egypte v meste Alexandria, založenom Alexandrom Veľkým. V meste pôsobila vrcholná vedecko-umelecká inštitúcia vtedajšej doby v oblasti Stredozemného mora a Blízkeho východu – Museion – založená Ptolemaiom I. (Sotérom), prvým panovníkom Ptolemaiovskej dynastie, panujúcej v Egyptskej ríši v období 306 p.n.l. – 30 p.n.l. Základy sú prvým dielom vytvoreným v špeciálnej vedeckej disciplíne – matematike – podľa zásad Aristotelovej koncepcie tvorby vedeckej teórie axiomaticko-deduktívnou metódou.

Euklides zachytil touto metódou temer celý obsah súdobej teoretickej matematiky, ktorá sa do toho stavu vyvinula približne v období 600 p.n.l. – 300 p.n.l. Matematický jazyk diela je hlboko zakotvený v prirodzenom jazyku a v porovnaní s dnešným jazykom matematiky obsahuje minimum špeciálnych termínov, aj tie sa formálne minimálne odlišujú od prirodzeného jazyka. Temer absolútna absencia špeciálnych symbolov sa vystihuje vyjadrením, že jazyk diela je totálne rétorický, a fakt, že matematické objekty sa zaznamenávajú temer výlučne graficky geometrickými ilustráciami, sa charakterizuje formuláciou, že model teórie je totálne geometrický. Tento fakt pri povrchnom vnímaní zvádza k domnienke, že dielo prezentuje základy geometrie, čo je zúžené hodnotenie z pohľadu dnešnej (aj vtedajšej) klasifikácie matematických subdisciplín, ako je zrejmé z nasledujúceho prehľadu trinástich kníh (= kapitol) Základov:

1. Základy planimetrie;
2. Geometrická algebra;
3. Geometria kružníc a kruhov;
4. Pravidelné mnohouholníky;
5. Veličiny; pomery a úmery;
6. Podobnosť;
7. Elementárna teória čísel;
8. Spojité úmery;
9. Aplikácie teórie čísel;
10. Iracionálne veličiny;
11. Základy stereometrie;
12. Obsahy a objemy;
13. Pravidelné mnohosteny)

Ako čítať Euklidovo dielo Základy z rozhrania 4. – 3. storočia p.n.l. s metodologickou výbavou 21. storočia?

Euklidove *Základy* sú systematickým vedeckým spracovaním temer celého obsahu teoretickej matematiky, aký sa ustálil koncom 4. storočia p.n.l. v grécko-helenistickej matematike vo východnej oblasti Stredozemného mora – na gréckej pevnine, významnejších priľahlých ostrovoch a v gréckych kolóniách od južnej Itálie a Sicílie až po západné pobrežie Malej Ázie a v niektorých lokalitách severnej Afriky. Vychádzajúcim centrom vedeckého a umeleckého sveta Blízkeho východu bola inštitúcia Museion v meste Alexandria na západnom okraji nílskej delty, založenom Alexandrom Veľkým a zvolenom za hlavné mesto Egyptskej ríše prvým panovníkom dynastie Ptolemaiovcov (306 p.n.l. – 30 p.n.l.) – Ptolemaiom I. Euklides bol poprednou vedeckou osobnosťou tejto inštitúcie.

Čo ponúkala grécka matematika Euklidovej doby ako gréckym racionalizmom pretavené a gréckymi objavmi doplnené empirické dedičstvo starovekej egyptskej a sumersko-babylonskej matematiky? Izolované elementárnogeometrické výsledky Tálesa a Milétskej školy, aritmetiku Pytagora a jeho školy, geometriu pytagorovcov (mnohouholníky, pravidelné mnohouholníky, iracionálne úsečky, tri pravidelné mnohosteny), Demokritove úspešné aplikácie atomistickej metódy na stanovenie obsahov a objemov, Hippokratovu systemizáciu planimetrie, rozvoj teórie iracionalít Teodorom a najmä Teaitetom, Eudoxove začiatky teórie pomerov a proporcií a teórie exhaustácie. Išlo o výsledky miestami hlbokého vhľadu a dosahu, ale vcelku rozptýlené a bez zjavného alebo potenciálne hlbšieho súvisu a najmä bez nejakého jednotiaceho princípu, ktorý by dával kľúč k určitému systematickému usporiadaniu nahromadených poznatkov.

Teoretické základy logiky sa, prirodzene, postupne zdokonaľovali reálnou praxou v jednotlivých exaktných a aplikovaných disciplínach, ale samostatnou exaktnou disciplínou sa logika stala Aristotelovým explicitným osamostatnením. S týmto postavením logiky úzko súvisela jej ďalšia úloha a význam – jej funkcia vo vytváraní axiomaticko-deduktívnej teórie určitej vednej disciplíny. Išlo o zachytenie situácie, keď známa sústava poznatkov nejakej disciplíny bola reprezentovaná konečným počtom logických výrokov, z ktorých časť boli výroky logicky nezávislé a všetky ostatné výroky z tejto sústavy boli z výrokov tejto podmnožiny logicky odvoditeľné. Skupina logicky nezávislých výrokov sa nazýva *sústavou axióm* danej teórie, jej jednotlivé prvky sa nazývajú *axiómami* teórie a v danej logike sa bez dôkazu prijímajú ako pravdivé. Ďalšie *poznatky* teórie sa formulujú prevažne v tvare viet, čo sú logické výroky, dokázateľné prostriedkami logiky, ktorá je zvolená ako platná (relevantná) logika predmetnej teórie. Teória takto vytváraná sa nazýva *teóriou budovanou axiomaticko-deduktívnou metódou.*

Euklidova kniha *Základy* je v zásade vytvorená axiomaticko-deduktívnou metódou, t. j. je napísaná použitím prirodzeného jazyka

- vymenovaním druhov matematických objektov a ich pomenovaním slovami zo slovnej zásoby prirodzeného jazyka alebo umelo vytvorenými slovami doplnenými k existujúcej zásobe (objekty, relácie medzi nimi, operácie s nimi a medzi nimi);
- vymenovaním logických výrokov , ktoré sú splnené uvedenými matematickými objektmi (axiómy);
- definíciou nových objektov, relácií a operácií vychádzajúcich z daných a spĺňajúcich pravidlá danej logiky;
- tvorbou nových výrokov a dôkazom ich pravdivosti s použitím pravidiel danej logiky, axióm a výrokov už dokázaných

Z uvedeného vyplýva, že vopred – apriórne – je k dispozícii akási oblasť prvkov a nejakých prípustných vzťahov (relácií a operácií) medzi nimi, z ktorých sa vyberajú všetky relevantné objekty, o ktorých bola reč v predchádzajúcom texte. Každému dnešnému čitateľovi je zrejmé, že v tejto situácii narážame na akúsi neurčitú nepomenovanú, mlčky predpokladanú existujúcu množinu, vopred prítomnú v duchu *množinovej paradigmy*, v zajatí ktorej sme zvyknutí uvažovať v dôsledku predchádzajúceho školského vzdelávania a výchovy. Čitateľovi je známe, že v dnešných písomných prameňoch sa potenciálnemu problému takéhoto druhu vyhneme prvotnou voľbou *základnej množiny* dostatočne rozľahlej počtom prvkov a dostatočne bohatej vlastnosťami prvkov, ktoré sa v priebehu úvah vynoria ako potrebné. – Ako je zjavné, toto všetko v čase, keď Euklides tvoril Základy, driemalo v nesmierne vzdialenej budúcnosti konca 19. storočia.

Pre úplnosť informácie treba ešte dodať, že logika, s ktorou Euklides ako jedinou nepochybne pracoval, bola klasická Aristotelova dvojhodnotová logika so sylogizmom ako hlavným nástrojom dedukcie.

Obvyklým spôsobom výstavby Euklidovho priestoru syntetickou metódou v dnešných časoch je jeho budovanie na základe Hilbertovej axiomatiky, ktoré sa realizuje reťazcom inklúzií postupne špecializujúcich sa priestorov pridávaním ďalších skupín „definujúcich" axióm. Euklidov (presnejšie *euklidovský*) priestor je úplne určený zaradením všetkých *piatich* skupín axióm: a. incidencie, a. usporiadania, a. zhodnosti, axióma rovnobežnosti, a. spojitosti.

Prirodzene, štruktúra Euklidovej axiomatiky je značne odlišná od ktorejkoľvek dnešnej axiomatiky euklidovskej geometrie, a to nielen pre odlišnosti v celkovej obsahovej štruktúre a pre historicky pochopiteľnú zjavnú nerozvinutosť Euklidovej terminológie, ale aj pre obsahovú odlišnosť mnohých homonymných pojmov v paralelných častiach textov. Výrazne zreteľné je to najmä v úvodnej časti knihy 1 v pasáži *Definície*, kde v duchu staršej metodológie pokusov o axiomaticko-deduktívny prístup sa vyskytujú snahy o vysvetlenie primárnych pojmov formálnou definíciou, čo je z hľadiska princípov dnešnej hilbertovskej koncepcie nemožné. Väčšina nominálnych definícií je prijateľná aj podľa dnešných noriem. Tzv. genetické definície sú bez výnimky metodologicky nekorektné, lebo „definujú" požadovaný objekt pomocou nedefinovaných, zdanlivo známych pojmov prirodzeného jazyka, v skutočnosti však pojmov rovnakého stupňa neurčitosti, akú má pojem podrobovaný pokusu o definíciu. (Príkladom je „definícia" gule vychádzajúca z polkruhu a používajúca otáčanie, čo je pojem komplikovanejší než všetky ostatné, ktoré sa v „definícii" vyskytujú.

Niekoľko poznámok k dvom pojmom v Základoch

1. V čom spočíva princíp homogenity?

Absolutizácia geometrického modelovania ako univerzálnej metódy interpretácie teoretických objektov, relácií a operácií vystupujúcich v *Základoch* sa opiera o jazykové prostriedky a o najjednoduchšie, empirickou praxou zavedené, grafické prostriedky ako sprievodné prostriedky prirodzeného jazyka , vzťahujúce sa od najnižšieho stupňa elementárnej školy na primárne (prvotné) matematické pojmy. Tak sa v priebehu školského vzdelávania (alebo dokonca v predškolskom vzdelávaní) naučíme zautomatizovane chápať „rovnú" spojnicu dvoch „bodov" ako „úsečku", oblasť ohraničenú na liste papiera uzavretou čiarou ako „plošný" (geometrický) objekt a v pokročilejšej– časovo značne posunutej fáze vzdelávania – istú súvislú schému vytvorenú istým počtom graficky diferencovaných úsečiek ako rovinné znázornenie kocky alebo kvádra. Takéto myšlienkovo-vizuálne zafixovanie grafických obrazov a názvov abstraktných matematických objektov vytvára vo vedomí v danej metóde štandardizovanú „predstavu" geometrického objektu, skonštruovanú procesom vzdelávania, a nie cestou nejakého vnuknutia alebo intuície. Šarlatánstvom sú akési insitné pokusy typu „Nakreslite, ako to vidíte." – Žiak to nakreslí prinajlepšom analogicky k tomu, čo už (zachyteného) niekde videl, alebo sa naučil.

Geometrické modelovanie matematických objektov a vzťahov medzi nimi priamo implikuje inkompabilitu každých dvoch tried z trojice objektov *lineárnych*, *plošných* a *priestorových*. To znamená, že žiadnym kvantitatívnym, tým menej kvalitatívnym spôsobom nemožno porovnávať úsečku alebo ohraničený oblúk („krivej čiary“) s ohraničenou oblasťou roviny alebo zakrivenej plochy, s ohraničeným uzavretým mnohostenom alebo s telesom ohraničeným zakrivenými plochami. V rámci jednotlivých tried, navzájom disjunktných, možno porovnávať objekty *kvalitatívne* (napr. „rovné“ – „krivé“) aj *kvantitatívne*, ak *miera kvantity* je definovaná. Tou je pre tieto triedy po poriadku *dĺžka*, *obsah* a *objem*.

Každé dva objekty jednej triedy nazývame *rovnorodé* (*homogénne*) a rozdelenie všetkých prípustných objektov do troch tried po dvojiciach disjunktných nazývame rozdelením všetkých (prípustných) objektov na základe princípu homogenity. V dnešnej terminológii je zjavné, že základným číselným atribútom každého objektu tej istej triedy je to isté (prirodzené) číslo – *rozmer*, čo je pojem, s ktorým zápasila ešte aj matematika 20. storočia.

Geometrické modelovanie matematických objektov je metodologická bariéra, ktorá vizuálnou presvedčivosťou historicky veľmi dlhý čas bránila v mnohých oblastiach matematiky prekročiť hranicu 3 pre číselnú charakteristiku mnohých zaujímavých objektov.

2. Problematika *miery v Základoch*

V dnešnej teórii je miera priestoru (v priestore) obvykle zadaná jednotkou dĺžky, t. j. jednotkou rozmeru 1. Jednotky miery rozmerov $2 \leq r \leq n$ (kde n je rozmer (ambientného) priestoru) sú dané ako jednotky odvodené obvyklým (štandardným) spôsobom (od jednotky rozmeru 1).

V *Základoch* sa miera predmetného objektu zisťuje porovnaním modelu objektu s modelom homogénneho objektu, ktorý je k dispozícii. Modely objektov sa „premiestňovaním“ – bez zmeny miery – uvádzajú do inklúzie (pri nerovnosti mier), alebo do stavu (polohy) *rozkladovej* zhodnosti alebo do stavu *doplnkovej* zhodnosti, alebo do polohy totožnosti modelov pri rovnosti mier.

Pri „superštandardných“ objektoch štvorec a kruh sa miera (v tomto prípade *obsah*) zisťuje podľa príslušných kníh diela (kniha 2 – geometrická algebra, kniha 12 – exhaustačná metóda); uvedené postupy sú predobrazom zovšeobecnenia, v ktorom by nekonečná rastúca zhora ohraničená postupnosť súvislých zjednotení neprekrývajúcich sa štvorcov (s neohraničene zmenšujúcimi sa stranami) vpísaných do predmetného rovinného objektu (jednoduchého mnohouholníka alebo jednoducho súvislej oblasti s krivočiarou hranicou) konvergovala postupnosťou korešpondujúcich obsahov k obsahu predmetného rovinného objektu.– Toto je výsledok sformulovaný v jazyku matematickej analýzy 19. – 20. storočia a obvykle uvádzaný vo vysokoškolských príručkách elementárnej euklidovskej geometrie v študijných programoch učiteľstva matematiky pre vyššie triedy sekundárnych škôl. V jazyku *Základov* je výsledok (presne) odhadnutý a potvrdený nepriamym dôkazom. – V zbierkach historických materiálov je niekoľko ukážok Archimedovej sofistikovanej aplikácie tejto metódy na riešenie náročných úloh spadajúcich do tematiky dnešnej vysokoškolskej matematickej analýzy.

Trvale si pamätať:

1. Euklidova priamka je vždy (ľubovoľne predĺžiteľná konečná) hilbertovská úsečka.
2. Euklidova priamka (postulát 1 + postulát 2) je *potenciálne* nekonečno.
   Hilbertovská priamka je *aktuálne* nekonečno.
3. “Číslo“ v *Základoch* je vždy *prirodzené číslo* modernej matematiky.
4. *Základy* nepoznajú číslo 0 ani žiadnu veličinu tejto hodnoty.

5. *Veličina* v *Základoch* - pokiaľ je číslo – je vždy kladné číslo.
6. V *Základoch* sa explicitne nevyskytujú pojmy súvisiace so spojitosťou v zmysle matematickej analýzy.

Záznam z prednášky je dostupný na:
https://www.youtube.com/watch?v=n4e1hZroTGc&t=92s

Literatúra

[1] Euklides: *Základy*, Bratislava, Perfekt a.s., 2022 (preklad a komentáre: Ján Čižmár)

[2] Čižmár, J.: *Pripravuje sa vydanie prekladu diela Euklides: Základy*, – **G**- roč. 18 (2021), č. 36, s. 5 – 22

prof. RNDr. Ján Čižmár, PhD
Astrová 16,
821 01 Bratislava
e-mail: jan.cizmar85@gmail.com

VYSTAČÍ SI KAŽDÝ ZLOMOK S NEPÁRNYMI ČÍSLAMI?

VIERA ČERŇANOVÁ

ABSTRAKT. *Na konferencii som vo svojom príspevku poukázala na istú schopnosť nepárnych prirodzených čísel, a síce generovať podľa zvoleného pravidla (ľubovoľné) kladné racionálne čísla. Pritom nie sú potrebné žiadne osobitné matematické vedomosti, postačí sčitovanie prirodzených čísel a zjednodušovanie zlomkov. Na druhej strane – a možno práve vďaka matematickej jednoduchosti - má v sebe toto „hranie sa so zlomkami“ značný didaktický potenciál. Viac informácií a ďalšiu inšpiráciu môžu záujemcovia čerpať v článku [1]. Príspevok vznikol v rámci projektu KEGA 001UMB-4/2023.*

LITERATÚRA

[1] Viera Čerňanová: *Nepárne čísla v zlomkoch,* Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 98 (2023), No. 2, Praha, Jednota českých matematiků a fyziků, ISSN 0035-9343, pp. 1–6. DML-CZ - Czech Digital Mathematics Library: Nepárne čísla v zlomkoch

RNDr. Viera Čerňanová, PhD.
Katedra matematiky a informatiky
Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity
Priemyselná 4
SK – 918 43 Trnava
e-mail: vieracernanova@hotmail.com

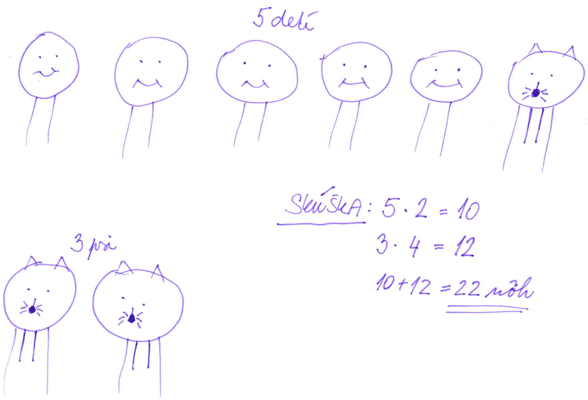
OBRÁZKOVÉ RIEŠENIE SLOVNÝCH ÚLOH

LUCIA CSACHOVÁ

ABSTRAKT. *Vďaka singapurskej technike obrázkového riešenia slovných úloh sa naučili naši študenti učiteľstva matematiky inak nazerať na riešenie slovných úloh a niektorí už potom chceli len kresliť. Príspevok je venovaný obrázkovým riešeniam rôznych slovných úloh zo školskej matematiky.*

Obrázkové riešenie

Základ školskej matematiky predstavuje riešenie matematických úloh. (Špeciálne postavenie majú pritom slovné úlohy.) Niektoré úlohy môžu mať charakter príkladu či cvičenia (rutinné úlohy), alebo matematického problému (nerutinné úlohy). V prípade riešenia rutinných úloh sa väčšinou vyžadujú tzv. školské stratégie (bližšie napr. v Valentová, Csachová, 2020), ktorých osvojenie je jedným z cieľov vzdelávania. Patria sem stratégie aritmetickej cesty, a neskôr algebraickej, z ktorých dominuje rovnicová stratégia. Využitie grafickej cesty[1] je stále málo využívané napriek svojej efektívnosti a názornosti, aj keď sa už prejavuje snaha niektorých učiteľov o využívanie jej stratégií. Príkladom môže byť riešenie úlohy **O deťoch a psíkoch**[2] stratégiou riešiteľský obrázok – Obr. 1.



Obrázok 1: Obrázkové riešenie úlohy O deťoch a psíkoch: Deti išli na prechádzku so psíkmi. Bolo tam 8 hláv a 22 nôh. Koľko tam bolo detí a koľko psíkov? (zdroj: autor, riešenie študentky rozširujúceho štúdia matematiky Petry)

O „špeciálnej forme“ riešiteľského obrázku som sa dozvedela na konferenciách SEMT 2019 či Dva dny s didaktikou matematiky 2020 v rámci dielní pod vedením doc. A. Jančaříka z Pedagogickej fakulty Univerzity Karlovy. Chcem len upozorniť, že niekedy sa využíva pojem metóda riešenia, niekedy stratégia, ale rozumie sa tým to isté, teda spôsob riešenia matematickej úlohy.

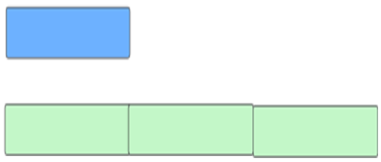
[1] Delenie stratégie do troch skupín (aritmetická, algebraická a grafická cesta) je uvedené v zmysle práce (Přibyl, 2016).

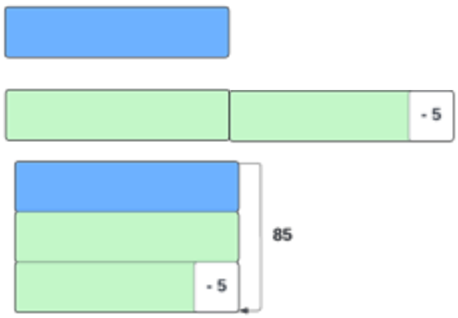
[2] Úloha bola inspirovaná úlohou **O farmárovi a zvieratkách**: *Na dvore farmy boli prasatá a sliepky. Farmár napočítal 23 hláv a 76 nôh. Koľko tam bolo prasiat a koľko sliepok?* a jej obrázkovým riešením, napr. v (Kopka, 2010).

Obrázkové riešenie singapurskou metódou

Začiatkom 80. rokov minulého storočia sa začala objavovať pri riešení slovných úloh grafická riešiteľská metóda tzv. „model drawing“ alebo „bar modelling“.[3] Je založená na kreslení obdĺžnikových pásov, ktoré vyjadrujú vzťah medzi známymi a neznámymi číselnými veličinami a riešenie pomocou týchto pásov. V Singapure až 86 % žiakov primárneho vzdelávania sa učí riešiť úlohy aj takýmto spôsobom. Je možné, že aj vďaka tejto metóde dosiahol Singapur výborné výsledky v meraniach TIMSS alebo PISA. (Metódu používajú napr. aj vo Veľkej Británii.) Cieľom metódy je budovať algebraický prístup k riešeniu úloh už od útleho veku (bez rizika priskorého zavedenia „písmen“ ako neznámych), vytvoriť vzťah medzi číslami bez prílišného zamerania sa na objekty vystupujúce v úlohe a pomocou vizualizácie úlohy riešiť úlohy od jednoduchých až po komplexné. Bližšie informácie napr. v (Bobek).

Princíp metódy stručne vysvetlím na dvoch slovných úlohách. Riešenie prvej slovnej úlohy **O jablkách** je na Obr. 2a: *Anna a Peter majú spolu 24 jabĺk. Anna má trikrát viac jabĺk ako Peter. Koľko jabĺk má Peter?*[4] Počet jabĺk, ktoré má Peter, nepoznám, ale označím si ich obdĺžnikom. Anna má trikrát viac jabĺk, teda obdĺžnik predstavujúci počet jej jabĺk bude trikrát dlhší. (V obdĺžniku je naznačené, že je to trojnásobok „Petrovho“ obdĺžnika.) Celkový počet jabĺk (24 kusov) predstavujú 4 rovnaké „Petrove“ obdĺžniky, jeden teda predstavuje 6 jabĺk. Na Obr. 2b je riešenie druhej úlohy **O veku**:[5] *Ján a Alica majú dnes narodeniny. Ján má o 5 rokov menej ako je dvojnásobok veku Alice. Pred desiatimi rokmi mali spolu 65 rokov. Koľko rokov má Ján dnes?* Vek Alice je znázornený modrým obdĺžnikom, vek Jána dvojnásobkom modrého zmenšený o 5 (rokov). Ak pred 10 rokmi mali spolu 65 rokov, tak teraz majú spolu 85 rokov. Pripočítaním 5 rokov dostaneme 90 rokov, ktoré nám predstavujú tri celé Alicine obdĺžniky. Alica má teda 30 rokov a Ján 55 rokov.





Obrázok 2: Riešenie singapurskou metódou úlohy: a) O jablkách, b) O veku (zdroj: autor)

Obrázkové riešenia vybraných úloh

Uvedené obrázkové riešenie úloh ma veľmi oslovilo a preto sa ho snažím v rámci prípravy budúcich učiteľov matematiky zaradiť do problematiky procesu riešenia matematických úloh. V tejto časti príspevku ukážem obrázkové riešenia štyroch slovných úloh. Dve pochádzajú z testovania T9 (O knihách, O výhre v súťaži), jedna z externej časti maturity (O teste z matematiky) a jedna z matematickej olympiády (O ovečkách a

---

[3] V skutočnosti je táto metóda známa už dávno, len práve vďaka úspechom žiakov zo Singapuru získala takú popularitu.

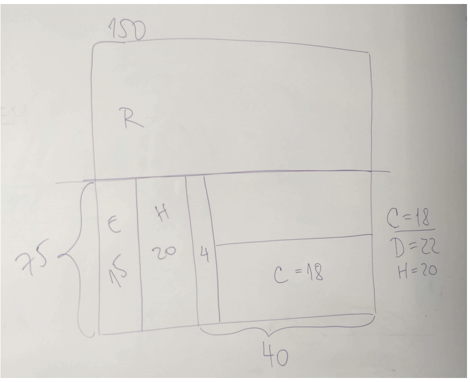
[4] Je to jedna z úloh, ktoré boli riešené na dielňach doc. A. Jančaříka.

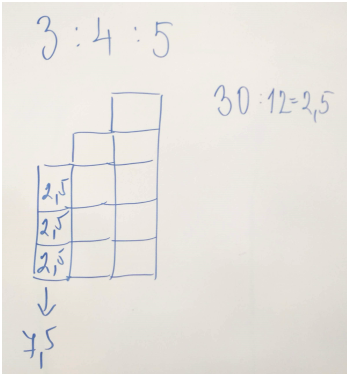
[5] Úloha je z externej časti maturity z matematiky z roku 2019 (testová položka s číslom 02).

pastieroch). Aj keď tieto riešenia (Obr. 1a, b, 2a, b) „vyzerajú“ odlišne ako singapurská metóda, sú ňou veľmi ovplyvnené. Vysvetlenie nechám na čitateľa.

Úloha o knihách (testovanie T9, 2003)**:** *Pán Martin má v knižnici spolu 150 kníh. Roztriedil ich do piatich kategórií. Románov je 75, encyklopédií je 5-krát menej ako románov. Detských kníh má o 4 viac ako cestopisov. V kategórii „hobby“ si nechal 20 kníh. Koľko cestopisov má pán Martin vo svojej knižnici?*

Úloha o výhre v súťaži (testovanie T9 13/2015): *Skupina troch dievčat vyhrala v prírodovednej súťaži 30 eur. Kamila, Magda a Zuzka si výhru rozdelili podľa svojich výkonov v pomere 3 : 4 : 5. Koľko eur získala Kamila a Magda?*

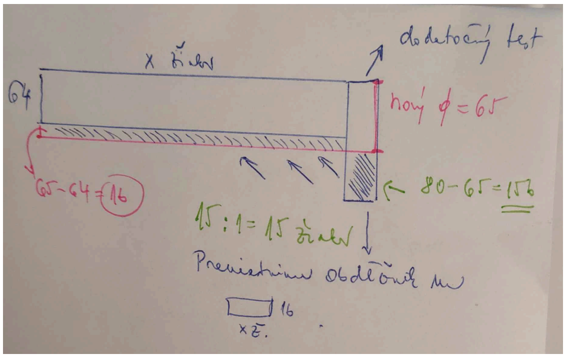


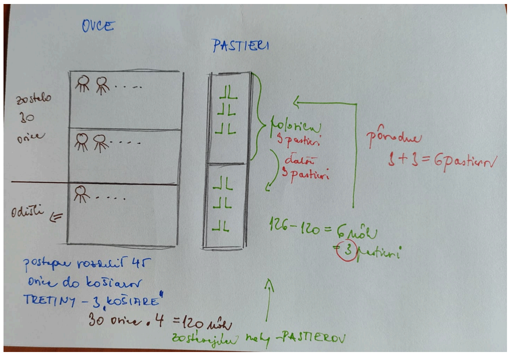


Obrázok 3: Obrázkové riešenie úlohy: a) o knihách, b) o výhre v súťaži (zdroj: autor, a) študentka rozširujúceho štúdia matematiky Vierka, b) študentka denného štúdia učiteľstva matematiky Viki)

Úloha o teste z matematiky (maturita 05/2016): *Žiaci písali test z matematiky. Priemerný počet bodov bol 64. Ďalší žiak dodatočne písal test a napísal ho na 80 bodov. Keby jeho výsledok učiteľ pripojil k pôvodným, celkový priemer by bol 65. Koľko žiakov pôvodne písalo test?*

Úloha o ovečkách a pastieroch (MO Z5, 2022/23): *Na lúke bolo 45 oviec a niekoľko pastierov. Potom ako z lúky odišla polovica pastierov a tretina oviec, mali zvyšní pastieri a ovce spolu 126 nôh. Pritom všetky ovce a všetci pastieri mali obvyklé počty nôh. Koľko pastierov bolo pôvodne na lúke?*





Obrázok 4: Obrázkové riešenie úlohy: a) o teste z matematiky, b) o ovečkách a pastieroch (zdroj: autor, a) študentka rozširujúceho štúdia matematiky Katka, b) študentka rozširujúceho štúdia matematiky Vierka)

Poďakovanie: Ďakujem NIVAM-u za poskytnutie zadaní úloh z testovania T9 a externej časti maturity z matematiky. Ďakujem študentom rozširujúceho i denného štúdia učiteľstva matematiky (Petra, Vierka, Katka, Viki) za obrázky riešení úloh.

Literatúra

[1] Bobek, P.: Bar modely jako způsob reprezentace vztahů a operací ve slovních úlohách, https://matematika-slovni-ulohy.projektsypo.cz/5-bar-modely-jako-zpusob-reprezentace-vztahu-a-operaci-ve-slovnich-ulohach/ (aktuálne 30.10.2023)

[2] Csachová, L. : Efektívne riešenie slovnej úlohy nekončí odpoveďou, In Slavíčková, M. (ed.): Dva dni s didaktikou matematiky 2022, zborník, Univerzita Komenského v Bratislave: FMFI, 11-18.

[4] Csachová, L., Matejčiková, L..: How To Improve Pre-Service Mathematics Teachers' Problem-Solving Competencies (Case Study), Technium Social Science Journal 48(October): 82-98.

[2] Kopka, J.: Ako riešiť matematické problémy. Ružomberok: Verbum, 2010.

[3] Přibyl, J.: Řešení matematických úloh na druhém stupni ZŠ pomocí heuristických strategií, dizertačná práca, Univerzita Karlova: PedF 2016.

[4] Valentová, L., Csachová, L.: Stratégie riešenia školských úloh, Obzory matematiky, fyziky a informatiky 3/2020 (49), 1-9.

RNDr. Lucia Csachová, PhD.
Katolícka univerzita v Ružomberku
Pedagogická fakulta
Hrabovská 1
SK – 034 01 Ružomberok
e-mail: lucia.csachova@gmail.com

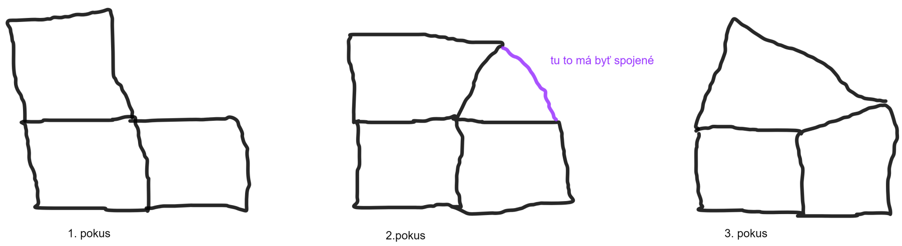
2D KONTRA 3D. KOCKA NIE JE SAMOZREJMOSŤ

MONIKA DILLINGEROVÁ

ABSTRAKT. *Priestorová predstavivosť je fenomén, ktorým sa nielen matematici zaoberajú už celé stáročia. V našom článku poukazujeme na to, koľko predstavivosti potrebuje žiak aby videl v učiteľovom náčrte telesa to, čo učiteľ zobraziť chcel. Predstavíme jednoduchú aktivitu s kockou.*

Vývoj predstáv o kocke

Už malé deti sa hrávajú s drevenými kockami. Ak by sme však poprosili päťročného, aby nakreslil kocku, čo by sa asi stalo? Môj syn ma požiadal v uvedenom veku, aby som mu nakreslila kocku. Ja som úlohu otočila a dala mu kocku do ruky. Nakresli, čo vidíš. Na papieri vznikol jeden štvorec, potom sa k nemu pripojil druhý a tretí. Syn sám skonštatoval, že to nie je dobre. Na druhý deň sa obrázok začal mierne deformovať a pribudla čiara „tu to má byť spojené“. Na tretí deň už boli dva pôvodné štvorce veľmi deformované. Syn však nebol spokojný.



Obrázok 1: Postupne vznikajúce obrázky kocky

Dúfala som, že ďalší deň budeme pokračovať. Lenže syn prišiel zo škôlky a víťazoslávne mi ukazoval papier plný rôzne veľkých farebných kociek, ktoré mu nakreslila pani učiteľka.

Ak by sme chceli zhrnúť, čo vie dieťa o kocke v závislosti od veku, začali by sme od päťročných. Pre nich je kocka jasne rozpoznateľná, ale nie je nakresliteľná.

Tieto vedomosti sa v škole rozvíjajú a upravujú. Osemroční okrem toho, že kocku jasne rozpoznávajú v jej 3D forme, ju rozpoznajú aj nakreslenú a naučili sa tento obrázok reprodukovať. Tak isto vedia porovnávať veľkosti kociek.

Žiak v piatej triede sa stretáva so stavbami z kociek a jeho predstavy sa rozširujú o rozmery kociek a tiež o pojem jednotková kocka. Tieto vedomosti v šiestom ročníku rozšír o povrch a objem kocky.

Pri ukončení základnej školy má (mať) všetky predchádzajúce vedomosti zautomatizované a dokonca by mal vedieť spočítať aplikačné úlohy využívajúce stenovú, či telesovú uhlopriečku.

Na strednej škole prídu rezy telies, a teda aj kocky. Tu už máme často žiakov, ktorí tvrdia, že to tam „nevidia“. Je to pre nich rovnaké, ako pre deviatakov vidieť v obrázku, ktorý sme nakreslili na tabuľu pravidelný osemsten. Kde sa táto „chyba zraku“ berie? Súvisí s používaním nám známych obrázkov bez toho, aby si to žiaci naozaj vedeli chytiť, ohmatať.

Nakoniec tu máme skupinu budúcich učiteľov matematiky na univerzite, pre ktorých je kocka samozrejmosťou. Všetky vedomosti o kocke má plne zautomatizované, nevidí žiaden problém v obrázku kocky a myslí si, že už ho nič neprekvapí. Našou úlohou je tohto študenta vrátiť a ukázať mu, že kocka nie je samozrejmosť. Za týmto účelom sme vytvorili aktivitu, ktorú už viac ako 25 rokov používame vo výuke budúcich učiteľov matematiky. Jej zjednodušenú formu sme úspešne použili aj v šiestom ročníku základnej školy.

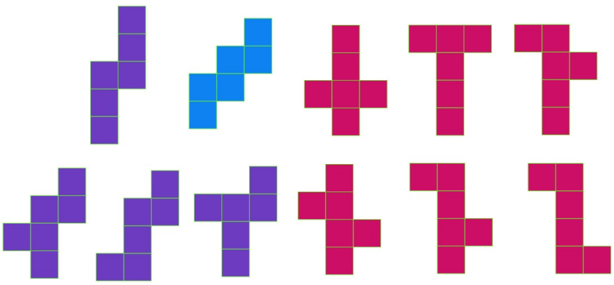
Aktivita s kockou

Našu aktivitu začíname so študentmi troškou teórie o sieťach kociek. Celá teória je vedená dialogickou metódou. Študenti už vedomosti majú, niektoré treba zopakovať. Rozprávame sa o tom, že povrch tvoria štvorce, je ich šesť a ich zoskupenie do jedného mnohouholníka, z ktorého sa iba prehýbaním dá poskladať kocka, nazývame sieť kocky. Výhodnou pomôckou je softvér mathigon (https://mathigon.org). V ňom sa jednoducho dá vytvoriť zo 6 štvorcov sieť kocky a pomocou spojenia týchto 6 štvorcov sa potom dá dynamicky ukázať poskladanie kocky. Než však začneme ukazovať kreslenie sietí, alebo hotové siete kociek, necháme študentov nejaké nakresliť na tabuľu. Následne kladieme ďalšie otázky:

Prečo o niektorých sieťach hovoríme, že majú dĺžku 4 a iné dĺžku 3?

Aké existujú dĺžky sietí?

Koľko je rôznych sietí kocky? (Dve siete sú rovnaké, ak existuje os, podľa ktorej sú súmerné, alebo sa dá jedna do druhej otočiť.)

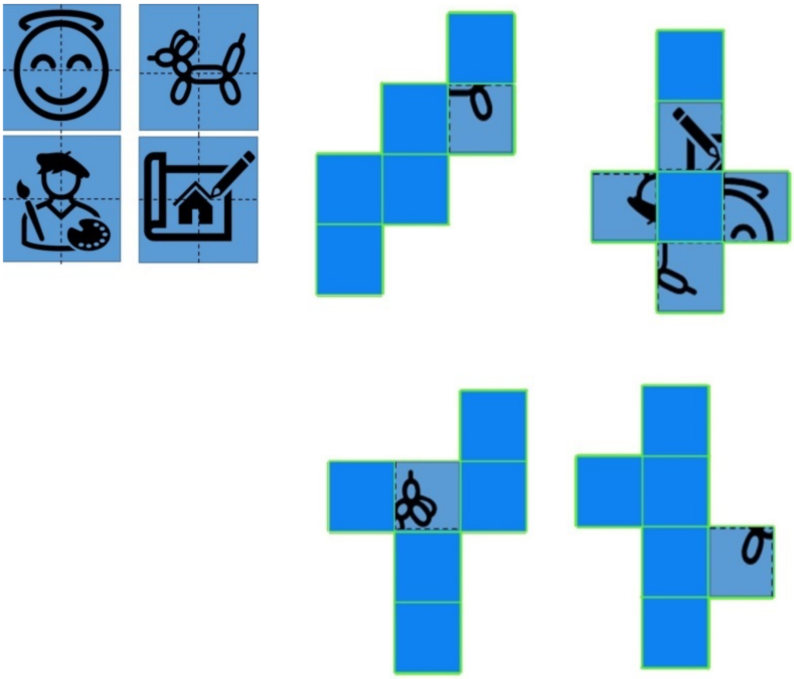


Obrázok 2: Siete kocky (https://mathigon.org/polypad/b638MojFatvYWQ)

Obrázok 3: Postupné skladanie kocky

Obrázok 4: Detské obrázkové kocky, vyrobené obrázkové kocky a kartónové makety štvorca

Pre žiakov základnej školy sme sa v rámci tohto úvodu snažili na základe modelu kocky, ktorý mali v rukách nakresliť niekoľko sietí kocky. Následne sme začali s aktivitou samotnou.



Obrázok 5: Pripravené obrázky a učiteľom nalepené časti

Študentov (žiakov) rozdelíme do skupín po 3 – 4. Menšie skupiny majú lepšiu dynamiku. Každá skupina potrebuje k aktivite 4 výkresy, ceruzku, lepidlo (odporúčame tyčinkové), nožničky a reklamné letáky z ktorých bude vyberať obrázky. Učiteľ by mal navyše mať pripravené makety štvorca so stranou dĺžky 4 – 5 cm. Osvedčilo sa nám používať zvyšky kartónu zo spoločenských hier. Okrem toho by mal mať detské obrázkové kocky alebo už skôr urobené kocky aj s obrázkami, na ktorých vie demonštrovať, čo majú skupiny vytvoriť.

Kocky budú mať tú vlastnosť, že po preklopení jednotlivých radov cez hranu sa na vrchu objaví dobre zložený ďalší obrázok.

Skupiny začnú svoju prácu tým, že si na výkresy zaznačia 4 rôzne siete kocky. Od študentov žiadame, aby aspoň jedna bola dĺžky dva, aspoň jedna dĺžky tri a aspoň jedna dĺžky štyri. Siete iba kreslia, v žiadnom prípade nevystrihávajú. Potom vyberú z letákov vhodné štvorcové obrázky skladajúce sa zo štyroch štvorcov každý, naznačia si ich delenie na štvorce a rozstrihnú ich pozdĺž deliacich čiar. Učiteľ ich požiada, aby mu pripravili „pravý horný roh“ každého obrázka a zvyšné 3 štvorce jedného obrázka. Následne učiteľ príde k jednotlivým skupinám a nalepí pripravené štvorce na siete. Pritom lepí „pravý horný roh“ na jednu sieť tak, aby obrázky nadväzovali. Teda kocka po zlepení a preklápaní sa vždy preklopí na nový obrázok, ktorý bude rovnako orientovaný, ako predošlý.

Úlohou skupín je najprv nalepiť zvyšné časti obrázkov, až potom si pomocou vystrihnutia siete a zlepenia kociek overiť, či úlohu vyriešili správne.

Záver

Napriek tomu, že študenti mali pocit, že kocka je samozrejmosť, táto aktivita spájajúca 2D zobrazenie 3D objektu pre nich je zaujímavá a náročná. Samozrejme sa vždy nájdu jedinci, ktorým to nerobí žiaden problém. Tým je treba vymyslieť náročnejšie zadanie. Napríklad na každú sieť nalepiť iba dve časti obrázkov. Treba si však dobre premyslieť ktoré dvojice a kam. Študenti budú musieť navyše zisťovať, ako je vytvorený cyklus 4 za sebou idúcich obrázkov. Odporúčame mať takéto zadanie predpripravené. Rovnako je možné prvotné umiestnenie urobiť jednoduchšie, než je prezentované na obrázku 5. Prípadne sa dá pracovať s obvyklejšími sieťami (dĺžky 4), alebo obrázkami symetrickými podľa dvoch na seba kolmých osí.

V ostatných skupinách študentov a aj žiakov dochádza pravidelne k živej gestikulácii, prelepovaniu už nalepeného, dohadovaniu, argumentácii a dôvodeniu. Zaujímavým javom je uvedomenie si, že skladať imaginárnu kocku musia opačne. Doteraz vytvárali kocku nad papierom a to by mali obrázky zvnútra. Častým je aj vyjadrenie: „Keby sme si to mohli vystrihnúť.“ Žiaci získajú lepšiu predstavu o kocke a študenti si uvedomia, že naozaj nakresliť 3D objekt na tabuľu nestačí na to, aby vznikol aj 3D obraz v mysli, čo je našim cieľom.

Literatúra

[1] Brincková J., Uherčíková, V., Vankúš P.: *Netradičné metódy rozvíjania predstavivosti v matematike*, Bratislava, KEC FMFI UK, 2013

[2] Molnár, J. 2009. *Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) v stereometrii.* Olomouc, PF UP, 2009

[3] Slezáková, J.: *Geometrická představivost v rovině.* (Disertační práce),Olomouc, Přírodovědecká fakulta, 2011

[4] Tomková, V. 2008. Rozvíjanie priestorovej predstavivosti v školskej praxi. In: *Zborník Technické vzdelanie ako súčasť všeobecného vzdelania.* Banská Bystrica, FPV UMB, 2008. ISBN 978-80-8083-721-1.

[5] Tomková, V. Rozvíjanie technickej predstavivosti a technickej tvorivosti v technickom vzdelávaní. In: *Zborník Education and Technics.* Nitra, PF UK, 2009. s. 297 – 304. ISBN978-80-8094-520-6.
[6] Uherčíková, V.: Rozvíjanie priestorovej predstavivosti prostredníctvom hier a hračiek. In: *Zborník z odborného seminára: Hra a hračka.* Bratislava, Iuventa 1999.

RNDr. Monika Dillingerová, PhD.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského
Mlynská dolina F1
842 48 Bratislava
e-mail: dillingerova@fmph.uniba.sk

UČIŤ MATEMATIKU AKO CUDZÍ JAZYK

JOZEF HVORECKÝ

ABSTRAKT. *Úspešne riešiť matematické úlohy nie je možné bez toho, aby sme im porozumeli. V istom zmysle ide o obdobu porozumeniu cudzieho jazyka: jeho neúplné chápanie má rôzne podoby – od drobných omylov až úplné stratenie sa. Dajú sa niektoré skúsenosti z vyučovania cudzích jazykov využiť aj vo vyučovaní matematiky?*

Vzťah matematiky a cudzieho jazyka

Pohľad na názov článku môže u čitateľa vyvolať skepsu: *Čo majú spoločné matematika a cudzí jazyk?* Preto je vhodné najprv vysvetliť ich vzájomný vzťah ako analógiu, ktorú budeme v ďalších častiach využívať.

Pre účely článku považujeme za cudzí jazyk ten, ktorý sa cielene učíme. Tým sa líši od materinského jazyka, ktorý nadobúdame dennou komunikáciou v prostredí, v ktorom sa v detstve pohybujeme. (Človek môže mať viac ako jeden „materinský“ jazyk, keď napríklad vyrastá v cudzej krajine, pričom jeho rodičia doma rozprávajú rodným jazykom.)

Neporozumenie cudziemu jazyku má dve základné roviny:

- V syntaktickej rovine nerozumieme zápisu jazyka.
- V sémantickej rovine nerozumieme obsahu.

Obidve roviny majú ďalšie vnútorné členenie. Na úrovni syntaxe nemusíme zápisu jazyka rozumieť preto, lebo použitá symbolika je úplne neznáma, napríklad egyptské hieroglyfy, čínske znaky alebo arabská abeceda. Textu však často nerozumieme ani vtedy, keď je zapísaný známymi symbolmi. Nápisy v španielčine či fínčine dokážeme „prečítať“, lebo sú napísané latinkou, ale ich obsahu nerozumieme. Človek bez vyššieho matematického vzdelania preto netuší, či je nasledujúca formula správna alebo nie:

$$\sum_{n?34}^{t=\infty} \int_{\sin °\mathrm{F}}^{\emptyset} \exists x = 4 - \lim_{6!} x$$

Nechápe totiž význam jednotlivých symbolov podobne ako bez znalosti fínčiny nedokážeme odhaliť gramatickú chybu vo fínskom nápise.

Syntaktická chyba je spôsobená nekorektnými dátami (nevhodne použitými symbolmi) alebo chybnej stavby textu. Príkladom nevhodne použitých symbolov v predchádzajúcej ukážke sú Fahrenheitove stupne a otáznik. Príkladov chybnej stavby je veľa, napríklad symbol sumy je uvedený bezprostredne za symbolom integrálu či faktoriál pod znakom limity. Jeho analógiou v prirodzenom jazyku je brept.

V matematike sa dajú vytvoriť aj výrazy, ktoré sú síce syntakticky správne, ale neinterpretovateľné, napríklad (-6)! Predstavujú hranicu medzi syntaktickými a sémantickými chybami.

Sémantické chyby sú spôsobené zápismi, ktoré sa napohľad správne, ale majú iný ako zamýšľaný obsah. Text je zdanlivo (t. j. syntakticky) správny, bezchybný – vyjadruje však inú myšlienku než aká chcel do neho vložiť autor. Napríklad 26 – 11 je zdanlivo správny (zmysluplný, interpretovateľný a vykonateľný) zápis, nevyjadruje však myšlienku „zväčši 26 o 11“. Ak ten, kto zápis vytvoril, chcel číslo 26 zväčšiť, dočká sa nepríjemného prekvapenia. Analógiou sémantickej chyby v prirodzenom jazyku je veta zo slov, ktoré síce patria do slovnej zásoby a majú predpokladanú vetnú stavbu, ale zahmlievajú alebo podstatne menia obsah výroku. Tu je príklad:

„Viac korenia nevidí mier v duši králika."

Chyby tohto typu často vznikajú pri písomnej komunikácii cez mobilné telefóny ako dôsledok absencie diakritiky:

„Kvoli kriku nespozoroval prichadzajuce auto." (Kvôli kriku alebo kvôli kríku?)

Syntaktické a sémantické nepresnosti nám dovoľujú rýchlo spoznať cudzincov. Pokiaľ ovládajú jazyk dokonale, spoznáme ich podľa nesprávneho prízvuku. „Všetko" je správne, líšia sa iba málo podstatné detaily, ktoré nemajú vplyv na výsledok. Analógiou nesprávneho prízvuku v matematike tomu zodpovedá nezvyklý, u nás málo používaný spôsob riešenia. Povedzme indický spôsob násobenia dáva rovnaké výsledky, ale jeho postup je mierne odlišný [1].

V článku si všímame len chyby na syntaktickej a sémantickej úrovni a spôsoby ich odstránenia. Ten, kto robí „chyby pri prízvuku", nie je v danej oblasti cudzincom. Ovláda matematiku, len občas sa vyjadruje inak ako jeho okolie. Opäť použijeme analógiu: prízvuk mnohých Slovákov býva ovplyvnený ich pôvodným nárečím, nijako ich to však spoločensky nediskvalifikuje.

Budeme si všímať spoločné vlastnosti jazyka a matematiky [2]:

- *Využívanie abstrakcie*: Pod pojmom „obdĺžnik" si v matematike predstavujeme ľubovoľný pravouholník s istými vlastnosťami. V jazyku robíme podobné zovšeobecnenie pri väčšine slov, napríklad „jabloň".
- *Zaužívané, štandardizované pravidlá*: Takýmto pravidlom je napríklad poradie operandov pri odčítaní. Zápis „74 – 12" znamená niečo iné ako „12 – 74". Podobne je sa prídavné meno píše v slovenčine pred podstatným menom, kým vo francúzštine je poradie opačné.
- *Lineárnosť*: Pôvodný jazyk matematiky bol rovnako lineárny ako písaný text v prirodzenom jazyku. Neskoršie odchýlky od vznikla ako snaha o zostručnenie komplikovaných konštrukcií – typický rozdiel vidieť napríklad pri zápise určitého a neurčitého integrálu. Určitý integrál obsahuje aj znaky mimo hlavnej línie, ktoré dopĺňajú a spresňujú jeho význam. Podobnú úlohu hrá v slovenčine diakritika.
- *Potreba pamätania si*: Používané pravidlá sú komplikované, preto si ich treba pamätať veľmi dôsledne, aby pre bežnom používaní jazyka, resp. matematiky prichádzali na um okamžite, bez potreby sústrediť sa. Ich zapamätanie a „automatické" používanie je indikátorom hĺbky ich osvojenia.
- *Kódovanie a dekódovanie*: V prípade nejasností používateľ „prekladá" svoju myšlienku do cudzieho jazyka (resp. do jazyka matematiky) postupne a premyslene tak, aby si bol istý zhodou medzi originálom a novovytvorenou podobou.
- *Udržateľnosť*: Iba poznatky, ktoré pravidelne používame, si dlhodobo pamätáme. Sú známe prípady jedincov, ktorí žili tak dlho v cudzine, že zabudli rodný jazyk. Tým sa dá vysvetliť, prečo matematické základné znalosti (aritmetické operácie) ovláda v podstate každý. To isté platí aj pre často používané zručnosti (odhad vzdialenosti).

Čo robí matematiku cudzím jazykom?

Z uvedeného je jasné, že cudzí jazyk a matematiku spájajú predovšetkým nasledujúce vlastnosti:

- Slúži na prenos informácií v podobe, ktorú prijímateľ nenadobudol ako súčasť svojho primárneho sociálneho vývoja.
- Má vlastný slovník, pravidlá zápisu, gramatiku a štruktúru viet odlišnú od rodného jazyka.
- Používaním sa utvrdzujú, nepoužívaním sa strácajú.

Využívanie vzťahu medzi cudzím jazykom a matematikou nie je novinkou ani v našich končinách [3, 4].

Pre nasledujúcich úvahách sa budeme opierať najmä o poslednú z uvedených spoločných vlastností – dlhodobú udržateľnosť. Správanie začiatočníka v jazyku identifikujeme ľahko:

- Nepozná presné pojmy, terminológiu, často ani „abecedu“ (znaky), štruktúra viet mu robí problémy.
- Dúfa, že prijímateľ bude rešpektovať medzery v jeho vedomostiach.
- Snaží sa vniesť do komunikácie pojmy a štruktúry, ktoré pozná – hoci nie sú v danej chvíli vhodné. V dobrej viere vnáša prvky (pojmy a štruktúru) z rodného jazyka do cudzieho.
- Hľadá alternatívne spôsoby doručenia správy (rozhovor „rukami-nohami“).

Základy matematiky ovláda veľa detí v predškolskom veku. Už vtedy treba začať s propedeutikou, aby prvé poznatky prichádzali podvedome, v čase, keď dieťa intuitívne vstrebáva všetko, s čím sa stretne. Poznatok, ktorý prichádza cielene („Žiaci, ideme preberať novú látku ...“) a je sprevádzaný zákazmi („Používanie pomôcok je zakázané budem ho trestať.“) prináša stres [5].

Všimnime si, ako sa dá naučenie uľahčiť:

- Dieťa vie, že „dva a dva sú štyri“. Ak však začneme vynucovať používanie „plus“ bez alternatív, narušíme už aj to málo, čo z matematiky pozná. Zaraďovať nové pojmy preto treba opatrne. V cudzom jazyku tiež najprv učíme najjednoduchšie, denne používané frázy v bežnom hovorovom jazyku.
- Nejaký čas treba tolerovať aj nesprávnu terminológiu alebo formát zápisu, pokiaľ nevedú k nedorozumeniu a je jasné, že zámer a myšlienka žiaka sú správne. Typickým príkladom je počítanie na prstoch, bežné pri prechode z najjednoduchších matematických úkonov k zložitejším. V danom prípade je dôležité ukázať, že memorovanie je síce v danej chvíli náročnejšie riešenie, ale v budúcnosti šetrí čas. Aj v cudzom jazyku sa oplatí naučiť sa často používané frázy naspamäť krátko predtým, ako pôjdeme do prostredia, v ktorom môžeme očakávať ich, že ich budeme potrebovať.
- Treba oceňovať aj neúspešné pokusy a hľadať v nich racionálne jadro. Len tak sa dá dozvedieť, z čoho nedorozumenie vzniklo – a teda nájsť aj spôsob, ako ho odstrániť. Každého z nás poteší, keď cudzinec vynaloží všemožné úsilie, aby nám porozumel.
- Je vhodné sústreďovať sa na riešenia úloh, s ktorými sa žiak v budúcnosti stretne s vyššou pravdepodobnosťou. Ako sme uviedli vyššie, zároveň tým zvýšime šance na to, že žiak si riešenie dlhodobo zapamätá. Nie je najšťastnejšie začínať výučbu matematiky na každej vysokej škole integrálnym a diferenciálnym počtom. V ich rýdzej podobe ich bude len málokto potrebovať. Vhodnejšie by bolo začať časťami, ktorých užitočnosť je očividná. Očakávať, že každý bude vedieť všetko, je naivné a z hľadiska výsledkov vzdelávania nereálne.

Úlohy využívajúce nematematické poznatky

Ak chceme učiť matematiku ako cudzí jazyk, musíme vytvoriť inšpiratívne prostredie. Budeme síce používať rodný jazyk, ale matematika v ňom bude „prímesou“. Presnejšie povedané, nebude bezprostredne prítomná. Ako ukážeme v nasledujúcej kapitole, matematické úlohy sa často vynoria v situácii, keď riešime niečo, čo s matematikou zdanlivo nesúvisí.

Pri vhodnej voľbe prostredia žiaci zistia aj to, že nie všetko, čo sa podobá na matematiku, ňou naozaj je. Tu je séria takýchto kontextovo-závislých úloh (voľne podľa [6]):

Na konci obce stojí nová ulica s 12 domami. Prvý dom stojí 113 000 € a je 11 m vysoký. Býva v ňom 9 ľudí, piati z nich práve spievajú 3 piesne. Odpovedzte na nasledujúce otázky:

- *Aká je celková cena domov?*
- *Koľko sú vysoké?*
- *Koľko ľudí v nich žije?*
- *Aká dlhá je ulica?*
- *Koľko ľudí z danej ulice práve teraz spieva?*

Riešenie každej z nich si vyžaduje viac než iba matematické poznatky – a žiaden výsledok sa nedá vyrátať presne. Ani vtedy nie, keby domy boli takmer rovnaké.

Ďalšou výhodou úloh z tejto oblasti je možnosť riešiť ich tímovo. Pretože sa dajú odlišne interpretovať, je pravdepodobné, že každá vyvolá medzi členmi skupiny diskusiu. Počas nej sa (neformálne) dozvedia o riešiteľnosti viac, ako im je učiteľ schopný povedať za desaťnásobok času.

Z pohľadu učenia matematiky je dôležité, že – hoci používajú rodný jazyk – podobne ako pri používaní cudzieho jazyka zistia potrebu presného vyjadrovania. To, že nie všetko, čo znie ako „matematičtina“ ňou naozaj je.

Príklad z trojrozmernej geometrie

Ostravská univerzita spolu so štyrmi univerzitami z ďalších krajín rieši problém Erasmus+ zameraný na 3D modelovanie a 3D tlač. Jeho cieľovou skupinou sú budúci pedagógovia. Aby ich zameranie bolo čo najpestrejšie, plánujeme využívať prístupy založené na STEAM, pričom by si pri nich mali študenti každej z oblastí S (prírodné vedy), T (technológie), E (ekonómia), A (umenie), M (matematika) nájsť vlastné uplatnenie a zároveň sa dozvedieť veľa o ostatných oblastiach. Tomu musí zodpovedať zameranie riešených úloh. Tu je príklad:

Naša škola organizuje športovú súťaž a chce troch najlepších v každej kategórii. Navrhnite a vytvorte dostatok zlatých, strieborných a bronzových medailí.

Ide o rozsiahle zadanie s veľkým počtom podúloh. Ťažko očakávať, že niekto dokáže zvládnuť všetky z nich. Ide teda o námet na tímový projekt. Členovia tímu by mali zvládnuť prinajmenšom nasledujúce úlohy:

i. Určiť ekonomickú a časovú náročnosť úlohy: počty medailí, druhy a množstvo materiálu. To ú typické úlohy pre prírodovedca, ktorý vyberie vhodný materiál, a ekonóma, ktorý rozhodne o jeho dostupnosti a cenovej náročnosti.

ii. Manažér preverí, či sa požiadavky organizátorov súťaže dajú za daných podmienok splniť. Ak áno, bude dohliadať na plnenie harmonogramu a koordinovať jednotlivé činnosti.

iii. Umelec navrhne podobu medailí. Technológ preverí, či je možné ich vyrobiť vzhľadom na ich predpokladanú veľkosť, kvality materiálu a výrobný čas. Ak nie, treba vytvoriť vhodnejší návrh.

iv. Umelec a matematik spolu navrhnú trojrozmerný geometrický model. Matematik a technológ ho upravia do podoby vhodnej pre tlač na 3D tlačiarni.

Za každou z uvedených aktivít sa skrýva niektorá časť matematiky. V bode I ju treba použiť na výpočet ceny sady medailí. Jej optimalizácia je problémom z oblasti lineárneho programovania. V bode II sa skrýva vytvorenie vhodného postupu prác, povedzme pomocou vývojového alebo Ganttovho diagramu. Bod III ukazuje, že aj umelecká sloboda musí mať určité hranice. Tvar medaily sa musí dať namodelovať pomocou nástrojov priestorovej geometrie – inak sa nebude dať vytlačiť. Bod IV ukazuje, že to nie je jediné obmedzenie. Tlač na 3D tlačiarňach je pomalá, takže môže zaviniť nesplnenie termínu odovzdania.

Pre účely tohto článku je podstatné aj to, že v každej etape projektu sa skrýva matematika: lineárne programovanie, vývojové diagramy, priestorová geometria, odhad dĺžky trvania etapy a podobne. Pre tímové projekty je typický fakt, že neočakávame, že každý člen tímu bude mať všetky potrebné vedomosti a zručnosti. Úspech sa však dostaví len vtedy, ak súhrn vedomostí a zručností tímu (ako celku) ich bude obsahovať. Navyše, členovia tímu sa budú musieť o nich vzájomne informovať a dopĺňať si ich, aby zabezpečili vzájomné porozumenie – predpoklad spolupráce a úspechu.

Krajina, v ktorej sa rozpráva matematicky

Ak chceme učiť matematiku podobným spôsobom ako cudzí jazyk, musí existovať adekvátne prostredie – krajina, kde sa hovorí matematicky. Predchádzajúci príklad tvorby medailí ukazuje, že v danej krajine sa môže súčasne rozprávať aj ďalšími jazykmi: umeleckým, ekonomický, technologickým, ...

Úspech sa dostaví iba vtedy, keď sa jedinci rozprávajúci jednotlivými jazykmi, budú snažiť povedať svoje posolstvá tak, aby im rozumeli aj ostatní. Pritom nemusia uvádzať všetky detaily a špecifické postupy. Musia však vedieť vysvetliť ich zmysel a plánovaný cieľ. Jedná sa teda o formu kolaboratívneho učenia v podobe, v akej sa vyskytuje aj v bežnom živote – nikto nemusí vedieť všetko, ale každý by mal vedieť, na koho sa obrátiť s problémom, ktorý chce vyriešiť.

Koniec-koncov, ani z cudzieho jazyka nemusíme vedieť všetko. Mali by sme však vedieť dosť na to, aby sme sa nestratili.

LITERATÚRA

[1] Hejného metóda: https://blog.h-mat.cz/didakticka-prostredi/indicke-nasobeni, blog bez dátumu.

[2] Wakefield, D.: Se Habla Mathematics? Consideration of Math as a Foreign Language, 1999.

[3] Hofmannová, M., Novotná, J., & Pípalová, R.: Assessment approaches to teaching mathematics in English as a foreign language (Czech experience). International CLIL Research Journal, 2008, 1(1), 20-35.

[4] Prochazkova, L. T.: Mathematics for Language, Language for Mathematics. European Journal of Science and Mathematics Education, 2013, 1(1), 23-28.

[5] Lauková, P.: Hygiena edukačného procesu. Paedagogica, 2020. roč. 32, str. 69-87

[6] Hvorecký, J.: Nonsense to Sense: A Way to Critical Thinking Development. Proceedings of ICETA 2019, Starý Smokovec, 2019, str. 268-273

[7] Hvorecký, J., Schmid, A.: Developing Prerequisite Knowledge for 3D Modelling and 3D Printing. Proceedings of ICETA 2023, Technická Univerzita Košice, 2023, str. 220-224.

Prof. RNDr. Jozef Hvorecký, PhD.
Pedagogická fakulta
Ostravská Universita
Fráni Šrámka 3
CZ – 70002 Ostrava – Mariánske Hory

e-mail: Jozef@Hvorecky.cz

BUDÚCI UČITELIA A ICH PREDSTAVY O DÔVODENÍ A ARGUMENTÁCII

KATARÍNA JÁNOŠKOVÁ

ABSTRAKT. *Cieľom príspevku je opísať myšlienky a názory budúcich učiteľov matematiky na úlohu argumentácie a dokazovania na hodinách matematiky. Údaje boli zozbierané prostredníctvom pološtruktúrovaného skupinového rozhovoru. Výsledky poukazujú na to, že učitelia matematiky pred nástupom do zamestnania si uvedomujú potrebu zdôvodňovania, majú vedomosti o rôznych formách zdôvodňovania a zaujímajú sa o rozvoj komplexného matematického myslenia s prepojením na reálne využitie, ale chýba im istota v zdôvodňovaní počas vyučovacích hodín.*

Úvod

Dôležitou súčasťou matematiky je zdôvodnenie a dôkazy. Oficiálne kurikulárne dokumenty na Slovensku nekladú veľký dôraz na argumentáciu. Stručné odporúčanie nájdeme v úvodných častiach a cieľoch vyučovania matematiky na základných a stredných školách [1]. Príprava budúcich učiteľov matematiky (BUM) na Univerzite Komenského, Fakulte matematiky, fyziky a informatiky kladie dôraz na dôvodenie a dokazovanie. Výrazne sa zaoberá dokazovaním na bakalárskom študijnom programe (na predmetoch vyššia algebra, matematická analýza a geometria). Magisterský program je pre nich zameraný viac na rozvoj didaktickú znalosť obsahu (podľa Shulmana [2]) a odborovú didaktiku (podľa Ball a kol., [3]).

Metodológia

Našu výskumnú vzorku tvorilo 15 BUM prvého ročníka magisterského štúdia v programe Učiteľstvo matematiky v kombinácii s jedným z nasledujúcich predmetov: fyzika, informatika, geografia, deskriptívna geometria, telesná výchova. Tento program je spoločný pre 4 fakulty na Univerzite Komenského v Bratislave a v našej výskumnej vzorke boli 3 respondenti z Prírodovedeckej fakulty a 12 z Fakulty matematiky, fyziky a informatiky.

Na zber údajov sme použili pološtruktúrovaný rozhovor. Pološtrukturovaný rozhovor zahŕňal 4 hlavné oblasti záujmu: (a) oboznámenie sa s národnými učebnými osnovami matematiky, (b) predstavy o argumentácií a dokazovaní, (c) zdroje v kontexte plánovania hodín, (d) komunikácia s kolegami. Otázky vo všetkých uvedených oblastiach boli zamerané na vyučovanie v ročníkoch 5 ZŠ až 1 SŠ (vek 10 až 16 rokov). Do úvodnej časti rozhovoru sme zaradili "zahrievacie otázky" o skúsenostiach BUM s učením vo všeobecnosti a konkrétne s matematikou. Z dôvodu realizácie rozhovorov v rovnakom čase sme žiakov rozdelili do 4 skupín podľa preferencií žiakov (3 skupiny po 4 žiakoch a 1 skupina po 3 žiakoch). Každá skupina bola pridelená jednému zo 4, ktorí uskutočnili a nahrali rozhovor s pridelenou skupinou.

Rozhovor sa uskutočnil 27. septembra 2022 na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave. Každý výskumník rozhovor nahrával (pomocou MS Teams - videozáznam, mobilný telefón - zvukový záznam, v prípade, že nahrávanie prostredníctvom MS Teams nebolo dobre zrozumiteľné). Dvaja z respondentov boli vzhľadom na osobné okolnosti online. Rozhovory boli prepísané. Prepisy boli analyzované metódou otvoreného kódovania podľa Creswella [4].

Na spracovanie a analýzu údajov sme použili bežný textový a tabuľkový editor. Každý zo štyroch výskumníkov nezávisle kódoval každú otázku a potom všetci štyria porovnali kódovanie, aby sa zabezpečila triangulácia. Diskusiou boli vytvorené konečné spoločné kódy.

Výsledky

Názory BUM na dôvodenie a dokazovanie boli väčšinou pozitívne. Zistilo sa to aj pri otázkach týkajúcich sa predstavy BUM o ich vyučovaní. Viac ako polovica (8) sa vyjadrila, že by chceli podporiť matematické myslenie svojich žiakov:

Keď sme sa respondentov priamo pýtali na význam dôvodenia a dokazovania vo vyučovaní, všetci (15) respondenti uviedli, že na hodinách matematiky je potrebné používať argumentáciu, ale nie každý z nich túto myšlienku bližšie vysvetlil. Ako vidíme v tabuľke 1, respondenti sú pozitívne orientovaní na zdôvodňovanie, ale zároveň uvádzajú aj určité zdôvodnenie, prečo je potrebné.

	V1	**V2**	**V3**	**V4**	**Počet odpovedí**
Dôvodenie je potrebné	3	4	4	4	15
Dôvodenie je potrebné s dôvodením	1	1	2	3	7
Dôvodenie, ale (forma limitácie)	2	3	2	3	10

Tabuľka 1:Dôležitosť dôvodenia a dokazovania

Spomínajú zdôvodnenie ako formu motivácie, učitelia často počúvajú otázku Na čo to je? alebo Na čo je to dobré? alebo Nemám to rád atď. Respondenti vnímajú matematiku ako prostriedok rozvoja logického myslenia.

Uvedomili si tiež obmedzenia, ktoré môže mať dôvodenia a dokazovania. Obmedzenia, ktorých sa respondenti obávali, boli rôzne. Zaoberali sa časovým obmedzením, zameriavali sa na slabších alebo silnejších žiakov a zameriavali sa na primeranosť úrovne ročníka

Na otázku "Aké spôsoby argumentácie a dôkazov poznáte?" respondenti uviedli množstvo rôznych príkladov. V tabuľke 2 uvádzame ich odpovede. Pri tejto otázke sme si uvedomili, že všetky odpovede respondentov možno charakterizovať ako formu uvažovania z rámca pre analýzu spôsobov uvažovania v matematike, ktorý predstavil Sevinc a kol [5].

	V1	**V2**	**V3**	**V4**	**Počet odpovedí**
Vizualizácia a manipulácia	3	1	2	4	10
Štandardné typy dôkazu	3	1	0	3	7
Protipríklad	2	0	1	3	6
Empirické dokazovanie	2	0	1	3	6
Overovanie pravdivosti	0	1	0	2	3
Systematické overovanie všetkých možností	0	0	2	0	2

Tabuľka 2:Spôsoby argumentácie

Záver

Všetci respondenti si uvedomujú potrebu argumentácie. Za pozitívne považujeme, že veľká časť uvádza aj konkrétne možné obmedzenia, na základe čoho predpokladáme, že odpovede respondentov vychádzali z ich osobnej analýzy možných obmedzení používania argumentácie na hodinách.

Respondenti majú vedomosti o rôznych formách uvažovania, čo považujeme za povzbudivé. Argumentáciu považujú za nástroj na vysvetlenie toho, ako niečo funguje, za nástroj, ktorý sa používa na dosiahnutie porozumenia medzi žiakmi.

BIBLIOGRAFIA

[1] Štátny pedagogický ústav, „Inovovaný štátny vzdelávací program," 2014. [Online]. Available: https://www.statpedu.sk/sk/svp/inovovany-statny-vzdelavaci-program.

[2] L. S. Shulman, „Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching," Educational Researcher, zv. 15, %1. vyd.2, pp. 4-14, 1986

[3] D. Ball, M. Thames a G. Phelps, „Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special?," Journal of Teacher Education, zv. 59(5) , pp. 389-407, 2008

[4] J. W. Creswell, 30 Essential Skills for the Qualitative Researcher, Thousand Oaks, California: Sage, 2015

[5] S. Sevinc, I. Kohanová, M. Isiksal-Bostan, Z. Kubáček, I. Isler-Baykal, M. Lada, E. Cakiroglu and B. Di Paola, "Developing," in ICERI2022 Proceedings, Seville, Spain, 2022

Mgr. Katarína Jánošková
Škola Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského
ulica č. Mlynská dolina F1
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: Katarina.Janoskova@fmph.uniba.sk

DIAGNOSTIKA ŽÁKOVÝCH OBTÍŽÍ PŘI ŘEŠENÍ KALKULATIVNÍCH ÚLOH A JEJICH REEDUKACE

DARINA JIROTKOVÁ

ABSTRAKT. *´Sloupečkové´ úlohy jsou zejména v nižších ročnících 1. stupně základní školy hojně používány i jako nástroj pro známkování. Cílem dílny bylo přivést účastníky k zamyšlení, jakou zpětnou vazbu o momentálních vědomostech žákovi poskytne známka stanovená podle počtu chyb a jak využít i takovéto úlohy k diagnostice žákových obtíží.*

Úvod

V příspěvku představíme soubor deseti úloh, které jsme použili ve vstupním didaktickém testu z matematiky v rámci výzkumného projektu *Učitelské porozumění příčinám školní ne/úspěšnosti u žáků na prvním stupni ZŠ* jako diagnostické. Pomocí dvanácti diagnostických nástrojů měly i tyto úlohy přispět k odhalení žáků ohrožených školním neúspěchem. Vstupní test byl zadán žákům druhého ročníku v r. 2021. Didaktický test z matematiky byl tvořen šesti úlohami, z nichž jedna s deseti podúlohami byla věnována počtářským dovednostem žáků. Té se budeme dále podrobně věnovat a poukážeme na její diagnostický potenciál.

Na projektu se podíleli výzkumníci ze dvou pedagogických fakult (UK v Praze a JČU v Českých Budějovicích) a pěti kateder (psychologie, primární pedagogiky, speciální pedagogika, didaktika matematiky a didaktika českého jazyka) v letech 2021-2023. Bylo zapojeno 657 žáků druhého a následně i třetího ročníku základní školy z 29 tříd, 22 běžných škol vybraných napříč různými regiony ČR.

Podle našich zkušeností je početním neboli ´sloupečkovým´ úlohám, ve kterých je číslo v abstraktní podobě (Nunes et al., 2016), ve školách stále věnována značná pozornost. Vyučující je zařazují zejména v nižších ročnících prvního stupně základní školy jako rozcvičky, pětiminutovky, nebo dokonce i soutěže (známé jsou hry na Zmrzlíka, nebo Krále počtářů apod.) s cílem upevnit a zautomatizovat u žáků základní početní spoje. Těmito aktivitami se u žáků rozvíjejí jejich deklarativní znalosti, tzn. žák pohotově realizuje naučené spoje neboli rychle vyvolá požadované spoje ze své dlouhodobé paměti. V soutěžích na rychlost však pomalejší žáci často selhávají, protože nestíhají tempo výpočtů. Učitelé tato ´drilovací´ cvičení zdůvodňují tím, že když má žák zautomatizované početní operace, snižuje se zatížení jeho pracovní paměti při řešení náročnějších úloh. Nedostatkem však je, že žákovy případné chyby se obvykle opravují stejným způsobem, jakým vznikly, tj. dalším procvičováním s důrazem na rychlost. Často jsou také ´sloupečkové´ úlohy používány jako nástroj známkování. Obvykle má každý vyučující pevně stanoveno své kritérium pro známky, např. jedna chyba je hodnocena známkou 1-, dvě chyby známkou 2 atd. Takové známkování se zdá být spravedlivé a důležité je, že rodičům je srozumitelné.

Výzkum však ukázal (např. Geary et al., 2008), že pro rozvoj dobrého porozumění matematickým pojmům a procesům je potřebné, aby rozvoj deklarativních znalostí (faktické informace) probíhal ruku v ruce s rozvojem znalostí procedurálních (jak to funguje) a znalostí konceptuálních (vztahy a souvislosti) a že jednotlivé typy znalostí jsou vzájemně propojeny. Oddělením deklarativních znalostí od ostatních dvou typů znalostí mohou žáci rozvíjet formální znalosti, tj. žáci znají jen fakta a jen jednoduché souvislosti. ale neumí je modelovat pomocí manipulativ. Výzkum (Rendl et al., 2013) potvrzuje, že vyučující, a to i nižších ročníků, jen zřídka pracují v aritmetice s manipulativními pomůckami. Často to zdůvodňují tím, že to "stačí žákům jednou ukázat". V důsledku toho učí své žáky postupy (algoritmy), které sami považují za nejefektivnější, nebo které se kdysi sami učili. Zákonitosti poznávacích procesů žáků v matematice tak bohužel nejsou respektovány (Hejný, 2014).

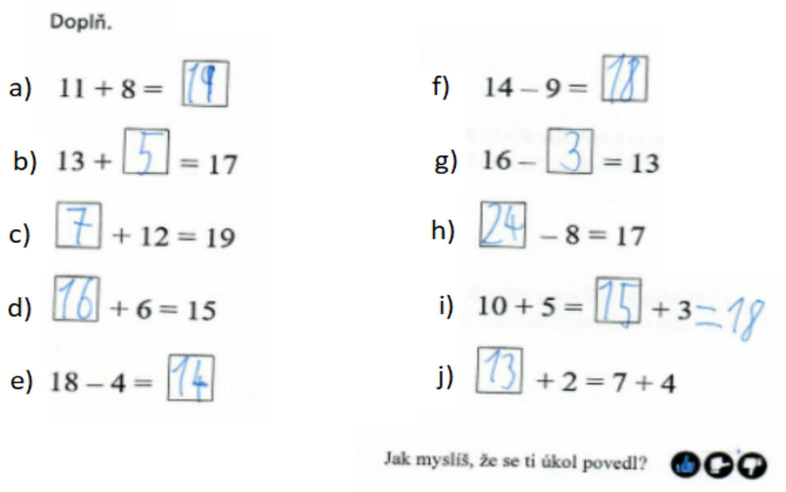
Naše analýzy žákovských řešení poukázaly na silný diagnostický potenciál početních úloh, který může učitel využívat například i pro diferencovaný přístup k výuce s cílem pomoci žákům překonat jejich individuální obtíže a předejít tak dalším nabalujícím se obtížím.

Průběh pracovní dílny

Dále popíšeme a více rozpracujeme jednotlivé body pracovní dílny.

Oprava písemné práce Matěje

Účastníci pracovní dílny dostali jako první úkol v roli učitele druhého ročníku opravit písemnou práci žáka Matěje tak, jak to běžně dělají, nebo by dělali s tím, že opravenou práci druhý den vrací žákovi k nahlédnutí.



Obrázek 1: Řešení žáka Matěje

V dalším kroku si kolegové ve dvojici nebo trojici opravenou práci vyměnili. Změnili i svou roli z učitele na žáka Matěje. Nyní v roli Matěje měli za úkol reagovat a popsat dopad učitelovy zpětné vazby, popsat, co se dozvídá o svých současných znalostech a o tom, jak by měl dále pracovat, aby odstranil příčiny chyb.

Ti účastníci v roli Matěje, kterým se dostala do rukou písemka s podtrhnutými chybami a známkou 4, nebo 5, potvrdili, že neví, proč jsou některé úlohy označené jako chybné. Podle sebehodnocení pomocí vybarveného zvednutého palce usoudili, že Matěj byl se svým řešením spokojen. Tedy Matěj dostal pouze informaci, že mu početní úlohy nejdou. Nevěděl však proč mu nejdou, co dělá špatně a jak má chyby napravit. „Asi musím ještě více počítat."

Jedna skupina účastníků pracovní dílny navrhla, že je potřeba se na úlohy podívat blíže a pokusit se zjistit typy chyb Matěje a jejich příčiny.

Gradační parametry úloh

Takové jevy v úlohách, které lze obměňovat a tím nastavovat obtížnost úlohy, nazýváme parametry gradace. Podívejme se na parametry gradace sady uvedených deseti úloh.

Jedním gradačním parametrem je použitá operace. Operace odčítání je považována za obtížnější než operace sčítání. Tomu odpovídá i fakt, že ve všech učebních materiálech pro první ročník je odčítání zavedeno později po zvládnutí základů sčítání. Proto jsme sadu úloh začali úlohami na sčítání s cílem, aby žáci nejdříve zažili úspěch a byli motivováni pokračovat v řešení dalších úloh.

Dále lze považovat za gradační parametr číselný obor. V našich úlohách jsou to obory do 10, do 20, nad 20. Představy žáků o číslech do 20 jsou převážně budovány prostřednictvím velkého množství modelů. Číselný obor nad 20 je obvykle budován již na abstraktní úrovni pomocí struktury čísel. V případě čísel nad 20 tedy žáci nemívají oporu v předmětné představě objektů, která by jim mohla pomoci počítat pomocí modelování.

Obtížnost úlohy ovlivňuje také to, zda je při provádění požadované operace nutný přechod přes desítku. Podle učitelů (Rendl et al., 2013) jsou úlohy vyžadující přechod přes desítku považovány za obtížnější než ty, kde se výpočet odehrává ve stejné desítce.

Dalším parametrem gradace je pozice neznámé v úlohách typu *a* +/- *b* = c, kde jedno z čísel *a*, *b* a *c* je neznámé. Taková trojice čísel (*a, b, c*) se nazývá aditivní triáda. Nejméně obtížná je úloha, kde je neznámá je na pozici *c*. Nejobtížnější je úloha, kde neznámá je na pozici *a*. Úloha typu *x* +/– *b* = *c* je obtížná zejména pro ty žáky, kteří provádějí výpočty s oporou o představu jistého počtu předmětů. Modelování této úlohy začíná neznámým číslem (viz např. Budínová, 2018), tedy představou ničeho.

Úloha typu *a* + *b* = *c* + *d* je obtížnější, neboť jsou zde čtyři čísla provázána operací sčítání. Takováto čtveřice čísel (*a, b, c, d*) se nazývá aditivní kvadriáda. Umět pracovat s aditivní kvadriádou znamená porozumět tomu, že rovnost je relace (ekvivalence), jinými slovy chápat rovnost konceptuálně (Hejný a kol., 2006). To znamená vědět, že součet/číslo napravo od znaku „=“ se musí rovnat součtu/číslu nalevo od znaku „=“. Výstižně můžeme tuto situaci připodobnit miskovým vahám, které jsou v rovnováze.

Žák, který např. v úloze i) píše za znak „=“ číslo 15 (jako žák Matěj v úloze i) chápe rovnost operačně, tj. znak „=“ pro něj představuje pokyn „počítej zleva doprava a výsledek napiš za znak rovnosti“ (např. Hejný, 2014; Budínová, 2018). Toto chápání rovnosti může být později překážkou, když žáci začnou pracovat s proměnnými a řešit rovnice (Vondrová, 2019). Podobně jako u aditivních triád lze nastavovat obtížnost kvadriád volbou pozice neznámé.

Posledním parametrem gradace je přítomnost antisignálu – jde o úlohy, jejichž řešení vyžaduje jinou operaci, než je v nich deklarována. Například od některých žáků se očekává, že úlohu c) __ + 12 = 19 vyřeší pomocí odčítání (19 – 12) jako inverzní operace ke sčítání. To znamená, že pro tyto žáky je znaménko + antisignálem. Pro žáky, kteří řeší tento typ úloh dočítáním („12 a kolik je 19?") nebo postupným přičítáním jedné (12, 13, ..., 19), což jde často ruku v ruce s používáním prstů, znaménko + antisignálem není.

V následující tabulce uvedeme přehled gradačních parametrů v jednotlivých úlohách.

Úloha	Číselný obor	Přechod přes 10 S / BEZ	Pozice *x* v *a*+*b* = *c*	Pozice *x* v *a*+*b* = *c*+*d*	Antisignál ANO/NE
a) 11 + 8 = __	10–20	BEZ	*c*		NE
b) 13 + __ = 17	10–20	BEZ	*b*		ANO
c) __ + 12 = 19	10–20	BEZ	*a*		ANO
d) __ + 6 = 15	0–20	S	*a*		ANO
e) 18 − 4 = __	10–20	BEZ	*c*		NE
f) 14 − 9 = __	0–20	S	*c*		NE
g) 16 − __ = 13	10–20	BEZ	*b*		NE
h) __ − 8 = 17	10–30	S	*a*		ANO
i) 10 + 5 = __ + 3	10–20	BEZ		*c*	ANO
j) __ + 2 = 7 + 4	0–20	S		*a*	ANO

Tabulka 1: Přehled gradačních parametrů početních úloh

Než posoudíme dovednosti našeho žáka Matěje, podívejme se ještě na to, co nám řešení jednotlivých úloh může napovědět o dovednostech žáka, podívejme se na celkovou úspěšnost jednotlivých úloh, jejich nejčastější chyby a pokusíme se formulovat jejich příčiny. Tyto poznatky pak aplikujeme na žáka Matěje.

Diagnostický potenciál jednotlivých úloh

Dovednost sčítat nebo odčítat menší dvojciferné a jednociferné číslo diagnostikují úlohy a) a e).

Dovednost zvolit vhodnou řešitelskou strategii v případech přítomnosti antisignálu diagnostikují úlohy b), c), d), g).

Na neporozumění počítání s přechodem přes desítku ukazují úlohy d), f), h), i).

Na způsob porozumění rovnosti jako relace ekvivalence poukazují úlohy i) a j).

Všechny úlohy kromě a), e) a f) lze považovat za rovnice, a tedy jejich řešení může vypovídat o žákově dovednosti pracovat s rovnicemi.

Výsledky dílčího výzkumu

Účastníkům dílny byly představeny prostřednictvím tabulky následující výsledky. V tabulce jsou uvedeny úlohy v pořadí podle řešitelské úspěšnosti, počet různých chyb, které se ve všech žákovských řešení vyskytly, u nejčastějších chybných výsledků uvádíme též jejich četnost. Další chybné výsledky se vyskytly již v malém počtu a četnost již neuvádíme. Počet řešitelů jednotlivých úloh byl mezi 620 a 630 kromě úloh h), i), j). Počet řešitelů těchto úloh byl těsně pod 600.

Úloha	Úspěšnost v %	Počet různých chyb	Nejčastější chybný výsledek [počet výskytů]	Ostatní chybné výsledky
g) 16−__ = 13	98,71	3	-	4, 13, 29,
e) 18−4 = __	98,55	7	-	4, 10, 12, 13, 15, 19, 22
a) 11+8 = __	97,11	6	20[4], 18[4], 17[3]	3, 9, 16
b) 13+__ = 17	96,63	4	30[12]	3, 6, 14
c) __+12 = 19	94,05	13	6[7], 8[7], 5[4], 17[4], 31[4]	2, 3, 4, 9, 11, 12, 14, 19
f) 14−9 = __	93,70	10	6[15], 4[7], 15[6]	3, 7, 9, 11, 18, 20, 23
d) __+6 = 15	93,40	12	8[13], 21[7]	-1, 1, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 16, 19
h) __−8 = 17	75,80	24	9[68], 26[14], 24[12], 19[6], 23[6], 20[6]	1, 2, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 14, 18, 21, 22, 27, 28, 29, 30, 31, 35
j) __+2 = 7+4	30,56	14	5[301], 13[43], 1[28], 18[17], 11[9]	4, 6, 7, 8, 10, 14, 17, 23, 25
i) 10+5 = __+3	24,46	11	15[283], 18[140], 2[9]	5, 7, 8, 11, 13, 21, 25, 28

Tabulka 2: Přehled chyb a jejich četnost

Z uvedené tabulky je patrné, že námi navržená gradace nebyla zcela přesná. Největší úspěšnost úloh g) a e), ve kterých je přítomno odčítání, a v úloze g) je ještě navíc pozice neznámé v triádě na místě *b*, což je náročnější než pozice *c*, nás trochu překvapila. Domníváme se, že nelze jednoznačně popsat příčinu tohoto jevu, neboť do hry vstoupilo mnoho dalších parametrů, jako například znalost žáka daného typu grafického zápisu úlohy. Je potřeba si uvědomit, že psaní testu předcházela dlouhá doba online výuky v důsledku covidu. Procvičování početních spojů se odehrávalo převážně ústně a mnohdy za pomoci rodičů. Rovněž nás překvapila větší úspěšnost úlohy j) než i). Úvaha o operačním porozumění znaku „=“, které u žáků v nižších ročnících ZŠ převažuje nad relačním, nám nabízí vysvětlení. Dopsat v úloze i) číslo 15 za rovnítko se silně nabízí.

Vybrané chyby, jejich možné příčiny a návrhy na re-edukaci

Dalším úkolem účastníků pracovní dílny bylo ve skupinách najít několik chyb, jejichž příčina je stejná, příčinu popsat a navrhnout vhodné následné reedukační kroky. Uvedeme zde jen dva typy chyb, které se při dílně diskutovaly. Další jsou rozpracovány v článku (Slezáková, Jirotková, 2023).

Do první skupiny chyb jsme zařadili ty, jejichž příčinou je pravděpodobně počítání na prstech, kterým si žák při sčítání pomáhá, a chybuje při manipulaci s nimi. Jsou to chyby 17, 18, 20 v úloze a), chyby 5, 6, 8, 9 v c), chyba 8 v d), chyby 6, 4 v e).

K odstranění zdroje této chyby je potřeba, aby žáci modelovali operaci sčítání ještě jinými modely než prsty, např. různými manipulativy. Důležitým modelem čísel a operací s nimi je pohyb vlastního těla např. po číselné ose vyznačené na podlaze, pohyb po stovkové tabulce simulovaný pomocí žetonu. V případě úlohy c) je vhodné modelovat rovnici $x+b = c$ například pomocí misky a fazolí: Na stole leží 12 fazolí a miska zakrývající další fazole. Víme, že celkem je na stole 19 fazolí. Kolik jich je pod miskou? Kontrolu výpočtu provedeme pouhým zvednutím misky a spočítáním ukrytých fazolí. Vhodnou pomůckou jsou též Dienesovy hranolky.

Příčinou chyb, které jsme zařadili do druhé skupiny, je pravděpodobně žákovo neporozumění matematickému zápisu úlohy. Žák pak využívá strategii signálu: „Vidím znak operace sčítání (+)/odčítání (-), tak sčítám/odčítám,“ (Baroody, 1999). Použití této strategie napovídají výsledky 30 v úloze b), 31 v úloze c), 21 v úloze d), 9 v úloze h), 9 a částečně 19 v úloze h), 18 v úloze i) a 13 v úloze j). Žáci dokáží v uvedených případech operaci provést, není tedy potřeba posilovat nácvik početních spojů. Je však potřeba prohloubit porozumění souvislostem mezi čísly v aditivních triádách. To lze např. diskusemi o různých žákovských strategiích řešení problémů. Často stačí dát žákovi příležitost takové úkoly řešit a doprovodit řešení reálnou zkušeností. Např. „V sáčku je několik kuliček, 8 jich odebereme a zbyde jich 17. Kolik kuliček bylo v sáčku na začátku?" Je to úloha s antisignálem. Slovo odebereme signalizuje operaci odčítání, ale potřeba sčítat. Jako u každé chyby je důležité posílit porozumění vazbám ve sčítacích triádách (případně i kvadriádách) modelováním problému a přiměřeným využíváním dostupných pomůcek (kuličkové počítadlo, Dienesovy desítkové hranolky, peníze, stovková tabulka).

Na závěr této části dodejme, že příčiny chyb a navrhované reedukační postupy jsou uvedeny bez nároku na úplnost. Chyby (a nejen ty s malým výskytem) mohou být způsobeny i únavou žáků nebo momentálním úbytkem pracovní energie. Učitel by však měl pátrat po jejich příčinách, ať už rozhovorem se žákem, nebo rozborem jejich řešení v jiných úkolech, aby dokázal žákovi účinně pomoci.

Jak dále pracovat s Matějem?

Závěrem pracovní dílny byl úkol vrátit se k hodnocení práce Matěje, popsat jeho problémy a navrhnout, jak ho dále směrovat.

Matěj chybuje v šesti z deseti úloh: b), d), f), h), i), j), ale na sebehodnotící otázku „Jak si myslíš, že se ti úkol povedl?“ (obr. 1) reagoval vybarvením palce nahoru, tedy byl se svou prací spokojen a svými výsledky jistý. Jeho písmo to navíc potvrzuje. Je stejně velké a silné, nevykazuje známky nejistoty, nikde nic neškrtá. Matěj chyboval ve všech čtyřech úlohách, které vyžadovaly počítání s přechodem přes desítku, a to jak při sčítání, tak při odčítání. Dělá zde tedy nějakou strategickou chybu, a to je klíčový problém, který je potřeba řešit.

Účastníci dílny navrhli nejdříve vyvolat u Matěje kognitivní konflikt, například modelováním úlohy 14 – 9, kde uvedl výsledek 18. Tím dáme podnět pro diskusi o jeho postupu při počítání s přechodem přes desítku. Dalším účinným krokem by mohlo být vést ho k občasnému modelování. Vhodná je pro něj pomůcka Dienesovy hranolky, kde při přechodu přes deset buď rozměňuje desítkový hranolek na deset jednotkových nebo obráceně.

Vzhledem k tomu, že při počítání s přechodem přes desítku dochází k řetězení myšlenkových operací, může být příčinou neúspěchu žáka také nedostatečná pracovní paměť. Tedy postupné zvyšování kapacity pracovní paměti posilováním krátkodobé paměti by mohlo být pro Matěje velice efektivní.

Dalším parametrem, který ovlivnil Matějovu chybovost, je počet čísel v zápisu. Chyboval v obou úlohách typu $a+b = c+d$. Z řešení obou těchto úloh vyplývá jeho operační porozumění rovnosti. To, že dopsal ještě výsledek 18 v úloze i), je pozitivní, neboť si byl vědom, že zápis 10+5 = 15+3 není zcela v pořádku. Jeho silné operační vnímání rovnosti ho přivedlo k doplnění čísla 18. Pro budování relačního porozumění rovnosti je ideální použít modelování situací pomocí miskových vah.

V ostatních parametrech již nechyboval důsledně, a proto je dalším reedukačním krokem postupné rozvíjení jeho potřeby kontroly výsledku. Kontrola výpočtu na nižší kognitivní úrovni, tedy pomocí manipulací, je účinná. Jakmile žák bude mít již dobře vybudované představy o číslech a vazbách v aditivních triádách či kvadriádách, sémantickou rovinu postupně opustí. Bude ale umět se do ní v případě potřeby vrátit.

Zajímavé také je, že Matěj chyboval v každé druhé úloze kromě posledních tří, kde chyboval ve všech. Můžeme se domnívat, že zde hrála roli pracovní paměť a spotřeba kognitivní energie. Chyba 16 v úloze d) naznačuje, že žák vynaložil značné úsilí na počítání předchozí úlohy a kognitivní energie mu nyní chyběla. Je možné, že by druhý den stejnou chybu neudělal. Když hledáme příčinu zdánlivě nesmyslného výsledku, vyplatí se podívat se na předchozí úlohu, zda nebyla kognitivně náročnější.

Závěr

Cílem pracovní dílny a tohoto příspěvku bylo poukázat na diagnostický potenciál, který nabízejí nejen slovní úlohy, ale i běžně využívané tzv. ´sloupečkové´ úlohy. Učitel samozřejmě nemá ve své praxi dostatek času na podrobné analýzy každého žákovského řešení, ale kdyby čas od času zkusil pátrat po příčinách žákovských chyb, jistě by si tak vytvořil věrnější obraz o žákových obtížích. To by ho pak směroval k hledání efektivní pomoci žákům tak, aby si nenesli nálepku „já na matematiku nejsem“.

Podle našich zkušeností se mnoho učitelů domnívá, že žáci musí nejprve zvládnout početní úlohy, aby pak dokázali úspěšně řešit slovní úlohy. Je však známo i z mezinárodních výzkumů (Moscardini, 2010), že i když se žáci výrazně zlepší v početních úlohách, nemusí se to projevit na jejich schopnosti řešit slovní úlohy. A naopak, že porozumění základním početním operacím lze dobře zlepšit řešením slovních úloh a diskusemi o řešitelských strategiích.

Poděkování

Děkujeme všem účastníkům pracovní dílny za vytvoření dobré pracovní atmosféry i za poskytnuté nápady a zpětné vazby.

Oznámení

Výzkum v tomto příspěvku byl proveden v rámci projektu *Učitelské chápání příčin školní neúspěšnosti a efektivity pedagogických intervencí,* CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_076/0016390, financovaného z programu OPVV MŠMT.

LITERATURA

[1] Baroody, A. J. *Children's relational knowledge of addition and subtraction. Cognition and Instruction.* 1999,17(2), 137-175. https://doi.org/10.1207/S1532690XCI170201

[2] Budínová, I. *Přístupy nadaných žáků 1. a 2. st. ZŠ k řešení některých typů úloh v matematice.* Brno: MU, 2018. [dostupné na https://munispace.muni.cz/library/catalog/view/1237/3436/990-1/0#preview]

[3] Geary, D.C. et al. Chapter 4: Report of the task group on instructional practices. In *The final report of the National Mathematics Advisory Panel. U.S. Department of Education*. 2008. [dostupné na: https://www2.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel/reports.html]

[4] Hejný, M., Jirotková, D., Kratochvílová, J. Early conceptual thinking. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, N. Stehlíková (Eds.), *PME 30, Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* pp. 289‐296. Praha: UK, 2006.

[5] Hejný, M. *Vyučování matematice orientované na budování schémat: Aritmetika 1. stupně.* Praha: PedF UK, 2014, ISBN 978-80-7290-776-2.

[6] Moscardini, L. 'I like it instead of maths': how pupils with moderate learning difficulties in Scottish primary special schools intuitively solved mathematical word problems. *British Journal of Special Education*, 2010, 37(3), 130–138. https://doi:10.1111/j.1467-8578.2010.00461.x

[7] Nunes, T. et al. Teaching and learning about whole numbers in primary school. *ICME-13. Topical Survey.* Springer, 2016. https.//doi:10.1007/978-3-319-45113-8.

[8] Rendl, M. et al. *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů.* Praha: PedF UK, 2013. ISBN 978-80-7290-723-6

[9] Slezáková, J., Jirotková, D. Diagnostics of a pupil's difficulties in solving numerical tasks and their re-education. In J. Novotná, H. Moraová (Eds.) Proceedings SEMT 2023, New direction in elementary mathematics education, 306-316, Praha: PedF UK, ISBN 978-80-7603-409-9

[10] Vondrová, N. *Didaktika matematiky jako nástroj zvládání kritických míst v matematice.* Praha: PedF UK, 2019, ISBN 978-80-7603-109-8

Doc. RNDr. Darina Jirotková, Ph.D.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Pedagogická fakulta Karlovy univerzity v Praze
Magdalény Rettigové 4
ČR – 116 39 Praha 1
darina.jirotkova@pedf.cuni.cz

AKO ZAČAŤ UČIŤ V PRVOM ROČNÍKU GYMNÁZIA

MARTINA KALAŠOVÁ, KAROLÍNA MIKOVÁ

ABSTRAKT. *V rámci výskumu zbierame stratégie, ktoré používajú skúsení učitelia a učiteľky, aby vyrovnali rozdiely žiactva gymnázia, ktoré prichádza s rôznymi vedomosťami zo svojich základných škôl. V článku opisujeme, aké postupy učiteľkám a učiteľom dobre fungujú. Skúmame, ako súvisia s ich spôsobom vyučovania a akými vonkajšími faktormi sú ovplyvnení. V druhej časti detailnejšie opisujeme dva výrazne odlišné postupy, ktoré sme pri výskume objavili.*

Úvod

Výskumný problém vznikol zo zvedavosti autorky. Zaujímalo ju, ako vykročiť tou správnou nohou pri učení prvákov na strednej škole. Myslíme si, že odpoveď na túto otázku, by mohla zaujímať mnohých učiteľov a učiteľky. Konkrétne, ako dať šancu uspieť čo najväčšiemu počtu žiačok a žiakov, pokúsiť sa vyhnúť pocitu, že je pre nich matematika príliš ťažká. Ako zopakovať učivo základnej školy, vyrovnať rozdiely vo vedomostiach, ktoré si žiactvo prináša zo základných škôl. A tiež, ako dostať triedu do stavu, v ktorom je pripravená preberať novú stredoškolskú látku.

Tému sme sa rozhodli skúmať cez skúsenosti učiteliek a učiteľov z praxe. Keďže nás zaujímal súčasný stav, náš výskum sme zrealizovali pred štúdiom odbornej literatúry. Až následne sme získané výsledky porovnávali so závermi iných výskumných prác. Naše výstupy boli takto podporené, napríklad to, že práca so zlomkami je pre žiactvo náročná, čomu sa venovali aj diplomové práce [1], [2].

Metodológia

Témou nášho výskumu bola matematika v prvom ročníku gymnázia. Problém, ktorý sme skúmali, boli rozdielne vedomosti v triede, na ktorých majú učitelia a učiteľky stavať nové učivo. Preto sme sa rozhodli zadefinovať náš výskumný cieľ nasledovne: pozbierať stratégie, ktoré využívajú skúsené učiteľky a učitelia, aby vyrovnali rozdiely, s ktorými žiactvo prichádza do prvého ročníka gymnázia.

Využili sme kvalitatívny výskum, ktorý sa nám zdal vhodný na detailné skúmanie metód, používaných v reálnych školských podmienkach [3]. Rozhodli sme sa aplikovať pološtruktúrované interview. Aby sme takto mohli postupovať, vytvorili sme dotazník. Ten pozostával z dvadsiatich, prevažne otvorených otázok. Úvodné otázky zisťovali základné údaje o respondentkách a respondentoch. Následne sme sa pýtali na ich spôsob vyučovania. Posledné otázky sme zamerali na spôsoby opakovania učiva, metód učenia na začiatku prvého ročníka a k vyrovnávaniu rozdielov medzi žiactvom.

Ako vzorku sme vybrali gymnaziálnych učiteľov a učiteľky s dlhoročnou praxou. Podmienkou bolo aj to, že viackrát učili matematiku v prvom ročníku. Šlo o zámerný výber s cieľom zozbierať stratégie od inšpiratívnych učiteliek a učiteľov. Vybrali sme len osoby, na ktoré sme dostali dôveryhodnú referenciu, že učia kvalitným, efektívnym spôsobom.

Po absolvovaní rozhovorov vieme povedať, že naše respondentky a respondenti učili 9 – 28 rokov na štvorročných a/alebo päťročných gymnáziách. Zdroje, ktoré používajú pri príprave na vyučovanie, boli rôzne zbierky a knihy domácich aj zahraničných autorov, online zbierky, učebnice a texty venujúce sa histórií matematiky. Všetci si vyrábajú aj vlastné zadania. Spomínali aj preferenciu úloh aplikovateľných do praxe. Jeden učiteľ uviedol, že na prvej hodine zadáva študentom netypickú úlohu, kde majú dokázať, že v Bratislave žijú aspoň dvaja ľudia s rovnakým počtom vlasov. Túto značnú šírku a hĺbku nimi používaných zdrojov považujeme za dôkaz ich profesionality.

Všetky interview sme zaznamenali a následne podrobili kvalitatívnej analýze. Začala sme otvoreným kódovaním [3]. Medzi položenými otázkami sme hľadali príčinné súvislosti, ktoré vytvorili kostru analytického príbehu. Prvé pozorovania sme dostali zameraním sa na tie skutočnosti, ktoré uvádzali všetci učitelia a učiteľky. Tento prienik odpovedí sme dosadili do kostry a interpretovali súvislosti medzi odpoveďami. Urobili sme aj druhé pozorovanie, kde sme medzi sebou porovnali odpovede dvoch signifikantných respondentov, ktorí uviedli značne rozdielne stratégie. Obe pozorovania rozvádzame v ďalšom texte.

Pozorovania zo spoločných znakov zozbieraných odpovedí

Náš výskum vychádzal z predpokladu, že trieda nemá po príchode na strednú školu dokonale zvládnuté učivo základnej školy. Respondenti a respondentky náš predpoklad potvrdili - na strednej škole je nutné opakovať základoškolské učivo a vyrovnávať rozdiely v žiackych vedomostiach, pretože stredoškolská látka nadväzuje na základoškolskú. Každá z odpovedajúcich osôb vymenovala viaceré témy z učiva ZŠ, ktoré musia so žiakmi znovu preberať. Vidíme istý rozpor – učitelia a učiteľky musia prebrať množstvo nového učiva podľa ŠVP [4], ale zároveň musia opakovať predchádzajúcu látku. Naše respondentky a respondenti to nevnímajú ako problém. Aby sme pochopili, akými spôsobmi túto situáciu riešia, začali sme skúmať ich prístup k vyučovaniu.

Ako prvé uvádzame opis tried, v ktorých učia. Išlo o gymnazistky a gymnazistov, ktorí sa do tried nedelili podľa záujmu ani zručností v matematike. V každej triede sa našlo široké spektrum postojov k matematike. Boli v nich nadšenci a nadšenkyne, ktoré sa chceli naučiť čo najviac, zatiaľ čo iné osoby v triede neprejavovali o matematiku záujem alebo z nej mali vyslovene strach. Ukázalo sa, že v bilingválnych triedach značne prevládal počet žiakov a žiačok zameraných na iné predmety, pre ktoré bola matematika len nutnou povinnosťou.

Respondentiek a respondentov sme sa pýtali aj na hlavný cieľ ich učenia. Spoločným zámerom opýtaných bolo ukázať užitočnosť matematiky ako nástroja na riešenie problémov. Pracovali na tom, aby žiactvo necítilo k predmetu odpor. Zdôrazňovali aj ľudský rozmer, chceli zo žiačok a žiakov vychovať dobrých ľudí.

Vyššie sme opísali postoj triedy k matematike a ciele, ktoré si kládli sami respondenti a respondentky. Zdalo sa nám, že tieto faktory mali vplyv na celkový spôsob vyučovania. Ako spoločné znaky ich prístupu k vyučovaniu sa ukázali záujem viesť žiakov a žiačky k poznaniu, podporiť ich, aby si z vyučovania vzali čo najviac. Ide o nadšené a matematicky zdatné učiteľky a učiteľov, ktorí ukazujú krásy matematiky a prenášajú svoj zápal na žiactvo. Každému z nich na hodinách prebiehajú diskusie - kladú triede otázky, zadávajú podnetné problémy, využívajú historické pozadie matematických konceptov a nechávajú žiactvo vyjadrovať názor, argumentovať, či vysvetľovať si učivo navzájom.

Na základe kvalitatívnej analýzy sme identifikovali tri faktory tvoriace učiteľské stratégie na riešenie skúmanej situácie - vyrovnávanie rozdielov v prvom ročníku:

- prvé témy, ktoré preberajú v prvom ročníku
- ochota meniť plán hodiny, keď sa ukáže, že trieda niečo neovláda
- spôsob zisťovania rozdielu medzi predpokladanými a reálnymi vedomosťami triedy

Všetky respondentky a respondenti medzi prvými témami, ktorým sa venujú uviedli: výrazy, rovnice, lineárne a kvadratické funkcie a logiku. Viacerí spomenuli ako dôvod prebrania funkcií, že ich trieda potrebuje vedieť používať na hodiny fyziky. Témy sú sčasti dané aj ŠVP [4] a logickou nadväznosťou učiva. Vplyv má aj to, ktoré časti základoškolského učiva je nutné opakovať. Učiteľky a učitelia sa zhodli, že je nutné sa znovu venovať predovšetkým zlomkom a výrazom, spomenuli aj mocniny a rovnice. Individuálne uvádzali aj ďalšie témy a dokonca, že niektoré učivá preberajú, akoby šlo o úplne novú látku, napríklad premennú alebo Pytagorovu vetu.

Ďalej sme zistili, že všetci respondenti a respondentky vysvetlia ľubovoľne jednoduché učivo. Nemajú žiadnu hranicu príliš samozrejmých otázok, na ktoré by neboli ochotní odpovedať. Jedna učiteľka vyslovene uviedla, že "každú vec niekto nevie". Respondentky a respondenti sa tiež zhodli, že sú ochotní zmeniť plán hodiny, keď sa ukáže, že trieda niečo neovláda - prispôsobia sa aktuálnym potrebám. Priznali, že nemajú presný plán hodiny, len smer, ktorým chcú ísť. Počítajú s tým, že sa pri niektorých témach zdržia dlhšie. Nevadí im to, lebo usilujú o to, aby trieda skutočne rozumela učivu. Ukázalo sa, že žiadny z učiteľov a učiteliek nezačína vstupným testom. Spomínali, že vďaka prijímacím skúškam, ktorými trieda prešla, vedia, že všetci ovládajú základy matematiky.

Domnievame sa, že vyššie opísané faktory sú piliermi učebného prístupu k vyrovnávaniu rozdielov medzi žiactvom. Tu zhŕňame zistené postupy, ktoré učiteľky a učitelia používali pri vyrovnávaní rozdielov v triede:

- dávali triede priestor pýtať sa - mohli klásť otázky, prísť na konzultácie
- poskytovali zdroje a spôsoby, akými sa látka dá dobehnúť, žiactvo nenútili, len ponúkali cesty na doučenie sa
- ak zadávali prácu na doma, bola dobrovoľná
- v triede ochotne vysvetľovali čokoľvek potrebné, reagovali flexibilne, vnímali potreby triedy a prispôsobovali sa im
- preberanie nového učiva začínali vyvolaním žiackych vedomostí, ktoré už k téme mali - kládli otázky, nechávali žiakov a žiačky rozmýšľať, vysvetliť, čo o téme už vedia - plynule napájali neznáme učivo na známe
- nesnažili sa zmazať individuálne rozdiely, počítali s tým, že každá žiačka a žiak je iný, má určité záujmy, netrvali na tom, aby všetci dokonale ovládali každé učivo

Dva odlišné prístupy

Odpovede učiteľov a učiteliek mali výrazný prienik, ktorý sme popísali v predošlej kapitole. V konkrétnych metódach, ktorými začínajú školský rok v prvých triedach sme však našli dva rôzne prístupy. Vychádzali z toho, či školský rok začať alebo nezačať opakovaním učiva ZŠ. Za opakovanie vystupoval učiteľ A a proti opakovaniu učiteľka B. Preto uvádzame ich stratégie aj s prístupom k vyučovaniu, ktorý daná osoba využíva.

Začnime opakovaním

Začneme prístupom, ktorý venuje úvod prvého školského roka opakovaniu učiva ZŠ. Učiteľ A, ktorý takto postupoval, nechával žiactvo niekoľko hodín prepočítavať príklady podobné, ako boli na prijímacích skúškach. Keď narazili na niečo, čo nevedeli, vysvetlili si to navzájom alebo im učivo objasnil sám. Opakovanie ukončili písomkou. Kto mal stále medzery, musel sa doučiť individuálne mimo triedy. Žiačky a žiaci sa sami rozhodli, či chcú, aby sa im výsledok započítal do celkového hodnotenia.

Učiteľ A zvykol používať výklad, vravel, že učiva je veľa a nezostáva čas, postupovať konštruktivisticky. Všetky žiačky a žiaci chodili k tabuli, počítali a učili sa pri tom zreteľne vysvetľovať, používať matematické pojmy a argumentovať. Učiteľ A sa snažil triedu kvalitne pripraviť na maturitu a následné štúdium na vysokej škole.

Cieľom úvodného opakovania bolo, aby si trieda občerstvila vedomosti a znovu nabehla na matematické myslenie. Výskum ukazuje, že tento prístup funguje, učiteľ ju používal dlhodobo a prinášala mu požadované výsledky. Jeho triedy boli na hodinách aktívne, pýtali sa otázky, zapájali sa do diskusií. Mali s učiteľom priateľský vzťah, vracali sa za ním pre rady aj po maturite.

Začnime novou témou

Druhá stratégia odmietala začínať opakovaním. Alternatívou, ktorú učiteľka B s týmto postojom využívala, bolo začať učivom, ktoré ešte nikto nepreberal. Konkrétne sa ako prvej venovala logike. Oblasti zo ZŠ, ktoré žiactvu neboli jasné, si priblížili priebežne, keď sa ukázalo, že niečo treba zopakovať.

Učiteľka B charakterizovala svoje učenie ako hravé, nechávala triedu matematické zákonitosti objaviť. Neviedla ich k tomu, aby si pamätali formálne vedomosti. Chcela, aby rozumeli podstate matematických konceptov. Mohli argumentovať a prezentovať svoje riešenie problémov, prísť k tabuli či diskutovať. To však nebolo povinné - niektorí žiaci a žiačky sa nezapájali. Ako cieľ svojho učenia videla rozvoj schopnosti riešiť problémy, vytvárať zvyk hľadať nástroje, ktoré by mohli byť efektívne na vyriešenie danej úlohy.

Učiteľka B svoje odmietanie úvodného opakovania zdôvodnila tým, že opakovanie prináša frustráciu. Skoro každá žiačka a žiak má v niektorom učive medzery, takže opakovanie im pripomína vlastnú nevedomosť. Takýto postup podľa nej upevňuje postoj k matematike zo ZŠ, ktorý je často negatívny. Jej skúsenosti potvrdzujú, že v triedach, kde začala novou látkou, sa vytvorila aktívna pracovná atmosféra - trieda sa nebála pýtali otázky a väčšina uverila, že môže v matematike uspieť.

Záver

Opísali sme stratégie vyrovnávania rozdielov medzi žiactvom v prvom ročníku gymnázia. Zamerali sme sa na prienik všetkých odpovedí a následne sme skúmali dve rozdielne stratégie, ktoré sme objavili. Zaujalo nás, že oba prístupy cielili na vyrovnanie šancí všetkých v triede. Opakovaním si pripomenuli staré učivo, mohli sa naučiť aj témy, ktoré im v minulosti neboli jasné. Vďaka tomu štartovala celá trieda do nového stredoškolského učiva z podobnej pozície. Druhá možnosť bola neopakovať, ale vstúpiť do školského roka cez pre všetkých novú tému. Aj tá mala za cieľ všetkým poskytnúť rovnakú šancu, lebo v neznámej látke mali všetci šancu uspieť. Zaujalo nás tiež to, že oba prístupy fungovali napriek tomu, že sú značne odlišné. Môžeme dokonca vylúčiť, že by išlo o diametrálne rozličné zloženie tried.

Výskum ukázal, že vyrovnávanie rozdielov v prvom ročníku je téma, o ktorú má zmysel sa ďalej zaujímať. Bolo by vhodné kvalitatívnym výskumom zistiť, ktoré učivo základnej školy robí stredoškoláčkam a stredoškolákom problém. Vidíme priestor pre ďalšie skúmanie pohľadu žiactva na tieto dva prístupy. Dali by sa zbierať aj ďalšie stratégie, ktorými učitelia a učiteľky začínajú učiť matematiky v prvej triede gymnázia. Pri väčšej vzorke by bolo možné zamerať sa na mieru obvyklosti jednotlivých stratégií, či na meranie účinnosti jednotlivých prístupov. Pozorovania z výskumu tejto témy môžu poslúžiť ako inšpiračný zdroj učiteľom a učiteľkám v praxi.

LITERATÚRA

[1] ŠESTÁKOVÁ, Ivana. ZLOMKY VE VÝUCE MATEMATIKY. České Budějovice, 2011. Diplomová práce. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta. Vedoucí práce RNDr. Helena Binterová, Ph.D.

[2] VEJMELKOVÁ, Eliška. Zlomky – některé obtíže žáků a didaktické přístupy učitelů. Praha, 2011. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a didaktiky matematiky. Vedoucí práce Doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

[3] ŠVAŘÍČEK, Roman a Klára ŠEĎOVÁ. Kvalitativní výzkum v pedagogických vědách. Vyd. 2. Praha: Portál, 2014. ISBN 978-80-262-0644-6.

[4] matematika_g_4_5_r.pdf [online]. Bratislava: Štátny pedagogický ústav, 2015 [citované 2023-9-13]. Dostupné z: https://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_g_4_5_r.pdf

Bc. Martina Kalašová; Mgr. Karolína Miková, PhD.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: kalasova10@uniba.sk, karolina.mikova@uniba.sk

PROCES ZOBECŇOVÁNÍ V MATEMATICE V RŮZNÝCH SITUACÍCH

MICHAELA KASLOVÁ

ABSTRAKT. *Proces zobecňování je různě vymezován. Výzvy k zobecňování jsou spojeny s kompetencemi popsanými v RVP, v ŠVP, s úlohami v přijímacím řízení na vyšší stupně škol, v testech inteligence. Zaměříme se na otázky: Jak vidí zobecňování žáci? Jak odpovídá reálný proces zobecňování na vybraných situacích modelům uváděným v odborné literatuře? Jak ovlivňuje forma komunikace úroveň prezentace výstupu tohoto procesu?*

1. Zobecňování v RVP ZV

V RVP ZV aktualizovaných pro školní rok 2023/24 se termín zobecnění objevuje pouze v kapitole Český jazyk a literatura, v podkapitole Jazyková výchova: „...třídit je podle určitých hledisek a dospívat k zobecnění." V obecné části, ani v části věnované matematice se již termín zobecňování nevyskytuje, zobecňování lze chápat implicitně ve frázích (str. 31): „žák si postupně osvojuje pojmy" a předpokládá se, že každý chápe, že matematické pojmy jsou abstraktní a že do abstrakce se dostáváme v různých etapách postupným zobecňováním, což ovšem laikovi uniká a umožňuje dvojí pohled na RVP ZV. Na straně 30 se popisuje přechod od pozorování a popisu změn závislostí k matematickému předpisu, což může, ale také nemusí, dle způsobu výuky, provázet proces zobecnění. Druhý odstavec na straně 31 zmiňuje rozvíjení abstraktního a exaktního myšlení osvojováním si a užíváním matematických pojmů, což se z pohledu jazykové analýzy může jevit tak, že žáci již na úrovni abstrakce v myšlení jsou a jen se „vylepšují".

Proces zobecňování je spjat více či méně nápadně např. s řadami, závislostmi, pojmotvorným procesem, modelování a dalšími reprezentacemi, objevováním vlastností početních operací, odvozováním vzorců, tedy i s přechodem od aritmetiky k algebře a měla by se projevit i v provazbě na IT, kdy můžeme snadno přecházet od početních algoritmů k prvnímu programování, na což již upozorňovali vyučující na Pedagogických fakultách v osmdesátých letech 20. století (např. M. Koman) v souvislosti s akcentem na algoritmizaci. Podobně lze takto vnímat i takový přechod v geometrii u popisu konstrukce. Zdůraznění potřeby zobecňování by totiž více vyzdvihlo nutnost myslet v matematice.

2. Pojem zobecňování

Úvodem zdůrazněme, že zobecňování (generalizace) je proces, jehož výstupem je zobecnění. V této charakteristice se vůbec nehodnotí, jak dlouho a za jakých podmínek tento proces nastává/ probíhá, ani zda onen výstup je korektní, na jaké úrovni, respektive zda a4 do jaké míry odpovídá očekávanému výstupu.

Slovník cizích slov (2023) vymezuje zobecňování jako metodu „tvoření obecných pojmů z pojmů méně obecných nebo jedinečných", dává ji do souvislosti s procesem zjednodušování; z pohledu psychologie je chápe jako „rozšíření podmíněné reakce na podnět, který se podobá původnímu podmíněnému podnětu (není však stejný)"; z pohledu logiky sem zahrnuje kvantifikované výroky jako výstup onoho procesu.

V pojmu zobecnění lze sledovat i účel i úskalí onoho procesu: „Zobecňování patří k základním principům úspěšného myšlení. Nenutí nás, abychom o každé věci uvažovali zvlášť, a naše uvažování tak zrychluje. Zachází-li však příliš daleko a brání nám vidět skutečnost, jaká opravdu je, pak nám spíše škodí. …". (Urban, 2020)

Proces zobecňování se dotýká řady oborů a je ve středu jejich zájmu se střídavou intenzitou. Lze dospět ke shodě v tom, že onen proces je individuální, ovlivňuje ho řada faktorů jak vnitřních (např. zrání mozku, zdravotní stav jedince, motivace), tak vnějších (např. filosofie vzdělávání dané společnosti, podnětnost prostředí, způsob práce učitele). Rovněž panuje shoda v tom, že tímto procesem ze stejné výchozí situace dospějí všichni ke stejné úrovni zobecnění. I za předpokladu, že ono zobecnění nebude obsahovat jevy nepodstatné, možné jako plynoucí z výchozí situace, přesto se u jednotlivců bude úroveň zobecnění možná lišit mírou provazby na realitu, respektive na výchozí situaci.

I když budeme, jako vyučující, mít dostatek podkladů pro posouzení onoho procesu u žáka (videozáznam, audiozáznam, grafický či jiný času odolávající produkt žákova postupu při řešení didaktické situace, problému), přesto nemusíme dojít ke shodě v názorech, kam až v procesu zobecnění daný žák dospěl. Pro ilustraci využiji osobní zkušenosti, kdy se na Univerzitě v Parmě v roce 2012 diskutovalo z pohledu zobecňování nad situacemi, které ve svém výzkumu analyzovala P. Vighi a které byly následně začleněny do odborného článku ve sborníku mezinárodní konference. Tím nijak nezpochybňuji to, co bylo publikováno. Zdůrazňuji, že (v publikacích i v praxi) hodnocení míry zobecnění je náročné a že je někdy nejednoznačné. Součástí diskusí je i to, zda bylo dosaženo vrcholu procesu, tedy abstrakce. Dle mého názoru je diskutabilní, zda závěry vždy oprávněně hodnotí výstup jako úroveň, která odpovídá abstrakci, pokud se toto neověřovalo ještě jiným typem aktivity. Autoři různých oborů připouštějí, že zejména žáci v raném školním věku, a dle mého i slabší žáci na 2. st. ZŠ, mohou někdy dospět tímto procesem až do úrovně abstrakce, avšak pouze ve vazbě na izolovanou didaktickou situaci a ještě časově nestabilně. Respektive je nutné připustit, že na úrovni abstrakce se žáci nemusí ani na 2. st. ZŠ vždy pohybovat. Jak ukazují některé studie v analýzách žákovských postupů a výstupů řešení, v jednom tematickém okruhu může docházet k různým stupňům zobecnění, tedy dle situace k větší či menší provázanosti s realitou až po situaci, kdy je žákovo myšlení vzdálené každodennímu reálnému světu. K tomu může přispívat jak způsob zadání problému, tak i důraz na užití specifické metody řešení či vybraného komunikačního kódu (Kaslová, 2006, 2023).

3. Zobecňování a různé obory

Pro stručnost situaci zjednodušíme a pouze naznačíme okruhy problémů. Proces zobecňování je patrný ve filosofii. Zde je nápadné, jak při vymezování pojmů jsou důležitá východiska. U filosofů najdeme různé typy pojmů, z nichž se vyčleňují dva nezávislé na procesu zobecňování: prázdný, unikum. Můžeme si snadno klást otázky, jak je v kterém filosofickém proudu kladen důraz na zobecňování a případně jakou hraje roli (např. Aristoteles a Platón). Filosofické proudy tedy více či méně ovlivňují nejen pojetí vzdělávání, ale i výzkumu jak na úrovni zadávání, tak interpretace.

Jiný přístup k zobecňování můžeme sledovat u neurologů, pro které je stěžejní vývoj, fungování a aktuální stav nervové soustavy. K tomu se relativně úzce váží i přístupy speciálních pedagogů. V lékařství může mít slovo generalizace i jiný význam: rozsev.

Odlišný přístup k zobecňování v proměně časů lze sledovat u společnosti, v sociálních a politických vědách i v praxi (potřeby a zájmy společnosti, její směřování, což se m. j. odráží v oblasti reklamy, médií v souvislosti především v práci s daty a jejich interpretaci. Toto nepřímo ovlivňuje způsob myšlení jednotlivců i skupin, včetně žáků, což v poslední době vynutilo klást větší důraz na kritické myšlení. Zde se již některé manipulatnivní techniky pojmenovávají (fake news, unáhlené zobecnění apod.).

Z pohledu sociologie např. Široký mluví o procesu zobecnění jako o procesu tvoření tříd/y. Jeho charakteristika procesu ukazuje na dlouhodobější proces: „metoda, při níž se oddělují nepodstatné, nahodilé vlastnosti zkoumaného jevu či objektu od vlastností obecných a podstatných“ (Široký, 2011, s. 32). Proces zobecňování (tamtéž) neztotožňuje a priori s abstrakcí jako jiní: „Abstrakce vytváří vědecké pojmy, kategorie, přírodní a společenské zákony, převádí reálné hodnoty do soustavy všeobecně užívaných symbolů.“

Kognitivní psychologie měla svá období, kdy se onomu procesu věnovala, ale náhle vidíme jistý odklon, který je zdůvodňován složitostí tohoto procesu. Můžeme zde sledovat používání znaků v zástupné roli v procesu učení, styly učení, poznávací procesy na nichž se zobecňování podílí, aniž by byl termín zobecnění/generalizace použit (např. Lafon, Weil-Abras). Víc než o třídění a třídách se u pojmotvorného procesu obecně zmiňuje kategorizace (např. Eysenk, Kane 20, Sternberg,) která neklade na tvorbu kategorií tak striktní podmínky jako třídění. Její zavedení umožňuje lépe pracovat s různými modely zrání pojmů (procesu zobecnění) a vysvětlit odlišnosti.

Speciální skupinu tvoří informatika, která dle Wikipedie (2023) chápe generalizaci nadřazeně k zobecnění a využívá pro vymezení biologickou terminologii: „generalizace (má) význam zobecnění struktury nebo funkcionality množiny prvků na prvek jiný (generalizovaný, obecný). V objektově orientovaném přístupu se generalizace objevuje v souvislosti s pojmem dědičnosti, kdy třída předků objektu má všechny společné vlastnosti svých potomků. Potomci ale mohou mít vlastnosti změněné nebo nové a budou se od sebe vzájemně lišit“

V geografii, informatice, geometrii a metodologiích se můžeme setkat s nový spojením: „grafické generalizace“, která stojí na zjednodušování znakového klíče a změnu parametrů; „normativní výběr“ vychází z vypočteného normativu, který určuje maximální (minimální) množství prvků potřebných k zobecnění; „náhodný výběr“ a jeho vymezení jako podmínka nutná pro proces zobecnění ve zkoumané realitě.

Ve studijních materiálech Rainy River District School Board najdeme k pojmu generalization další pohled na zobecnění, a to úžeji vztažený k žákům: Zobecňování chápe jako schopnost mozku (žáka/studenta). Generalizace je schopnost žáka/studenta uplatňovat dovednost za různých podmínek (tzv. generalizace podnětů), schopnost uplatnit dovednost jiným způsobem (generalizace odezvy) a také uplatňovat tuto dovednosti v průběhu času (tzv. udržování). Jejich přístup umožňuje dávat zobecnění do vztahu s kompetencemi. Rozlišují tři typy zobecňování: a) schopnost (potenciál); b) samotná funkce mozku; c) využití tohoto procesu. Z toho plynou tři fáze procesu zobecňování: 1. stimulus; 2. zobecňující odezva; 3. dovednost aplikovat/využít.

V lingvistice již od minulého století vidíme systematickou práci s vymezením významu „pojem“ a v souvislosti s tím i je jeho zrání stojící na modelu trojúhelníka „ABC“, kde výška v_c se v daném procesu prodlužuje. To se následně promítá do užívané terminologie: konkrétní, abstraktní pojmy, jednotlivina, obecnina, konceptuální zobecnění, významová změna jako rozšíření. Biologie, lékařství, neurologie, psychologie: vývoj mozku, vývoj osobnosti - egocentrismus (brání zaujmout jiný pohled na situaci), který může omezit zobecnění, podobně jako aktuálně nenasycené potřeby jak biologické, tak emoční, sociální a další; omezená zkušenost; je řazeno pod konvergentní myšlení; rozlišuje aktuálně zobecnění chybné, unáhlené, subjektivní. Sociologie se zabývá zobecněním v současnosti relativně nejuceleněji i svými přesahy a vazbou na procesy manipulativní a kritické myšlení; rozlišuje zobecnění neoprávněné, nesprávné a nadměrné.

Shrneme-li to, co jednotlivé obory ve vztahu zobecňování akcentují, pak vidíme jisté rozdíly, které nám mohou usnadnit náš didaktický pohled na celý proces. Jsou zde ovšem průřezově různé pohledy na abstrakci: a) abstrakce je jistá úroveň, je vrcholem procesu zobecňování, kterým jedinec musí projít a ne u každého pojmu je možné dospět do abstrakce v závislost na druhu pojmu; b) abstrakce je proces směřující pouze ze světa reality do světa abstrakce a zpravidla se zkoumá zda v abstrakci jedinec již je, nebo ne; c) abstrakce je pro autora synonymem pro zobecnění, což ovšem vede ke sporu v řadě výše uvedených oborů a následně k nejasnostem i v didakticky orientovaném výzkumu.

4. Zobecňování v matematice

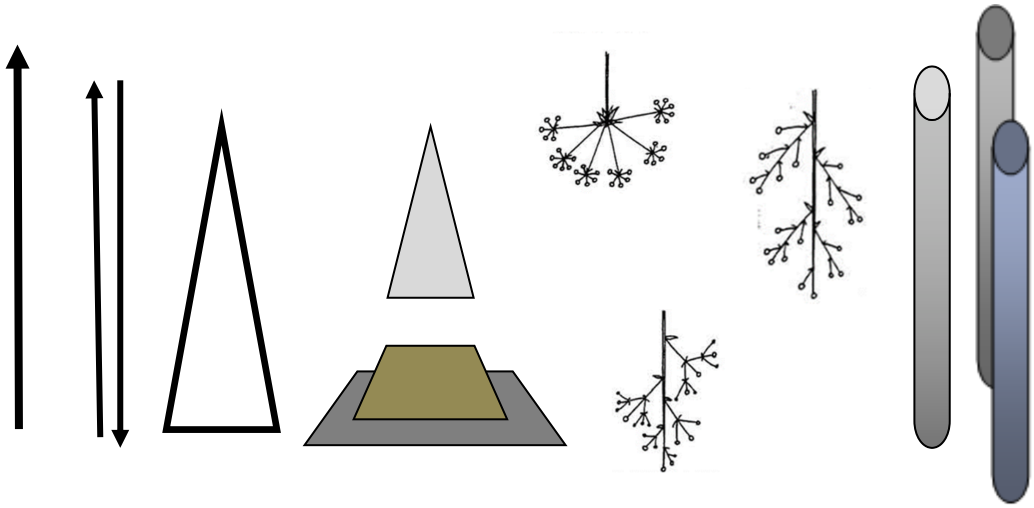
Matematika se zabývala zobecňováním z pohledu zrání vybraných pojmů, komplexněji to bylo pak ve dvou oblastech: a) zrání geometrických pojmů (např. VanHiele); b) přechod od aritmetiky k algebře, na což reagovaly i národní i mezinárodní projekty (např. celoitalský projekt ArAl; knižně vyšly výsledky pod vedením editorky N. Malara) a konference, což se odrazilo i v publikační činnosti (např. Springer: Aproaches to algebra). Jistým způsobem můžeme souvislost s tímto procesem sledovat již u analýzy didaktických situací navazujících na teorii didaktických situací G. Broussseaua (2002), dílčím způsobem v souvislosti s kritickým myšlením, či dalšími typy myšlení, které se na řešení matematických problémů podílejí. Vedle toho se vyskytovala celá řada dalších výzkumů národních či individuálních v souvislosti s profesním růstem autorů (např. doktoráty, habilitace), pro které proces zobecňování sice nebyl hlavním sledovaným proudem, nicméně tvořil součást analýzy sledovaných dat. Dnes se podobně ukrývá proces zobecňování ve výzkumech věnovaných žákovské argumentaci.

Jen zřídka se popisují jisté fáze procesu zrání pojmů; např. Van Hiele a rovinné útvary, avšak praxe ukazuje i sociokulturní odchylky a závislost zrání na dalších faktorech jako např. na věku, ve kterém se poprvé cíleně s rovinným tvarem/útvarem jedinci setkají. Ani tento výstup nelze plně přijmout na univerzální úrovni. Ve vlastní praxi na 2.r. ZŠ i na VŠ jsem se setkala se zobecněním, které bylo v rámci podnětů korektní, avšak ze širšího pohledu nedostatečné a „zapouzdřené“ natolik, že působilo jako blokátor dalšího poznání. Jiný druh zobecnění nebyl z pohledu matematiky korektní, díky asociačnímu myšlení a ulpění na nepodstatných jevech, nicméně o zobecnění se jednalo. Kaput (1999) mluví o fázích algebraizace, zjednodušeně: a) formalizace zobecněných poznatků, b) s oporou o vztahové myšlení odvození vzorce, c) modelování v rámci argumentace k procesu zobecnění, d) přechod od zobecněných poznatků na úrovni výpočtů k abstrakci a práci se vztahy (mezi strukturami). To ovšem vylučuje mentální skoky, vhled, což najdeme u talentů.

Jak se ukazuje i příkladů ve sborníku Generalization in mathematics at all educational leves z roku 2012. Zobecňování je ve výzkumech pojato spíše implicitně, vezměme nejen evropské výzkumy z devadesátých let a počátku 21. století věnované modelování v matematice, kde model je jistým zjednodušením reality na jedné straně a na druhé straně specifickou vizualizací abstraktního, což s sebou nese nejen prezentaci jevů podstatných, ale úskalí existence i jevů nepodstatných.

5. Modely zobecňování

V návaznosti na jiné obory i didaktika matematiky tvořila ve své historii řadu modelů, které měly vystihnout proces zobecňování. Modely lze připodobnit k různým botanickým modelům: vedle lineárního či pouhého trojúhelníkového statického/dynamického je proces zobecňování možné vizualizovat jako strom, květenství lata, hrozen a podobně.



Obrázok 1: Modely lineární jednosměrný, obousměrný, trojúhelníkový, pyramidový patrový, okolík, hrozen, tubusový

Co je modelům společné? Vycházejí se z rozmanitých zkušeností jedince, který postupem času komparací, zvědomováním, zjednodušováním, korekcí v závislosti na pestrosti situací (včetně didaktických v matematice) dochází do cíle, který je prezentován jako výsledek zužování, redukce znaků až se případně všechny cesty sejdou „v jednom bodě, na jedné úrovni“. Jde o modely, které jistým způsobem zjednodušují, někdy dokonce idealizují realitu, se kterou se student po nástupu do praxe setká.

Jsou ovšem žáci, kteří projdou určitou fází zobecnění u jednotlivých skupinek, tam provedou dílčí více či méně správné zobecnění, ale pak „jedou v paralelních komínech“, ty nepropojují a již dál zobecňující kanál nezužují: např. pro žákyni JZ v 8. r. ZŠ existovaly následující číselné obory: *„zlomky, desetinná čísla s konečným desetinným rozvojem - prý racionální, pak desetinná s nekonečným desetinným rozvojem ….. to jsou možná ta iracionální, nebo taky ne, pak reálná, to jsou ta co jsou na číselné ose, ale tam jsou taky přirozená, ale s těma počítáme, kdežto s reálnými ne*.“ Ilustrujme na kazuistikách, pro MŠ v 8. r.: *„máme trojúhelníky, pak čtyřúhelníky, pak n-úhelníky a pak mnoho úhelníky*“. Oba zmínění žáci v řešení i argumentacích prokazovali, že mluví o různých světech, které toho mají málo společného: pro JZ *„čísla, některý nejdou zapsat, už si nepamatuju který, asi pí“;* pro MŠ *„jsou v rovině, ale tam je i přímka, … musíme rýsovat úsečky? Jo a počítáme u n-úhelníků obsah, … někdy.“*

Přecenění univerzálnosti modelů a výrazné zjednodušování situací může vést k pocitu učitelů, že teorie je od praxe odtržena. Toto lze ukázat při algoritmizaci dělení se zbytkem v oboru N_0 již v 6.r. ZŠ. Podobně proces zobecňování postupuje ve hrách při hledání strategií, např. u soliterní kalkulační hry Passians „13“ (na konferenci 2 dny s DM, dílna 16. 2. 2023) se častěji vyskytuje proces blízký patrové pyramidě. V aktivitě hledání hodnoty povrchu (Kaslová, přednáška UK PEDF 15.6. 2021) se při práci s tabulkou proces zobecňování blíží strategii hroznů, u postupu od popisu konstrukcí k jejich programování se vyskytuje často lineární proces zobecnění, u slabších žáků model okolík.

7. Závěry

Konference CIEAEM74 v Malmö v roce 2023 opakovaně zdůrazňovala jak v jednotlivých příspěvcích, tak závěrech, že předčasné zavedení vzorců blokuje myšlení v daném oboru a hlubší pochopení dané problematiky. Snaha zavést rychleji žáky do úrovně abstrakce např. prostřednictvím vzorců či jako v sedmdesátých letech minulého století zavedením pojmu množina již do 1.r. ZŠ se ukazuje jako naivní, nerespektující žákovu zkušenost, zrání jeho nervové soustavy a ve svém důsledku rychle děti dělí na ty, „kterým Pánbůh nadělil a kterým nikoli". Matematika se tak stává doménou vyvolených, může tak směřovat k mechanickému zvládání řešení bez hlubšího pochopení. Mason (1996) přirovnává zobecňování k životodárné krvi matematiky, což z RVP ZV neplyne.

To ukazuje na aktuálnost diskuse k dané problematice zejména v době, kdy uvažujeme o zjednodušení a změnách v hodnocení s oporou o kompetence v matematice, jejichž koncepce je založena na použití různých druhů myšlenkových procesů. Sice hovoříme o mentálních reprezentacích, ale nemáme prokazatelné nástroje k tomu, abychom opravdu věděli, na jaké úrovně tyto reprezentace jsou. Zcela jistě žák při komunikaci s okolím užívá ty reprezentace, o kterých předpokládá, že jim bude druhá strana rozumět, nebo ty, které umí užít, což nemusí být nutně to, s čím mentálně operuje, což souvisí s používáním komunikačních kódů (Kaslová, 2006) i s didaktickým kontraktem (Brousseau, 2002). Diagnostika žáka na konci povinné školní docházky, ani známkování nevypovídají nic o tom, jak dalece obecně žák v matematice myslí, ani zda a kde se pohybuje dominantně na úrovni abstrakce. Nabízejí se otázky: zda je to možné zjistit a jaký by to mělo smysl pro život samotného. Z diskusí na posledních konferencích se ale jeví tato problematika klíčová pro pojetí curiculí a učebnic, případně didaktických doporučení, v neposlední řadě vhodnou formou i pro žáka samotného.

LITERATÚRA

[1] Aristoteles *O duši.* Praha, Jan Laichter, 1942.

[2] Brousseau, G. Theory of didactical situations in mathematics. New York, Kluwer AP, 2002. ISBN 978-0-7923-4526-8

[3] Gardner, H. The Mind's New Science: A History Of The Cognitive Revolution. New York, Basic Books, 1987. ISBN 0465046355.

[4] Herskowitz, R., B. Schwarz a T. Dreyfus. Abstraction in Context: Epistemic Actions. Journal for Research In Mathematics Education, 2001., roč. 32, č. 2, s. 195–222. ISSN 00218251.

[5] Jacob, E. K. Classification and Categorization : A Difference that Makes a Difference. Library Trends, 2004. roč. 52, č. 3, s. 515–540. ISSN 00242594.

[6] Kaslová, M. Transformace mluveného kódu do matematického symbolického kódu a naopak. In: Slavík, J. (Ed.) Multidisciplinární komunikace: problém a princip všeobecného vzdělávání, s. 266-282. Praha, UK PEDF, 2006. ISBN 80-7290-199-0

[7] Keane, M. a W. M. Eysenk Kognitivní psychologie. Praha, Akademia, 2008, ISBN 978-80-200-1559-4

[8] Kaput, J. Teaching and leraning a new algebra. In E. Fennema a T. Romberg (Eds.) Mathematics classroom that promote understanding, s. 133-155. Mawah, L.E. Associates, 1999. ISBN 0-8058-3027-8.6666

[9] Lafon, R. Vocabulaire de psycopédagogie et psychiatrie de l´enfant Paris: PUF, 2001, ISBN 2-13-0520499 2001

[10] Mason, J. Expressing generality and roots of algebra. In N. Bedanrz, C. Kieran a L. Lee (Eds.) Approaches to algebra: perspectives for Research and Teaching, s. 65-86. Dotrecht, Kluwer AP, 1996, ISBN 978-0-7923-4168-0

[11] Mc Mullin,E. Galilean idealization. In History and Philosophy of Science, 1985, roč. 16, č. 3, s. 247–273. ISSN 0039-3681

[12] RVP ZV 2023 dostupné 2.9. 2023 na https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/

[13] Slovník cizích slov. Dostupné 10.5.2023 na https://slovnik-cizich-slov.abz.cz/web.php/slovo/generalizace-generelisace

[14] Sternberg, J. R. Kognitivní psychologie. Praha:Portál, 2002, ISBN 80-7178-376-5

[15] Tatsis, K. a B. Maj-Tatsis (Eds.). Generalization in mathematics at all educational eleves. Rzeszow, WUW, 2012ISBN 978-83-7338-780-5

[16] Urban, J. Zobecňování pomáhá myslet. Dostupné 2.6. 2023 na https://www.ebschool.cz/zobecnovani-pomaha-myslet-pokud-ho-vsak-prehanime-skodi

[17] Weil-Abras, A. *L´homme cognitif*. Paris, PUF, 2001, ISBN 2-13-052383-8

Michaela Kaslová
UK Pedagogická fakulta
Magdalény Rettigové 4
CZ – 116 39Praha 1
e-mail: michaela.kaslova@pedf.cuni.cz

INTERAKTÍVNE, KREATÍVNE, ONLINE – PLATFORMA DESMOS

MIRIAMA KMECIKOVÁ

ABSTRAKT. *V dnešnej digitálnej dobe prirodzene používanie digitálnych technológií preniklo aj do školského prostredia a do vyučovania matematiky. Mnohé digitálne nástroje dokážu učiteľom uľahčiť prácu na hodinách (ako napr. GeoGebra, HotPotatoes, Maple, WolframAlpha a ďalšie). Jednou z užitočných online platforiem je aj Desmos. Umožňuje učiteľom zadávať a tvoriť interaktívne aktivity aj so spätnou väzbou pre žiakov. Pozrieme sa na ňu z pohľadu učiteľa, žiaka aj z pohľadu tvorcu úloh.*

Využívanie online platforiem na hodinách matematiky

Digitálne technológie sa v školskom prostredí začali vo veľkej miere používať nie len na informatike ale aj na iných predmetoch. Hlavnou motiváciou žiakov a učiteľov pre používanie týchto technológií je rozvíjanie digitálnych kompetencií žiakov. Podľa rámca DigComp 2.2 by mal každý občan disponovať digitálnymi kompetenciami, ktoré sú rozdelené do piatich oblastí – informácie a dátová gramotnosť, komunikácia a spolupráca, tvorba digitálneho obsahu, bezpečnosť a riešenie problémov. Na hodinách matematiky je veľký priestor na rozvíjanie týchto kompetencií – hlavne v oblasti riešenia problémov, komunikácie a spolupráce a tiež dátovej gramotnosti. V reakcii na tieto skutočnosti máme v súčasnosti pri vyučovaní matematiky možnosť využívať široké portfólio digitálnych platforiem, nástrojov aj e-learningových kurzov. Didaktika digitálneho vyučovania matematiky sa tak stáva témou nielen vo výskume, ale aj v príprave budúcich učiteľov matematiky (Koreňová, 2015).

S nástupom e-learningových nástrojov a online platforiem prichádza otázka o kvalite obsahu, ku ktorému sa môžu učitelia ale aj žiaci dostať na internete. Ďalšou dôležitou otázkou je aj to, či tieto materiály prispievajú k poznávaciemu procesu žiaka. Aby sa tak dialo, je dôležité, aby žiak počas práce na úlohách dostával spätnú väzbu (Šveda, Lukáč, Engel, 2006).

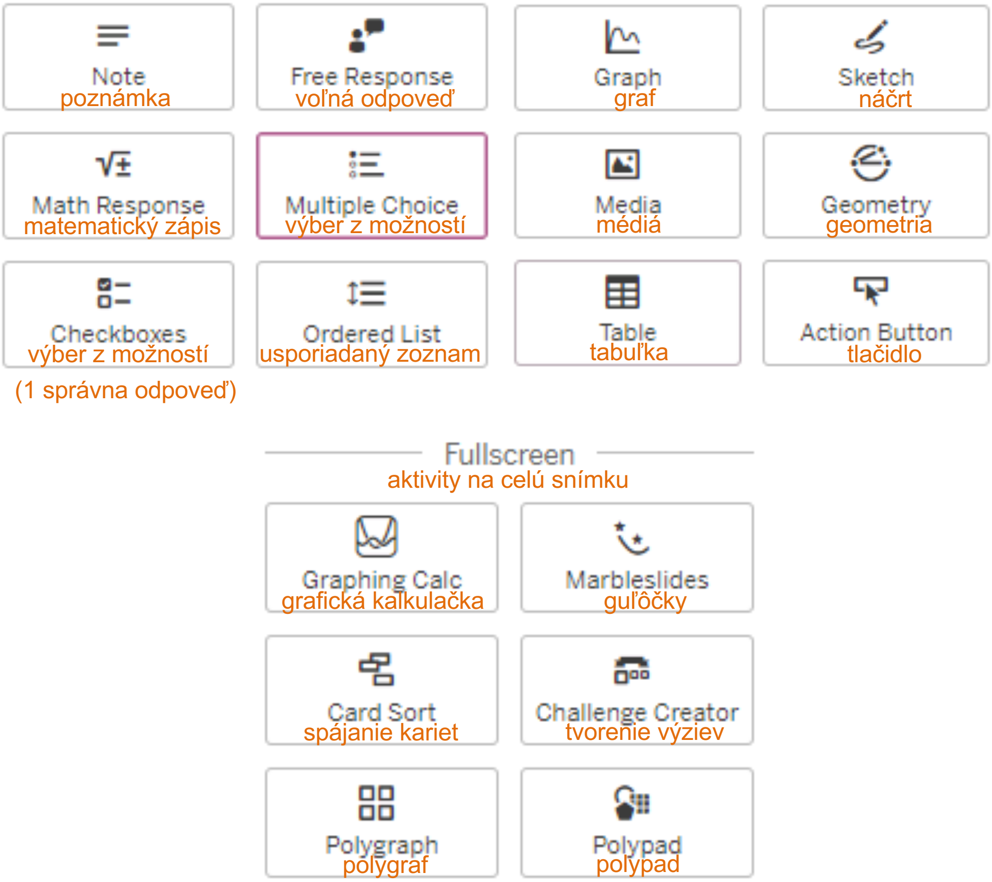
Využívaniu digitálnych technológií na hodinách matematiky sa nevyhneme, ale je treba dbať na to, akú kvalitu má obsah, ktorý žiakom sprostredkúvame a či napomáha ich procesu učenia sa a rozvíjaniu digitálnych kompetencií žiakov.

Platforma Desmos

Desmos je voľne dostupná online platforma, ktorá ponúka učiteľom a žiakom priestor na spoluprácu nielen na hodinách matematiky, ale aj počas práce na domácich zadaniach. Umožňuje tvoriť množstvo typov matematických zadaní, ktoré poskytujú žiakom interaktivitu, spätnú väzbu a pomoc v ich samostatnej poznávacej činnosti. Okrem toho obsahuje aj ďalšie funkcionality, ktorými sú grafická (2D aj 3D) a vedecká kalkulačka, rysovacie plátno či funkcia výpočtu matíc. V nasledujúcej časti sa na aktivity vytvorené na tejto platforme pozrieme z pohľadu žiaka, z pohľadu učiteľa aj z pohľadu tvorcu úloh.

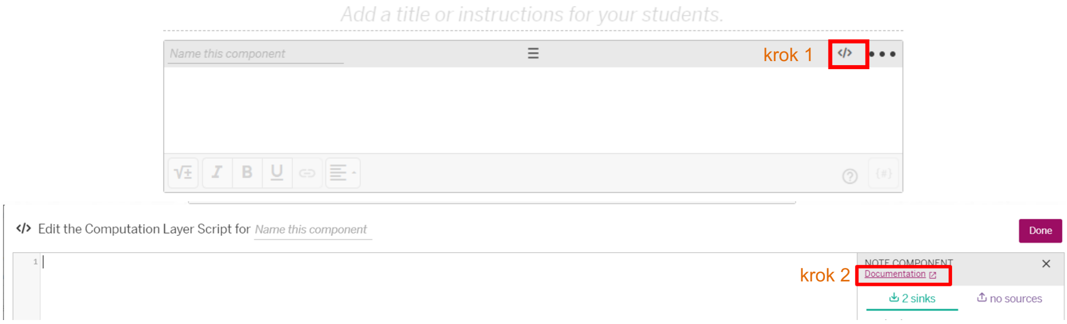
Desmos z pohľadu tvorcu úloh

Na platforme Desmos je možné vytvoriť rôzne typy úloh. Prehľad komponentov, ktoré sú k dispozícii je na Obrázku 1. Aktivita môže pozostávať z viacerých snímok, pričom na každej z nich počet komponentov závisí od povahy zadania úlohy a tvorca si ho sám navolí pridaním komponentov. Ak si zvolí aktivitu na celú obrazovku, žiadny iný komponent už na túto snímku pridať nemôže.



Obrázok 1: typy komponentov a aktivít na celú snímku

Komponenty sa dajú navzájom prepojiť, bez ohľadu na to, či sa nachádzajú na rovnakej alebo na rôznych snímkach aktivity. Tvorca úloh tak vie urobiť pomocou tlačidla vyznačeného na Obrázku 2 vpravo hore. Po zakliknutí tlačidla sa zobrazí okno, kde sa naprogramujú vlastnosti daného komponentu. Tvorca úloh vie daný komponent nastaviť tak, aby dal žiakovi po zadaní odpovede spätnú väzbu. Pri každom komponente sú k dispozícii iné možnosti programovania, najčastejšie úpravy komponentov a kódy k nim sa nachádzajú v záložke documentation (vyznačená na Obrázku 2). Ak je potrebné komponent upraviť spôsobom, ktorý sa nenachádza v spomínanej záložke a tvorca nevie kód sám vytvoriť, mnoho kódov a inšpirácií na úpravu komponentov nájde v diskusnom fóre na adrese cl.desmos.com.



Obrázok 2: upravovanie komponentov

Zaujímavou možnosťou je aj využitie aktivity na celú snímku s názvom Polypad. Polypad je taktiež online platforma určená pre tvorbu matematických úloh, ktorú môžete so svojimi žiakmi používať aj nezávisle. Ponúka ďalšie typy komponentov a tým rozširuje možnosti pri tvorbe aktivít. Úlohy vytvorené v platforme Polypad vie tvorca úloh jednoducho pridať aj do svojej aktivity v Desmose.

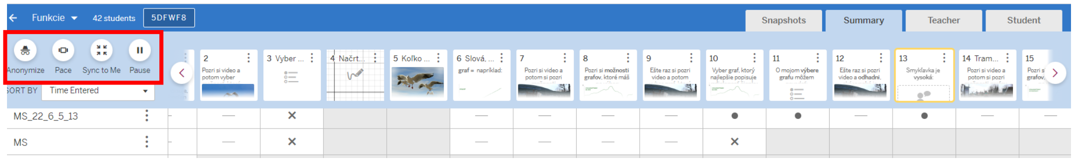
Na platforme Desmos sa nachádza aj množstvo materiálov pripravených inými učiteľmi, ktoré si môže každý tvorca skopírovať a adaptovať (napr. preložiť z cudzieho jazyka do slovenčiny, zmeniť niektoré nevyhovujúce komponenty alebo niektoré časti aktivity odstrániť). Takisto sú aktivity tvorcu sprístupnené ostatným používateľom, čo poskytuje možnosť zdieľať svoje pripravené aktivity s kolegami. Ak si ale tvorca nepraje, aby boli jeho aktivity sprístupnené všetkým používateľom, vie si toto obmedzenie nastaviť pre každú aktivitu zvlášť.

Desmos z pohľadu učiteľa

Učiteľ si môže na platforme vytvoriť triedy zadaním mailových adries žiakov. V takom prípade je potrebné, aby si žiaci vytvorili svoje vlastné konto. Potom už iba vyberá zo svojho portfólia vytvorených aktivít a zadáva úlohy celej triede naraz. Ak učiteľ využíva platformu iba občasne a nechce vytvárať triedy, môže aktivitu žiakom zadať aj pomocou kódu (vtedy žiaci navštívia adresu student.desmos.com a pomocou kódu sa prepoja na aktivitu), alebo im poslať link na aktivitu. Pri žiadnej z týchto možností nie je pre žiakov nutné si vytvárať konto. Učiteľ pri zadávaní aktivity rozhoduje, ako dlho bude žiakom prístupná na vypracovanie.

Po zadaní aktivity má učiteľ k dispozícii dashboard (horná lišta zobrazená na Obrázku 3, pod ňou sa nachádza zoznam žiakov a ich odpovede), kde sú zhrnuté informácie o tom na ktorej zo snímok aktivity sa daný žiak nachádza a aké odpovede žiaci zadali. Odpovede ostanú v dashboarde zozbierané aj po ukončení aktivity, učiteľ sa k nim môže kedykoľvek vrátiť, odpovede ohodnotiť a dať žiakom spätnú väzbu.

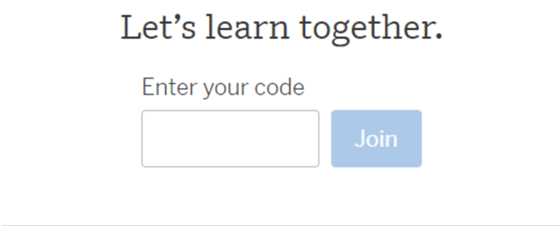
Ak je aktivita zadaná počas hodiny matematiky, učiteľ má možnosť pomocou tlačidiel (vyznačených na Obrázku 3 vľavo hore) usmerňovať prácu žiakov. Pomocou tlačidla Pace učiteľ vyberie rozsah snímok, na ktorých môžu žiaci pracovať, tlačidlo Sync to Me presunie všetkých žiakov na snímku, kde sa práve nachádza učiteľ a tlačidlo Pause zastaví všetkých žiakov na snímke, kde práve pracujú. Všetky tlačidlá zabraňujú žiakom presúvať sa v danom čase na iné snímky aktivity.



Obrázok 3: Dashboard

Desmos z pohľadu žiaka

Ako už bolo spomenuté v časti pre učiteľov, ak chceme žiakom sprístupniť úlohy, ktoré pre nich máme pripravené na platforme, máme na to dve možnosti. Ak má učiteľ vytvorené triedy a žiaci majú vytvorené konto na platforme, zadané aktivity nájdu po prihlásení sa do svojho konta. Ak žiaci nemajú vytvorené konto, učiteľ im poskytne kód aktivity. Žiaci po zadaní adresy student.desmos.com uvidia obrazovku z Obrázka 4 a po zadaní kódu svojej aktivity sa na ňu priamo prepoja.



Obrázok 4: pripojenie do aktivity pomocou kódu

Výhody a nevýhody

Najväčšou výhodou platformy Desmos je široké spektrum úloh, ktoré sa dajú vytvoriť. Plusom je aj to, že si tvorca úloh priamo pri tvorbe aktivity vie nastaviť spätnú väzbu, ktorú žiak dostane hneď po zadaní odpovede – žiakovi toto usmernenie môže pomôcť v samostatnej práci a učiteľovi pri opravovaní žiackych riešení. Pri hodnotení práce žiakov je nápomocný sumár odpovedí žiakov, ktoré sa ukladajú a učiteľ sa k nim môže kedykoľvek vrátiť. Platforma je tiež jednoduchá a intuitívna na ovládanie, v prípade nejasností a otázok je k dispozícii diskusné fórum s odpoveďami. Ak učiteľ nemá čas na tvorbu úloh, výhodou je možnosť adaptovať už vytvorené úlohy.

Nevýhodou je, že platforma sa zatiaľ nedá používať v slovenčine. Užívateľ má ale na výber z viacerých svetových jazykov, medzi ktorými je aj angličtina. Na používanie platformy na hodinách matematiky je nutné pripojenie na internet a pri niektorých typoch aktivít, ktoré sa nesprávne zobrazujú na mobilných zariadeniach aj iné technické vybavenie (napr. tablety, notebooky, počítače). V prípade, že škola nemá dobré internetové pripojenie a technické vybavenie, je možné používať aktivity vytvorené v platforme aspoň ako domáce zadania.

Príklady aktivít

V nasledujúcej časti uvedieme niekoľko adries, na ktorých môžete nájsť rôzne typy aktivít vytvorených na platforme Desmos.

Aktivity:

- Aktivita na celú obrazovku – guľôčky (marbleslides) preložená do slovenčiny https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/602d82d5b244113a98e0ee71
- Aktivita na celú obrazovku – polygraf (polygraph) preložená do slovenčiny https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/623b6355b2d7395a2d76554a
- Inšpirácia na aktivitu – príbehy a grafy preložená do slovenčiny https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/602d7b3211e72e3a645f244e
- Inšpirácia na aktivitu – aktivita z workshopu na Dva dni s didaktikou matematiky https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/64f034f6569c13e5dce8192e

Užitočné adresy:

- Platforma Desmos - https://www.desmos.com/
- Prihlásenie pre žiakov - https://student.desmos.com/?r=w.hd
- Diskusné fórum - https://cl.desmos.com/
- Aktivity od iných tvorcov - https://teacher.desmos.com/?r=w.hd

Záver

Platforma Desmos stojí za vyskúšanie hlavne preto, že sa v nej spájajú digitálne technológie s možnosťou tvorby množstva rôznych typov úloh. Učiteľ má stále pod kontrolou obsah aktivity, keďže aj aktivitu, ktorú preberie od iného tvorcu si môže upraviť. Používanie platformy tiež učiteľom umožňuje uľahčiť si prácu pri opravovaní žiackych riešení a poskytovaní spätnej väzby.

LITERATÚRA

[1] KOREŇOVÁ, L.: Digitálne technológie v školskej matematike, Bratislava, KEC FMFI UK Bratislava, 2015, ISBN 978-80-8147-026-4

[2] ŠVEDA, D., LUKÁČ, S., ENGEL, R.: Interaktivita a spätná väzba v e-learningových matematických kurzoch,V: Sojka, P., Němec, J.:Sborník 3.ročníku konference o elektronické podpoře výuky SCO 2006. Brno, Masarykova univerzita, 2006, ISBN 80-210-3923-X

[3] VUORIKARI, R., KLUZER, S., PUNIE, Y.: DigComp 2.2: The Digital Competence Framework for Citizens – With new examples of knowledge, skills and attitudes,, Luxembourg, Publications Office of the European Union, 2022, ISBN 978-92-76-48882-8

Mgr. Miriama Kmeciková
Ústav matematiky, Prírodovedecká fakulta
Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach
Jesenná 5
040 01 Košice
e-mail: miriama.kmecikova@student.upjs.sk

ARGUMENTÁCIA V ŠKOLSKEJ MATEMATIKE

IVETA KOHANOVÁ

V poslednom desaťročí viacero krajín vyzdvihlo potrebu klásť väčší dôraz na žiacku argumentáciu, matematické uvažovanie a zdôvodňovanie. Takýto trend neobchádza ani Slovensko a prispôsobujú sa mu aj učebné osnovy. Predmet matematika je na realizáciu tohto cieľa obzvlášť vhodný, lebo na rozvoj argumentácie môže využiť svoj súčasný obsah bez toho, aby ho nejako podstatne rozširoval alebo dopĺňal.

Z výskumu, ktorý sme uskutočnili v rámci EÚ projektu MaTeK, vieme, že mnoho učiteľov (nielen na Slovensku) by rado zlepšilo žiacke kompetencie v oblasti argumentácie a zdôvodňovania, no nevedia, ako na to, a to aj pre nedostatok vhodných učebných materiálov. V príspevku predstavím zbierku úloh pre 5.-9. ročník ZŠ, ktorá vznikla v rámci projektu MaTeK, a ktorá bude dúfajme dobrým pomocníkom pri rozvíjaní argumentácie a matematického uvažovania všetkých žiačok a žiakov. Predstavím typy úloh, ktoré vedú k argumentácii, k porovnávaniu riešení, ich hodnoteniu a k diskusii a tiež pripomeniem rôzne typy argumentácie, s ktorými sa možno stretnúť v školskej matematike.

Záznam príspevku je dostupný na:
https://www.youtube.com/watch?v=SpCjdYkn5f4&t=595s

Príspevok vznikol v rámci projektu H2020 č. 951822 „Enhancement of Research Excellence in Mathematics Teacher Knowledge“, MaTeK, https://www.projectmatek.eu/

PaedDr. Iveta Kohanová, PhD
NTNU, Gunnerus gate 1,
Trondheim, 7080, Nórsko
Iveta.kohanova@ntnu.no

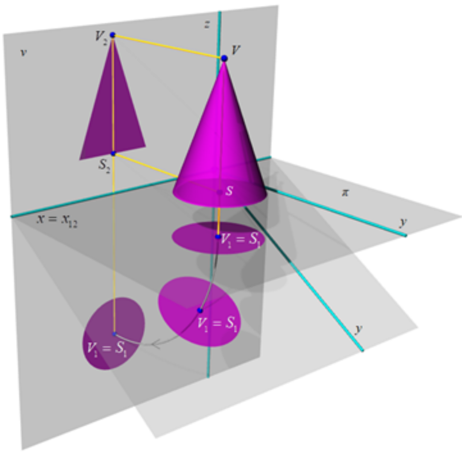
ZOBRAZOVACÍ METODY NEJEN V TECHNICKÉ PRAXI

MARTIN KUKUČÍK

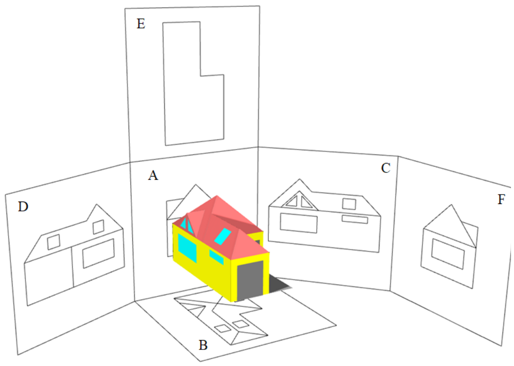
Abstrakt. *Příspěvek vychází z diplomové práce Zobrazovací metody pro technickou praxi a zaměřuje se zejména na propojení deskriptivní geometrie a matematiky. Věnuje se názorným axonometrickým promítáním a zobrazení elementárních těles a jiných objektů v těchto pomítáních. V příspěvku se podíváme na kapitoly s didaktickým přesahem.*

Když si koupíme nový nesmontovaný nábytek a rozhodneme se jej složit, první, co potřebujeme, je návod na montáž. V návodu očekáváme obrázky, ze kterých nám bude zřejmé, jak máme postupovat. Obrázky v návodech chceme mít v názorném promítání. Názorných promítání máme několik a můžeme si z nich vybírat. Podívejme se na názorná axonometrická promítání, se kterými se můžeme setkat i v matematice, zejména v kapitole stereometrie. Součástí RVP očekávaných výstupů pro gymnázia je, aby žák zobrazil ve volné rovnoběžné projekci hranol a jehlan a řešil stereometrické úlohy motivované praxí. Kromě samotných konstrukcí ve volném rovnoběžném promítání je často důležitý dobrý náčrt. Dobrý náčrt nám může u některých úloh značně zjednodušit řešení.

Nejvíc rozšířený způsob zobrazování v technické praxi je pravoúhlé promítání na několik průměten. Při promítání na dvě a více průměten volíme průmětny tak, aby byly na sebe kolmé. Objekt tak můžeme promítnout až na šest navzájem kolmých průměten (obrázek 2), které můžeme reprezentovat stěnami krychle. Obvykle se však promítá do dvou nebo tří průměten (obrázek 1).

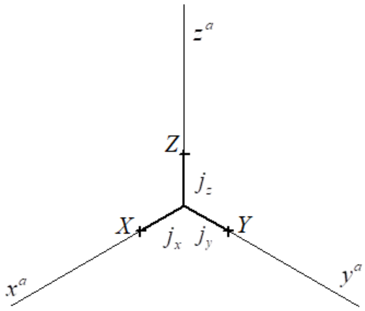


Obrázek 1 – rotační válec v promítání na dvě navzájem kolmé průmětny



Obrázek 2 – zobrazení domu v promítání na šest průměten

Názornost je ale v těchto promítáních malá. V návodu ke smontování skříně nebo k názorné ukázce tvaru tělesa v učebnicích matematiky je potřebné zvolit názornější promítání, například axonometrii. Axonometrií budeme rozumět rovnoběžné promítání útvarů spojených s pevně zvolenou kartézskou soustavou souřadnic v prostoru E_3 na jednu průmětnu. Přitom budeme promítat tak, aby průmětem os souřadnic byla trojice různých přímek (obrázek 3). Na základě analytického vyjádření, které lze najít v [1] se dají speciální typy axonometrií zavést pomocí úhlů, které svírají souřadnicové osy a poměru axonometrických jednotek z obrázku 3. Na obrázku 4 jsou uvedeny nejčastější volby speciálních typů axonometrií a jejich určení.

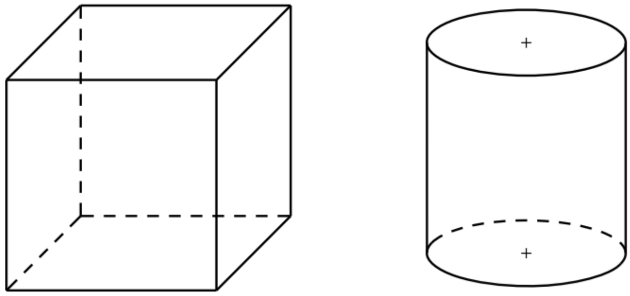


Obrázek 3 – zadání axonometrie pomocí axonometrických os a axonometrických jednotek

název promítání	úhel, který svírají souřadnicové osy			poměr jednotek
	$x^a y^a$	$y^a z^a$	$x^a z^a$	$j_x : j_y : j_z$
vojenská perspektiva	90°	135°	135°	1:1:1
planometrie	90°	135°	135°	$1:1:\frac{2}{3}$
	90°	150°	120°	
kavalírní perspektiva	135°	90°	135°	1:1:1
technická isometrie	120°	120°	120°	1:1:1
technická dimetrie	132°	97°	131°	$1:\frac{1}{2}:1$
kabinetní axonometrie	135°	90°	135°	$\frac{1}{2}:1:1$

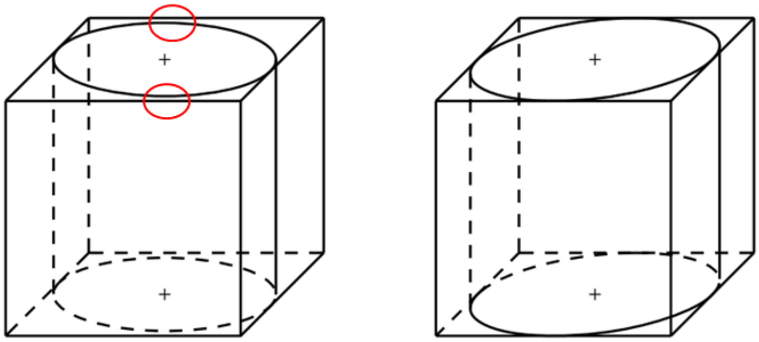
Obrázek 4 – tabulka nejčastější volby speciálních typů axonometrií a jejich určení

Při pohledu na poslední řádek tabulky na obrázku 4 připomínají hodnoty standartní volné rovnoběžné promítání. Nejedná se ovšem o volné rovnoběžné promítání. Ve škole se volné rovnoběžné promítání využívá, jedná se o výsledek kabinetní axonometrie. Volné rovnoběžné promítání pracuje se pouze s průměty, které jsou výsledkem kabinetní axonometrie. Nepřidávají se další průměty – například do půdorysny, aby bylo promítání vzájemně jednoznačné. Musíme dodat informaci, které těleso zobrazujeme. Dodrží-li se všechna pravidla zobrazování v kabinetní axonometrii, včetně popisu bodů, jedná se o vzájemně jednoznačné zobrazení. Ve středoškolské matematice zobrazujeme ve volném rovnoběžném promítání zejména hranatá tělesa. Průmět oblých těles, např. rotačního válce nebo koule je složitější. Když jsem zadával žákům úkol načrtnout obraz krychle a obraz rotačního válce, nejčastěji se objevily průměty na obrázku 5.



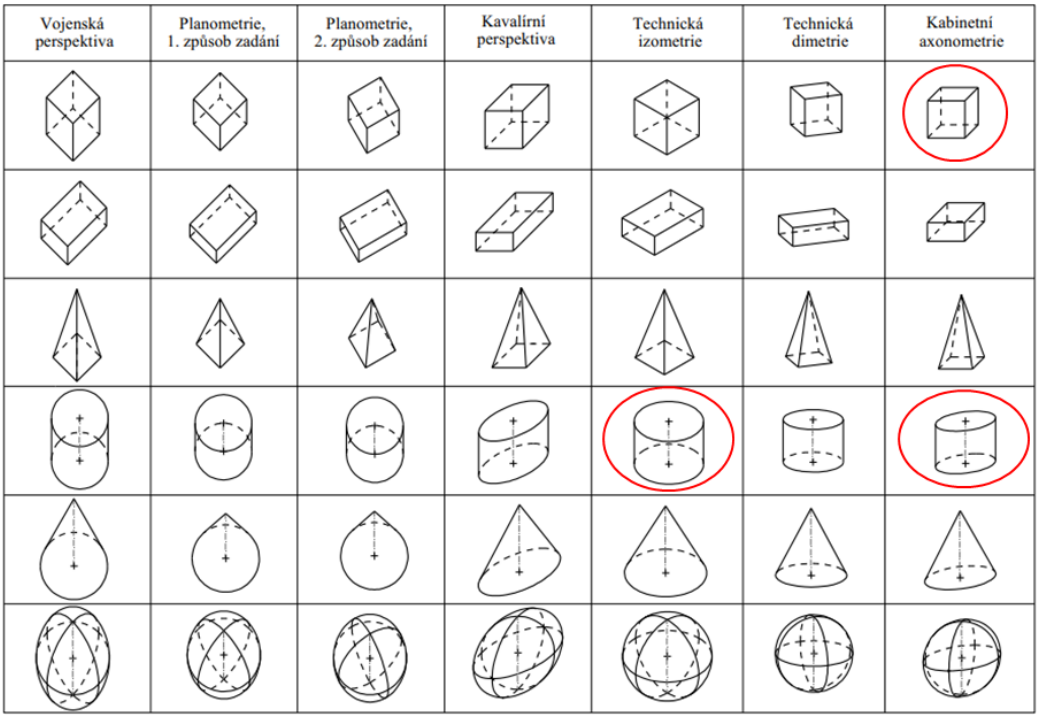
Obrázek 5 – průmět krychle a rotačního válce

Následoval úkol – vepsat průmět rotačního válce do průmětu krychle. Zde narážíme na problém (obrázek 6). Elipsa, která je průmětem podstavy rotačního válce, se nedotýká všech průmětů hran podstavy krychle. Průměty těles tedy byly sestrojeny v různých promítáních.



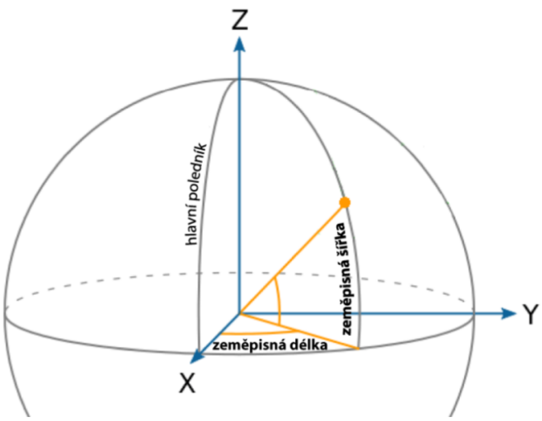
Obrázek 6 – průmět rotačního válce vepsaného do krychle

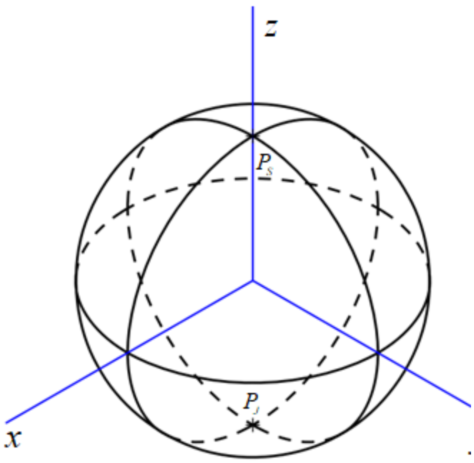
Zatímco průmět krychle odpovídá kabinetní axonometrii, průmět rotačního válce byl sestrojen v technické izometrii. Každé z uvedených promítání má své výhody a nevýhody. Další nevýhoda kabinetní axonometrie je například zobrazení tělesových uhlopříček v krychli. Nastává situace, kdy průmět jedné uhlopříčky v části splývá s průměty hran krychle. Totožný problém se objeví také u technické izometrie. Výhodnější je zvolit například technickou dimetrii, ve které jsou průměty uhlopříček názornější



Obrázek 7 – tabulka přehledu průmětů elementárních těles v axonometrických promítáních

Občas se setkáváme s nesprávnými průměty některých těles, jak je tomu například na obrázku 8. Poloha souřadnicových os ukazuje na kavalírní perspektivu nebo kabinetní axonometrii. Obrysem koule je kružnice, přičemž poledníky se protínají v severním pólu, který ježí na obrysu koule. Při pohledu na obrázku 7 vidíme, že ani v jednom případě nemůžou ležet póly na obrysu koule. Chceme-li zachovat obrys koule jako kružnici, musíme zvolit axonometrické promítání, například technickou izometrii (obrázek 9).





Obrázek 8 – nesprávný průmět koule, převzato z file:///C:/Users/42077/Downloads/03%20Zem%C4%9B%20jako%20vesm%C3%ADrn%C3%A9%20t%C4%9Bleso%20(1).pdf

Obr. 9 – příklad správného zobrazení obrázku 8

Zobrazování je důležitou součásti nejen matematiky, technické praxe ale i každodenního života. Pomáhá také rozvíjet prostorovou představivost, která je součástí různých IQ testů. Žákům je nápomocné při řešení polohových a metrických úloh nejen ve stereometrii. Dobrý náčrt řekne například v analytické geometrii mnohdy více, než popis pomocí rovnic.

Literatura

[1] KUKUČÍK, Martin: Zobrazovací metody pro technickou praxi [online], Praha, 2022 [cit. 2023-10-15], dostupné z: https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/180703/120437335.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Diplomová práce. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta. RNDr. Petra Surynková, Ph.D.

[2] ČERNÝ, Jaroslav a Milada KOČANDRLOVÁ. Konstruktivní geometrie. Praha: ČVUT, 1995. ISBN 80-01-00838-x

[3] ŠVERCL, Josef. *Technické kreslení a deskriptivní geometrie pro školu a praxi*. Praha: Scientia, pedagogické nakladatelství, 2003. ISBN 80-7183-297-9

[4] URBAN, Alois. *Deskriptivní geometrie I*. Praha: 1982, Alfa, vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry

[5] HARTMANN Erich, *Darstellende geometrie für Bauingenieure*. [online] Fachbereich Mathematik Technische, Universität Darmstadt, WS 05/06 Dostupné z: https://www2.mathematik.tu-darmstadt.de/~ehartmann/dgb.pdf

Mgr. Martin Kukučík
Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra didaktiky matematiky
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
Střední průmyslová škola zeměměřická a geografické gymnázium Praha,
Pod Táborem 300, 190 00, Praha 9
kukucik@spszem.cz

MATEMATICKÉ ÚLOHY NA ROZVOJ INFORMATICKÉHO MYSLENIA V PROSTREDÍ <COLETTE/>

JANKA MEDOVÁ

Odhaduje sa, že do roku 2030 bude 80% pracovníkov v technických a prírodovedných odvetviach potrebovať k svojej práci programovanie. Schopnosť riešiť úlohy a problémy pomocou počítačov a programovania sa nazýva computational thinking (informatické myslenie) a medzi hlavné zručnosti v tejto oblasti patrí (i) abstrakcia, (ii) algoritmické myslenie, (iii) automatizácia, (iv) dekompozícia, (v) debugging a (vi) zovšeobecnenie (Bocconi et al., 2016). Vzhľadom na úzke prepojenie týchto schopností so schopnosťou riešiť matematické problémy nie je prekvapujúce, že sa informatické myslenie v mnohých európskych krajinách dostalo do učebných osnov matematiky.

V prvej časti workshopu sme riešili úlohu z pravdepodobnosti, ktorá viedla k aktivite využívajúcej informatické myslenie, k simulácii náhodného procesu pomocou počítača. Ukázalo sa, že pre úspešnú realizáciu simulácie sú potrebné tak vedomosti o technológiách, ako aj viaceré zručnosti informatického myslenia, ako aj konceptuálne pochopenie rozdelenia pravdepodobnosti.

V druhej časti workshopu bol predstavený systém <colette/>, ktorý vznikol v rámci rovnomenného medzinárodného projektu (https://colette-project.eu) a vyriešime niekoľko ukážkových úloh (Milicic et al., 2021; Schmidthaler et al., 2023). Systém colette pozostáva z dvoch častí, webového portálu pre tvorbu gradovaných sérií úloh a aplikácie pre študentov, kde môžu zadať ich riešenie a skontrolovať si jeho správnosť. Na workshope účastníci v skupinách riešili úlohy o stavbách z kociek, ktoré využívali okrem automatizovanej kontroly kódu aj vizuálnu kontrolu správnosti riešenia pomocou rozšírenej reality. Zadania úloh sú dostupné v <colette/> aplikácii ako trasy číslo P31312 a P17311.

V závere worskhopu boli zhodnotené silné a slabé stránky prezetnovaných úloh a možnosť ich využitia vo vyučovaní matematiky na Slovensku.

Literatúra

[1] Bocconi, S., Chioccariello, A., Dettori, G., Ferrari, A., & Engelhardt, K. (2016). Developing Computational Thinking in Compulsory Education. In P. Kampylis & Y. Punie (Eds.). Luxembourg: European Commission, Joint Research Centre

[2] Milicic, G., van Borkulo, S. P., Medova, J., Wetzel, S., & Ludwig, M. (2021). Design and development of a learning environment for computational thinking: The erasmus+ project. In EDULEARN21 Proceedings (pp. 7376-7383). IATED

[3] Schmidthaler, E., van Borkulo, S., Cápay, M., Kristinsdóttir, B., Stäter, R. S., Läufer, T., ... & Lavicza, Z. (2023). Design and Evaluation of Computational Thinking Tasks in the< colette/> Project: Experiences Gained from Workshops with Secondary and Grammar School Students in Austria, the Netherlands, and Slovakia

Janka Medová
Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied a informatiky,
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre,
Tr. A. Hlinku 1, 949 01 Nitra e-mail: jmedova@ukf.sk

AKO VNÍMAME "=" ?

EMÍLIA MIŤKOVÁ

ABSTRAKT. *V príspevku sa od konkrétnej motivácie z vyučovania dopracujeme k dôležitosti vnímania „rovná sa“ ako stavu. Zdôrazníme význam vnímania identity.*

Vzájomná komunikácia učiteľa a žiaka má pri riešení úloh rôzne špecifiká. Stáva sa, že učiteľ, ktorý najprv v hlave rýchlo vyhodnotí správnosť riešenia, sa následne pri prvom komentovaní a hodnotení úloh častejšie prikláňa ku konštatovaniam ako napríklad: „ Je to dobre.“, „Je to zle“, „To sa rovná.“, „To sa nerovná“. Sú to vyjadrenia vyjadrujúce stav. Na druhej strane, žiak často reaguje: „Urobil som to a to“, „Takto som to upravil“. Taký žiak pri komunikácii v prvých chvíľach neopúšťa uvažovanie v činnosti. Napríklad riešenia a vyjadrenia študentov na obrázku 1 a obrázku 2.

$$\lim_{x\to-2}\frac{(x+1)(x^3+5x^2+3x)}{(x^2-4)(x+1)} = \lim_{x\to-2}\frac{x^3+5x^2+3x}{x^2} - \lim_{x\to-2}\frac{x^3+5x^2+3x}{-4} = \cdots$$

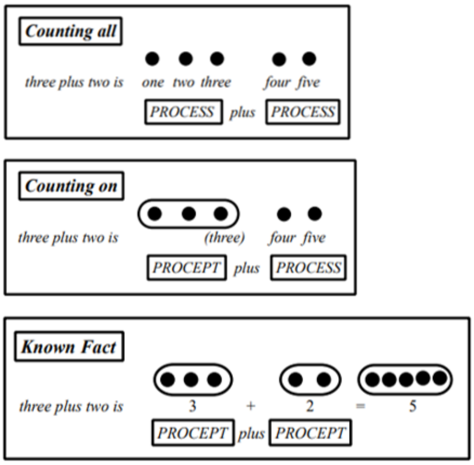
Obrázok 1: Študent: „Rozdelil som zlomok.“

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{3x} = \lim_{x\to0}\overset{1}{\frac{\sin 2x}{2x+x}} = 1+\frac{1}{x}$$

Obrázok 2: Študent: „Vybral som si jednotku.“

Je dôležité nájsť „spoločnú reč“. Ak by učiteľ ostal len na konštatovaní stavu a žiak len na opise čo urobil, k náprave riešenia by zjavne nedošlo. Väčšinou je to učiteľ (čo je vlastne jedna z jeho úloh), ktorý sa snaží pozrieť na úlohu očami daného žiaka, prepne sa do stavu činného riešiteľa a začne klásť pomocné otázky, úlohy. No na rozdiel od žiaka, ostáva učiteľ často (možno vzhľadom na svoje skúsenosti s vyhodnocovaním správnosti) zameraný na stav. Napríklad, keď si pri úprave výrazov vedome drží podmienku, že výraz naľavo od „rovná sa“ sa má rovnať výrazu napravo od „rovná sa“. A až v kontexte tejto podmienky uvažuje čo môže a čo nemôže urobiť.

Je dobré si uvedomiť, že k takejto odlišnosti pohľadov môže pri komunikácii nastať. Zameraniu na proces a koncept sa venovali už autori (Gray & Tall, 1991). S ich ilustráciou procesu, konceptu a zavedeniu proceptu sa síce skôr stretneme na didaktike matematiky prvého stupňa (obrázok 3), no vyjadrenia: „ ...uvažujeme o dualite medzi procesom a konceptom v matematike, osobitne o tej, v ktorej sa rovnaký znakový systém používa ako pre proces (taký ako je sčítanie dvoch čísel $3+2$ tak i pre produkt tohto procesu (súčet $3+2$) ... Dvojznačnosť zápisu umožňuje mysliacemu človeku pružne v myšlienkach prechádzať od procesu, ktorým dáku úlohu rieši ku konceptu, pomocou ktorého s ňou manipuluje ako časťou širšej mentálnej schémy.“ (In : Hejný, 1999), vieme šikovne reflektovať aj v situáciách počítania vyššie uvedených limít. Napríklad uvedomenie si identity $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ by mohlo výrazne napomôcť k správnemu vyriešeniu úlohy. Vnímanie $x^2 - 4$ ako „od x^2 odpočítaj 4“ dáva študentovi iné možnosti manipulácie ako vnímanie $x^2 - 4$ je súčin $(x - 2)(x+2)$. Ďalej aj uvedomenie si, že pre vhodné x vieme $x^2 - 4$ identifikovať ako obsah štvorca so stranami $(x-2)$ a $(x+2)$ nám opäť rozšíri naše možnosti v riešení rôznych úloh.



Obrázok 3

Pozrime sa teraz podrobnejšie, čo o identite uvádza (Hejný & kol, 1990): „Identita či rovnosť – to je uvedomenie si toho, že dve rôzne pomenovania znamenajú to isté. Napríklad $\sqrt{2}$ a $\frac{2}{\sqrt{2}}$, alebo $\sin 15°$ a $\cos 75°$, alebo $(x+y)^2$ a $x^2 + 2xy + y^2$ a pod. Zmysel identity je v tom, že umožňuje pre skúmaný objekt zvoliť to meno, to vyjadrenie, ktoré je v danom kontexte najvhodnejšie.“ To je vlastne zhrnutie dôvodu, prečo je posilňovanie vnímania identity dôležité.

Ukážka úlohy, ktorou môže učiteľ ľahko overiť či žiak správne identifikuje identitu je na obrázku 4.

$$8 + 7 = \boxed{} + 4 = \underline{\qquad}$$

Obrázok 4

Hoci sa „rovná sa“ využíva na prvom stupni aj v úlohe znaku pre porovnanie, táto jeho funkcia vyjadrujúca stav „pravej“ a „ľavej strany“ býva často na vyššom stupni opomenutá. No nielen vykonávanie postupných úprav výrazov podľa zadefinovaných pravidiel, ale aj uvedomenie si identít je potrebné podporovať a posilňovať aj na druhom a aj na treťom stupni. Doprajme teda žiakom dostatočné množstvo úloh, aby sa ich vnímanie „rovná sa“ posilnilo.

LITERATÚRA

[1] GRAY E. & TALL D.: Duality, Ambiguity and Flexibility in Successful Mathematical Thinking, Coventry, University of Warwick, 1991

[2] HEJNÝ M.: Procept in Zborník Bratislavského seminára z teórie vyučovania matematiky, Bratislava, Vydavateľstvo UK, 1999

[3] HEJNÝ M. & kol.: Teória vyučovania matematiky 2, Bratislava, SPN, 1990

Mgr. Emília Miťková, PhD.
FMFI UK v Bratislave
Mlynská dolina F1
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: emilia.mitkova@fmph.uniba.sk

PRAVDĚPODOBNOSTNÍ ABAKUS A CHIP FIRING

JAN SEDLÁK

ABSTRAKT. *Pravděpodobnostní abakus představuje málo známý nástroj sloužící k výuce Markovových řetězců. Tyto řetězce jsou klíčovým prvkem pravděpodobnostního a statistického zkoumání, nacházejí uplatnění napříč různými disciplínami, včetně modelování, strojového učení a ekonomie. Cílem pravděpodobnostního abaku je intuitivní a snadné představení těchto komplexních konceptů během výuky. V tomto stručném příspěvku si představíme tento nástroj a prostřednictvím několika jednoduchých příkladů nahlédneme do jeho praktického využití.*

Úvod

V tomto článku se seznámíme s nástrojem, který má mimořádný potenciál pro výuku nejen kombinatoriky a pravděpodobnosti na středních školách, ale také pro složitější témata, jako jsou teorie grafů, a především Markovovy řetězce. Inspirací pro vytvoření tohoto nástroje byly právě Markovovy řetězce a jejich inovativní výuka, kterou inicioval německý matematik Arthur Engel. V další části článku se nebudeme zabývat podrobným teoretickým vysvětlováním fungování této metody. Namísto toho se zaměříme na praktické využití a představíme dva příklady, na nichž ukážeme a popíšeme pravděpodobnostní abakus. První úloha je velmi jednoduchá, slouží pouze k vysvětlení celého procesu, zatímco druhá úloha představuje výzvou i pro mnohé středoškolské učitele. Překvapivé je, že s pomocí ji lze vyřešit s minimálním úsilím, aniž bychom museli mít hlubší znalosti matematiky. I když se v tomto článku nebudeme podrobně věnovat teorii, uvedeme zde odkazy na původní články zabývající se pravděpodobnostním abakem. Tam lze najít podrobná a formálně dokázaná tvrzení, o která se budeme při řešení příkladů opírat [1,2]. V následující kapitole představíme pravděpodobnostní abakus a proces Chip firing. Při popisu by bylo vhodné používat terminologii teorie grafů, tj. hrany, vrcholy a podobně, nicméně pro účely tohoto příspěvku bude vhodné se těmto termínům raději vyhnout, neboť jedním z cílů tohoto článku je představení této metody v takové formě, aby bylo možné ji využít i při výuce na středních školách, kde se studenti obvykle s teorií grafů nesetkají.

Proces Chip firing a pravděpodobnostní abakus

Pravděpodobnostní abakus si můžeme představit jako deskovou hru pro jednoho hráče. Úloha, kterou budeme řešit, vytvoří herní plán, na který umístíme žetonky (chips), které následně budeme posouvat po hracím plánu. Po nějaké době hra/proces končí a my z výsledků této hry můžeme vyhodnotit pravděpodobnost různých jevů. Abychom mohli pravděpodobnostní abakus správně popsat a okomentovat, je vhodné nejprve se zaměřit na proces zvaný Chip firing.

V tomto kontextu můžeme Chip firing představit jako pravidla pro posouvání žetonků po hrací ploše. Na následujícím obrázku vidíme hrací plán, který je složen ze tří políček, na kterých mohou být umístěné žetonky (černé tečky). Pro lepší pochopení procesu a tvorby pravděpodobnostního abaku uvedeme i úlohu, ke které se následující abakus vztahuje.

„Házíme spravedlivou kostkou. Pokud hodíme liché číslo, vyhráváme. Hodíme-li číslo 6, házíme znovu. Pokud hodíme číslo 2, nebo 4, prohráváme. “

Hrací plocha, kterou jsme vytvořili pro tuto úlohu, má tři políčka. Střední políčko reprezentuje stav, kdy házíme kostkou. Políčko vpravo představuje naši výhru a políčko vlevo reprezentuje naši prohru. Pokud z jednoho stavu můžeme přejít do druhého, do hracího plánu zakreslíme orientovanou šipku. U všech šipek si navíc napíšeme takzvanou přechodovou pravděpodobnost. Tato hodnota odpovídá šanci, že se z jednoho stavu dostaneme do druhého. Z prostředního políčka se dostaneme do políčka označující výhru s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Hodíme-li šestku, zůstáváme na stejné pozici, neboť házíme znovu. Proto na obrázku vidíme šipku vedoucí zpět do prostředního vrcholu s pravděpodobností $\frac{1}{6}$. Poslední šipka nás vede na políčko, které odpovídá prohrávajícímu stavu. Jelikož prohráváme při padnutí čísla 2 a 4, šipka je ohodnocena přechodovou pravděpodobností $\frac{1}{3}$. Nyní zbývá už jen vysvětlit, jak probíhá posouvání neboli střelba (firing) žetonků (chips). Na obrázku vlevo máme umístěno 7 žetonků v centrálním stavu. Nyní přesuneme maximální možné množství žetonků mezi jeho sousední políčka (tj. políčka, kterým vede šipka). Žetonky při procesu nemůžeme dělit. Proto vezmeme pouze 6 žetonků, které přerozdělíme. Tři žetonky půjdou vpravo (polovina z šesti), jedna třetina žetonků bude posunuta vlevo (to jsou dva žetonky) a jeden žetonek se vrátí zpět do stejného vrcholu. Poslední žetonek, který ležel na prostředním políčku, zůstane na svém místě. Povšimněme si také, že některé stavy v sobě hromadí žetonky, neboť z nich už nevede žádná šipka. Takové stavy budeme označovat jako *absorpční*. Ostatní stavy budeme označovat jako *tranzitní*.

Nyní můžeme přejít k řešení prvního příkladu, na kterém si dovysvětlíme zbývající pravidla, která musíme při hře dodržet, pokud chceme pravděpodobnostní abakus úspěšně použít.

*Obrázek 1: Chip firing: vrchol před střelbou a po střelbě (*střelba = posun žetonků)*

První úloha: hod mincí

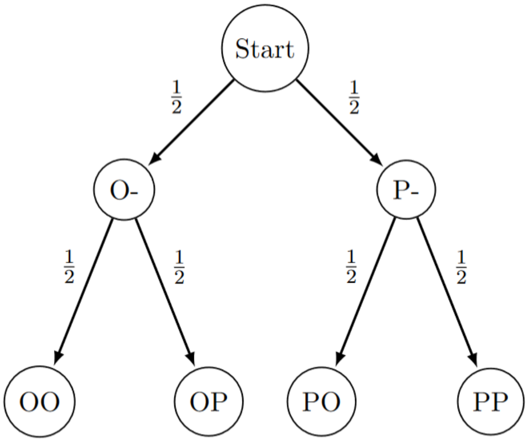
První úlohu, kterou vyřešíme pomocí pravděpodobnostního abaku, bude klasická úloha, která zní takto.

„Hodíme dvakrát spravedlivou mincí. Jaká je pravděpodobnost, že nám padne dvakrát orel?“

Nejdříve si sestavíme hrací pole – vypíšeme si všechny možnosti, které mohou nastat a jednotlivé stavy propojíme šipkami.

Na obrázku vidíme hrací plán. Políčko, které odpovídá začátku procesu je označeno slovem „Start“ (i v dalších příkladech budeme takové políčko označovat jako *startovní*). Následně nakreslíme šipku vedoucí na políčko s označením „O_“ (to odpovídá tomu, že jsme prvním hodem hodili orla) a stejně ohodnocenou šipku vedeme i do stavu, který odpovídá tomu, že padne panna (políčko s označením „P_“). Obdobně jsou označena i ostatní políčka, například značku „OP“ nese políčko, které odpovídá stavu, kdy jsme hodili nejdříve orla a následně pannu.

Nyní přejdeme k použití abaku. Do startovního vrcholu budeme vhazovat nové žetonky a vždy když nějaký stav bude moci žetonky vystřelit, vystřelí je. Žetonky vhazujeme do abaku tak dlouho, dokud nejsou všechny tranzitní stavy opět prázdné. Ve chvíli, kdy se tak stane, proces zastavíme.

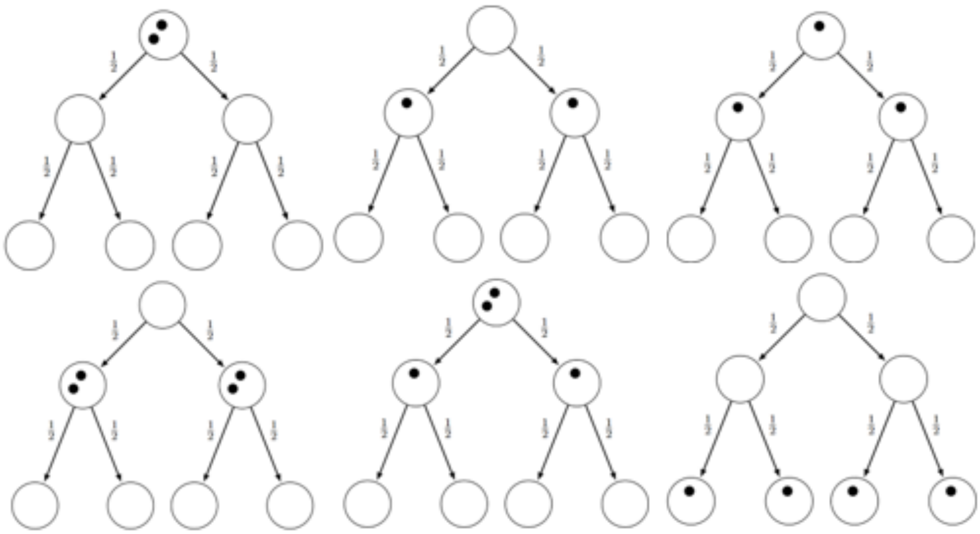


Hrací pole pro příklad 1

Výsledná pravděpodobnost, tedy odpověď na otázku: „Jaká je pravděpodobnost, že padne dvakrát orel?“, odpovídá poměru počtu žetonků v příslušném absorpčním vrcholu ku počtu žetonků, které jsme do abaku přidali celkem.

V tomto příkladě nám vychází, že pravděpodobnost, že se nám podaří hodit dvakrát orla je právě $\frac{1}{4}$, což odpovídá jednomu žetonku v příslušném absorpčním vrcholu ku počtu všech žetonků, které jsme museli do abaku přidat.

Možná si nyní říkáte, že tato metoda výpočtu je zbytečně složitá, a že výsledek můžeme vidět už z hracího plánu. U tohoto jednoduchého příkladu je to pravda, avšak u složitějších příkladů, kdy nemusí být ani vzdáleně zřejmé, jaká je výsledná pravděpodobnost, můžeme postupovat úplně stejným způsobem. Právě na jeden takový příklad se nyní podíváme.



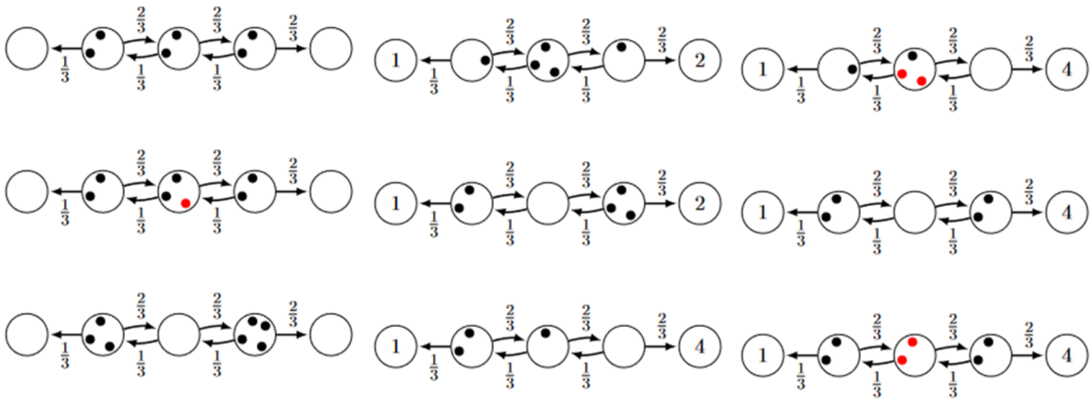
Obrázek 3: Pravděpodobnostní abakus, proces posouvání žetonků

Druhá úloha: Shoda v tenisu

Druhá úloha je mnohem složitější. Při řešení úloh jako je tato se mnohdy nemůžeme vyhnout pokročilým technikám jako jsou právě Markovovy řetězce anebo sčítání nekonečných řad. Jedná se o klasickou úlohu, ve které chceme vypočítat pravděpodobnost, s jakou tenisti vyhrají zápas. Úloha zní takto:

„Tenisový zápas se dostal do situace tzv. shody. V takovou chvíli mají oba hráči shodně bodů, nejbližší bod se počítá jako výhoda pro toho hráče, který jej získal. Získá-li týž hráč následující bod, vyhrává hru. Když jej nezíská, opět nastává shoda. Podávající hráč, říkejme mu hráč A, má šanci na získání bodu $\frac{2}{3}$ *zatímco druhý hráč, označme ho hráč B, má šanci pouze* $\frac{1}{3}$*. Určete pravděpodobnost, s jakou hráč A vyhraje hru.“*

Nejprve si sestavíme hrací pole, zřejmě budeme mít pět políček, které vidíme na obrázku 4. (Tranzitní políčka: shoda, výhoda hráče A, výhoda hráče B a absorpční stavy: výhra hráče A, výhra hráče B.)



Obrázek 4: tenisový zápas

Proč je tato úloha o tolik náročnější? Jedním z důvodů je například fakt, že není zřejmé, jak dlouho celý proces potrvá. V úvodním příkladu jsme věděli, že mincí hodíme dvakrát, ale v tomto případě nevíme, jestli zápas potrvá další dva míčky anebo třeba sto míčků. Abychom tento příklad vyřešili pomocí pravděpodobnostního abaku, je třeba využít jednoho triku. Při použití stejného postupu jako u prvního příkladu nemůžeme uspět, neboť budeme-li přidávat do abaku žetonky, už nikdy nenastane situace, kdy všechny žetonky opustí tranzitní vrcholy. Celý proces by tak nikdy neskončil a abakus by sloužil jen k získání aproximace pravděpodobností. Proto tentokrát nezačneme s prázdným hracím polem, ale na každé tranzitní políčko umístíme maximální množství žetonků, při kterém stav nemůže žetonky vystřelit. Protože kvůli přechodovým pravděpodobnostem budeme počty žetonků dělit třemi (při výstřelu posouváme jeden žetonek vlevo a dva žetonky vpravo), je třeba na každý tranzitní políčko umístit dva žetonky. Nyní stačí začít proces při stavu shody. Žetonky přidáváme tak dlouho, dokud se na hrací ploše neobjeví opět stejné počáteční rozmístění žetonků. Vpravo na obrázku můžeme vidět celý proces. (Pozn. Právě přidané žetonky jsou červené. V absorpčních vrcholech počítáme počty žetonků čísly.)

Na konci procesu vidíme, že v absorpčním vrcholu, který odpovídá výhře hráče A, jsou čtyři žetonky. Celkem jsme do abaku přidali pět žetonků, proto pravděpodobnost výhry prvního hráče je $\frac{4}{5}$, tedy 80%.

Závěr

Závěrem musíme zmínit několik faktů, které sice nejsou zřejmé, ale z důvodu stručnosti a čtenářské nenáročnosti jsme tyto informace záměrně vynechali. Výše uvedený postup vždy vede k výsledku, počáteční rozmístění žetonků se musí zopakovat, pokud do abaku na začátku hry umístíme maximální množství žetonků, které nespustí žádnou střelbu. Během procesu jsme využívali faktu, že nezáleží na tom, v jakém pořadí žetonky střílí v případě, kdy existuje více stavů, které mohou vystřelit. Tyto a mnohá další tvrzení (i jiné aplikace) abaku lze nalézt v článcích, které jsme zmínili již v úvodu. V tomto stručném článku jsme představili pravděpodobnostní abakus a jeho použití na dvou příkladech, které se velmi liší obtížností. Budete-li chtít na střední škole probírat kombinatoriku a pravděpodobnost hravou formou, pak právě pravděpodobnostní abakus může představovat ten správný nástroj.

LITERATURA

[1] Engel, Arthur. "Why does the probabilistic abacus work?." Educational Studies in Mathematics (1976): 59-69.

[2] Engel, Arthur. "The probabilistic abacus." Educational studies in mathematics (1975): 1-22.

Titul. Jan Sedlák, Mgr.
Škola Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta
ulice č Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
e-mail: deg.sedlak@gmail.com

ŠTUDENTI SO ZRAKOVÝM POSTIHNUTÍM SKÚMALI VLASTNOSTI FUNKCIÍ POMOCOU ZVUKU

MÁRIA STANKOVIČOVÁ

ABSTRAKT. *V príspevku sa podelíme o skúsenosti so študentmi so zrakovým postihnutím pri používaní aplikácie Desmos – Graphing Calculator. V rámci medzinárodného tábora ICC 2023 (International Camp on Communication and Computers 2023) sme pripravili workshop s témou Audio tracing of graphs, ktorého náplňou bolo skúmanie vlastností funkcií pomocou zvuku. Portál desmos.com ponúka široké využitie vo vyučovaní matematiky, no zamerali sme sa na prácu s aplikáciou Graphing Calculator, ktorá umožňuje doplniť vizuálnu reprezentáciu hodnôt funkcie zvukom. Zvuková reprezentácia vlastností funkcie je pre študentov so zrakovým znevýhodnením užitočným zdrojom informácií. Nevidiaci študenti používali aplikáciu s čítačom obrazovky a slabozrakí študenti používali zväčšovač obrazovky. Tzv. ozvučené grafy môžu byť zaujímavou pomôckou aj pre študentov, ktorí nemajú zrakové postihnutie.*

Príležitosť tvorí učiteľa

Hlavnou myšlienkou medzinárodného počítačového tábora ICC je podpora mladých ľudí so zrakovým postihnutím počas štúdia, aby mohli plnohodnotne rozvinúť svoj potenciál v odboroch, ktoré ich zaujímajú [1]. Organizácia je výsledkom spolupráce rôznych inštitúcií, ktoré sa venujú mládeži so zrakovým postihnutím (školy, univerzity, centrá podpory, únie, nadácie). Tento rok sa konal 28. ročník s 35 účastníkmi z 13 krajín. Komunikačným jazykom bola angličtina. Hosťujúcou krajinou bola Česká republika [2].

V ponuke bolo 30 všestranne zameraných workshopov na IKT, asistenčné technológie, užitočný softvér pre používateľov so zrakovým postihnutím, rozvoj prezentačných zručností, orientáciu v priestore a rôzne voľnočasové aktivity.

Centrum podpory študentov so špecifickými potrebami na Univerzite Komenského patrí do organizačného tímu a podieľa sa na príprave workshopov. Ponuku z našej strany tvorili dva workshopy – *Python on the web*, na ktorom sme sa s účastníkmi venovali základným programovacím konceptom v jazyku Python a *Audio tracing of graphs*, na ktorom sme účastníkov oboznamovali s aplikáciou Desmos – Graphing Calculator [3]. Predpokladáme, že skúsenosti, ktoré sme získali, môžu byť užitočné pre učiteľov matematiky.

Používanie technológií

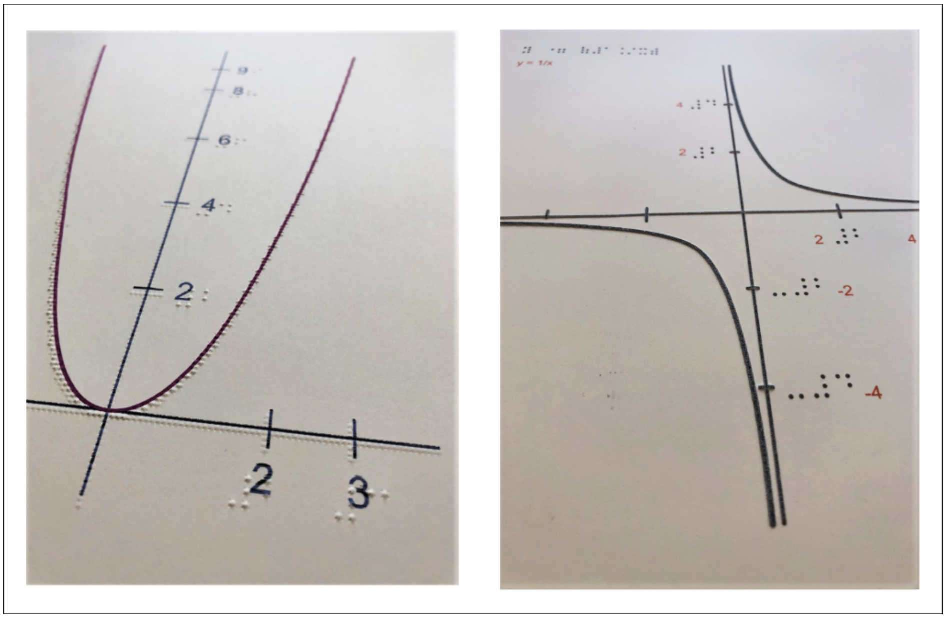
Na základe schopnosti rozpoznávať a interpretovať vizuálne podnety môžeme rozdeliť študentov so zrakovým postihnutím na dve základné skupiny – slabozrakých a nevidiacich. Každá skupina získava poznatky o okolitom svete odlišným spôsobom. Nedostatočný až chýbajúci zrak nahrádzajú ostatné zmysly, prevažne hmat a sluch [4].

Nevidiaci študenti používajú pri práci s počítačom pomocný softvér – čítač obrazovky, ktorý im prostredníctvom hlasovej syntézy číta text zobrazený na obrazovke. Informácie poskytuje lineárne, to znamená, že v danom okamihu len z jedného riadku, respektíve len z jedného okna. Neumožňuje pracovať s grafickou informáciou, čiže obrázky musia byť doplnené opisom alebo byť poskytnuté v alternatívnej forme. Spolu s čítačom obrazovky môže byť k počítaču pripojený brailový riadok, na ktorom sa text zobrazuje v Braillovom písme.

Slabozrakí študenti používajú pri práci s počítačom pomocný softvér – zväčšovač obrazovky, ktorým môžu prispôsobiť veľkosť písma a farebnú schému. Softvér môže poskytovať rozšírenie o čítanie zobrazeného textu hlasovou syntézou. Pri čítaní tlačených textov môžu študenti používať elektronickú čítaciu lupu.

Príprava workshopu

Prvým krokom našej prípravy bolo overenie prístupnosti aplikácie pre čítač obrazovky. Tvorcovia aplikácie ponúkajú podrobné informácie o prístupnosti pre používateľov čítačov obrazovky [5]. Podľa toho sme zostavili stručný manuál s vysvetlením základného ovládania aplikácie pomocou klávesových skratiek. Prešli sme si aplikáciu s čítačom obrazovky a zaznamenali informácie, ktoré čítač poskytuje o zobrazenom grafe. Na základe toho sme vytvorili zoznam pojmov, s ktorými sa študenti pri počúvaní môžu stretnúť (napríklad typy priesečníkov, vrcholy). Vybrali sme funkcie, ktorých grafy budú študenti počúvať a pri tom sa naučia aplikáciu efektívne používať. Grafy vybraných funkcií sme vytlačili reliéfne na brailovej tlačiarni (obrázok 1).



Obrázok 1: Ukážka grafov funkcií vytlačených reliéfne.

Ukážka z časti manuálu pre študentov

Po spustení aplikácie je kurzor nastavený v editačnom políčku na zadanie predpisu funkcie. Zadajte funkciu y=x a stlačte ALT+T, aktivuje sa zvukové sledovanie grafu. Budete počuť veľa užitočných informácií ako rozsah zobrazených osí x a y, počet kriviek, priesečníky aktívnej krivky s osami. Stlačením klávesu H spustíte zvukové prehratie krivky.

Rýchlosť prehrávania meníte klávesom ALT v kombinácii s číslami na numerickej klávesnici od 1 (najpomalšie) do 5 (najrýchlejšie). Zvuk sa prehráva smerom od záporných hodnôt X po kladné. V slúchadlách počujete záporné hodnoty v ľavom reproduktore a kladné hodnoty v pravom reproduktore. S narastajúcou hodnotou Y je zvuk vyšší. Pri klesajúcej hodnote Y je zvuk hlbší. Ak je krivka pod osou x, zvuk je zašumený.

Počas zvukového prehrávania grafov môžete prepínať nastavenie na predchádzajúcu krivku ALT+šípka nahor, na nasledujúcu krivku ALT+šípka nadol. Ak nie je aktivovaný zvukový režim, tak na prepínanie medzi predpismi funkcií slúžia šípky nahor a nadol.

Význam dôležitých bodov, na ktoré upozorňuje čítač obrazovky:

Intercept – bod, v ktorom krivka pretína os y [0,Y],

Zero – bod, v ktorom krivka pretína os x [X,0],

Undefined – prípad, ak funkcia nie je definovaná v bode X=0,

Extremum – lokálne maximum alebo minimum,

Intersection – priesečník kriviek.

Priebeh workshopu

Na workshop sa prihlásili traja účastníci, dvaja nevidiaci, ktorí používali čítač obrazovky NVDA[6] a jeden slabozraký, ktorý používal zväčšovač obrazovky ZoomText[7]. Oboznámili sa s orientáciou v aplikácii a funkcionalitou tlačidiel. Presun po tlačidlách aplikácie umožňuje kláves TAB nezávisle od spusteného čítača, respektíve zväčšovača obrazovky. Na úvodné zoznámenie s prostredím sme použili funkcie y = x a y = – x. Účastníci počúvali grafy a snažili sa identifikovať odlišnosti zvukov:

- ľavý reproduktor pre x < 0
- pravý reproduktor pre x > 0
- šum pre y < 0
- stúpajúca a klesajúca výška tónu podľa monotónnosti funkcie
- zvukový efekt na priesečníkoch.

Pre vytvorenie ucelenej predstavy dostali nevidiaci účastníci obrázky grafov vytlačených reliéfne. Mohli tak doplniť zvukový vnem aj hmatovým. Keďže mentálne predstavy, ktoré si nevidiaci študenti vytvárajú, nie sú obrazové, ale zakladajú sa na skúsenostiach získaných ostatnými zmyslami, je užitočné poskytnúť rôzne vnemy [6]. Slabozraký účastník tiež prejavil záujem o reliéfne vytlačený obrázok, aj keď mohol sledovať krivku na obrazovke.

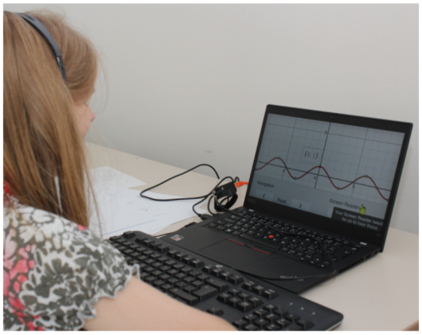
Po zvládnutí základnej orientácie v aplikácii si účastníci mohli postupne zadávať aj ďalšie predpisy funkcií:

- predpis $y = x^2$ zadali na klávesnici y=x^2.
- predpis $y = x^3$ zadali na klávesnici y=x^3
- predpis $y = \frac{1}{x}$ zadali na klávesnici y=1/x
- y=cos x.

Účastníci mali aj vlastné návrhy. Menili predpisy ponúknutých návrhov, a tiež skúsili logaritmickú a exponenciálnu funkciu. Pre ich vlastné návrhy sme nemali pripravené reliéfne vytlačené obrázky.

[6] Čítač obrazovky NVDA https://www.nvaccess.org/

[7] Zväčšovač obrazovky https://www.freedomscientific.com/products/software/zoomtext/



Obrázok 2: Účastník workshopu počúva priebeh grafu.

Získali sme užitočné skúsenosti

Vďaka príležitosti viesť workshop pre študentov so zrakovým postihnutím, sme zároveň otestovali prístupnosť aplikácie Desmos Graphing Calculator. Ukázalo sa, že aplikácia je prístupná pre čítač obrazovky, čo je nevyhnutné pre nevidiacich študentov. Aplikáciu je možné ovládať pomocou klávesnice. V rozhraní aplikácie je možné zameriavať ovládacie prvky klávesom TAB a šípkami nahor a nadol. V režime zvukového sledovania priebehu grafu sa pomocou klávesových skratiek nevidiaci študent dozvedá dôležité vlastnosti funkcie. Čítač obrazovky sprostredkúva všetky informácie, ktoré vidí vidiaci používateľ. S nevidiacim študentom je potrebné pozorne počúvať hlasový výstup čítača obrazovky a vysvetliť súvislosti medzi údajmi, ktoré dostáva. Pre vidiaceho učiteľa môže byť v tomto prípade nápomocná funkcionalita čítača obrazovky NVDA *Zobrazovač reči*[8]. Obrázok grafu funkcie odporúčame znázorniť aj reliéfne, aby mal nevidiaci študent viac užitočných vnemových podnetov.

Slabozraký študent pracuje s aplikáciou bez čítača obrazovky s použitím zväčšenia, prípadne aj so zmenou farebnej schémy. Bez zapnutého čítača obrazovky sa prehrá iba zvuk priebehu krivky. Informácie o dôležitých bodoch sú vizuálne.

Prostredie aplikácie je lokalizované do rôznych jazykov (zatiaľ nie do slovenského jazyka). Počas workshopu si študenti skúsili nastaviť svoj rodný jazyk, no slová, ktorými sú vyjadrené dôležité body, boli iba v anglickom jazyku.

Dúfame, že naše poznatky budú užitočné pre každého učiteľa, ktorý sa venuje študentom so zrakovým postihnutím.

LITERATÚRA

[1] International Camp on Communication and Computers 2023. Dostupné na webe: https://www.icc-camp.info/

[2] Zrakově postižení si na táboře v Telči užili workshopy, sporty i výlet, Masarykova univerzita, Brno, 2023. Dostupné na webe: https://www.em.muni.cz/udalosti

[8] Používateľská příručka čítača obrazovky NVDA: https://www.nvaccess.org/files/nvda/releases/stable/documentation/sk/userGuide.html

[3] Desmos – Graphing Calculator. Dostupné na webe: https://www.desmos.com/calculator

[4] Lopúchová, Jana: Stručný prehľad terminológie z pedagogiky zrakovo postihnutých. Bratislava: Iris, Vydavateľstvo a tlač s.r.o., 2010, ISBN 978-80-89256-52-5.

[5] Informácie o prístupnosti aplikácie Desmos – Graphing Calculator. Dostupné na webe: https://www.desmos.com/accessibility

[6] Požár, Ladislav: Psychológia detí a mládeže s poruchami zraku. Trnava: Pedagogická fakulta Trnavskej Univerzity, 2000, ISBN 80-88774-74-8.

Mgr. Mária Stankovičová
Univerzita Komenského v Bratislave
Centrum podpory študentov so špecifickými potrebami
Šafárikovo námestie 6, 814 99 Bratislava
tel.: +421 2 9010 2071
e-mail: maria.stankovicova@rec.uniba.sk

OD TABUĽKY KU GRAFU FUNKCIE

DANIELA ŠABAKOVÁ

ABSTRAKT. *Príspevok je zameraný na prepájanie rôznych reprezentácií funkcie u žiakov gymnázií. Žiaci riešili 8 úloh, pričom analýza riešení ukázala, že skoro 88% žiakov nedokázalo správne prepojiť tabuľku s grafom kvadratickej funkcie bez súradnicových osí. Niektoré žiacke argumenty obsahujú miskoncepcie týkajúce sa funkcií.*

Úvod

V novinách, v médiách, alebo v banke sa často stretávame s rôznymi grafmi a tabuľkami, ktoré nám vizualizujú určité závislosti. Či už ide o rast/pokles počtu nakazených vírusom COVID-19 za určité obdobie, alebo o zisk pri investičných fondoch v banke. V takýchto prípadoch sa najčastejšie používajú grafy a tabuľky. Grafom, tabuľkám, ale aj predpisom a slovným popisom funkcií sa venujeme aj na hodinách matematiky, a rôzne ich prepájame. To je dôležité nielen preto, aby žiaci funkciám porozumeli, ale aj aby poznali výhody a nevýhody rastu rôznych typov funkcie v grafe a tabuľke a aby tieto vedomosti mohli využívať v každodennom živote, napríklad pri zvažovaní investovania.

Teoretické východiská

Pittalis a kol. (2020) popisujú rôzne aspekty pojmu funkcia, ktoré úzko súvisia s vnímaním reprezentácií funkcie od procesu ku objektu, ako aj s rôznymi stratégiami riešenia úloh (nižšie). Tieto aspekty sú:

1. funkcia ako vstup-výstup (čierna skrinka) – čiernej skrinke zadáme vstupnú hodnotu, ktorej určí/priradí výstupnú hodnotu;
2. kovariancia – vnímanie zmeny medzi výstupnými (ypsilonovými) hodnotami funkcie navzájom (napr. vnímanie konštantného a lineárneho rastu porovnaním každých dvoch vedľajších funkčných hodnôt);
3. korešpondencia – vnímanie vzťahu medzi nezávislou a závislou premennou (napr. schopnosť vytvoriť predpis funkcie na základe danej vstupnej a výstupnej hodnoty);
4. funkcia ako objekt – využívanie transformácií funkcie a jej invariantných vlastností (napr. pri predpise funkcie $y = x^2 + 3$ je kvadratický člen kladný, preto bude funkcia konvexná, bude tiež posunutá o 3 vyššie po y-ovej osi).

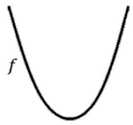
Reprezentácie funkcie vieme prepájať, a to priamo (napr. predpis s grafom), alebo využitím niektorej ďalšej reprezentácie (napr. od predpisu cez tabuľku až ku grafu). Tieto prepojenia môžu byť vnímané od procesu ku objektu pomocou interpretácií vlastností funkcie (Ronda, 2015) postupne ako:

- lokálne vlastnosti reprezentované tabuľkou hodnôt – žiak dokáže vykonať rovnaký naučený postup (napr. generovať hodnoty z predpisu a tak načrtnúť graf/tabuľku);
- trendy, vzory a globálne vlastnosti reprezentované grafom a rovnicou – žiak dokáže interpretovať vlastnosti z reprezentácie (napr. určiť monotónnosť);
- invariantné vlastnosti reprezentované grafom (bez osí) a rovnicou – žiak dokáže konštruovať novú funkciu alebo operovať s funkciou (napr. transformácie funkcie).

Metodológia

Výskum pozostával z 8 netradičných úloh zameraných na prepájanie medzi reprezentáciami funkcie, pričom sa u žiakov gymnázií sledovala úroveň týchto prepojení po prebratí tematického celku Funkcia. Zúčastnilo sa ho 124 žiakov z troch gymnázií Košického kraja. Tu sa zameriame na jednu z úloh (Obrázok 1), ktorá prepája tabuľku a graf funkcie. Z tried 2. a 3. ročníka (jedna bola matematická) túto úlohu riešilo 24+82=106 žiakov (24 z matematickej triedy a 82 zo štyroch nematematických tried). Možnosť a) predstavuje konkávnu kvadratickú funkciu (lineárny rast), v možnosti b) ide o exponenciálnu funkciu (exponenciálny rast) a v možnosti c) o lineárnu funkciu (konštantný rast). Správna je možnosť d) – konvexná kvadratická funkcia (lineárny rast).

Ktorá tabuľka hodnôt prislúcha grafu funkcie f? Zakrúžkujte písmeno prislúchajúce vášmu výberu tabuľky (a. – d.) a vysvetlite, na základe čoho ste sa rozhodli.



a.

x	y
1	0
2	8
3	12
4	10
5	4

b.

x	y
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

c.

x	y
1	0
2	2
3	4
4	6
5	8

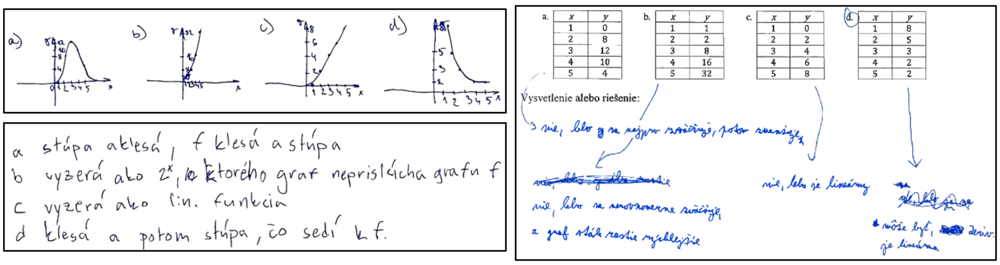
d.

x	y
1	8
2	5
3	3
4	2
5	2

Obrázok 1

Podľa Ronda (2015) budeme rozlišovať tri stratégie riešenia úlohy:

- V **stratégii (i)** žiak využíva lokálne vlastnosti, postupné generovanie hodnôt, resp. v tomto prípade ide napríklad o načrtnutie bodov z tabuľky do súradnicového systému (Obrázok 2 – vľavo hore). Táto stratégia je prepojená s prvým aspektom funkcie – funkcia ako vstup-výstup.
- **Stratégia (ii)** využíva trendy, vzory a globálne vlastnosti, kde si žiak všíma napríklad rast a klesanie hodnôt funkcie, alebo lokálne extrémy (Obrázok 2 – vľavo dole). Tu už môžeme hovoriť o identifikácii kovariancie a korešpondencie.
- **Stratégia (iii)** sa týka posledného aspektu, a to funkcia ako objekt. Ide o identifikáciu a používanie invariantných vlastností funkcie, napríklad transformácie alebo derivácia funkcie (Obrázok 2 – vpravo).



Obrázok 2: Stratégia (i) – vľavo hore, stratégia (ii) – vľavo dole, stratégia (iii) - vpravo

Analýza žiackych riešení

V tabuľke 1 vidíme, že stratégiou (i) – generovaním hodnôt – riešilo úlohu 26 žiakov, stratégiou (ii) – identifikovaním trendov, vzorov alebo globálnych vlastností – riešilo úlohu 21 žiakov a stratégia (iii) – využitie invariantných vlastností funkcie – sa tu neobjavila. 12 žiakov riešilo úlohu oboma stratégiami – (i) a (ii) – museli si pomôcť aj nižšou stratégiou.

Je dôležité spomenúť, že niektorí žiaci označili viac ako jednu možnosť, napr. žiak použil stratégiu (i) a označil ako správnu možnosť b) aj c). Viac ako polovica žiakov poskytla vysvetlenie svojho riešenia, ale 47 žiakov neposkytlo žiadne vysvetlenie. Úlohu vyriešilo správne 13 žiakov, čo je 12,26%. Zo zvyšných 87,74% bola najčastejšie ako správna označená možnosť b), kde išlo o tabuľku exponenciálneho rastu. Žiaci často túto vlastnosť neidentifikovali.

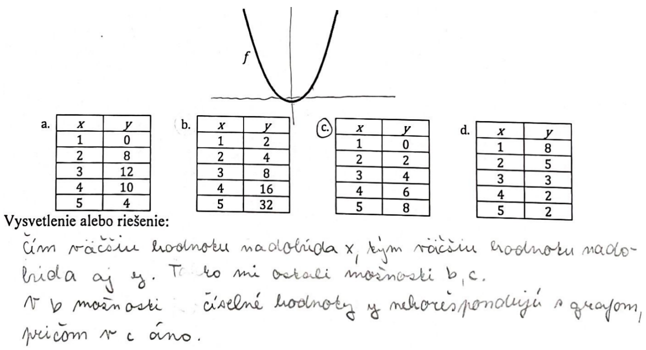
Možnosť (počet zvolení)		**Stratégia (i)**	**Stratégia (ii)**	**Obe stratégie**	**Bez vysvetlenia**
a) (4)		0+1	-	-	0+3
b) (57)		2+13	7+6	4+1	2+22
c) (27)		1+6	2+2	1+0	0+15
d) (20)	správne	1+2	1+1	4+2	0+2
	nesprávne	-	3+1	3+0	-
bez označenej odpovede (6)		0+1	0+2	-	0+3
Spolu (podľa stratégií)		4+22	9+12	9+3	2+45

Tabuľka 1

Aj napriek tomu, že v niektorých riešeniach chýbal slovný popis, bolo možné identifikovať stratégiu, ktorú žiak použil a akým spôsobom rozmýšľal, resp. či sa vyskytla nejaká miskoncepcia. V žiackych riešeniach sa najčastejšie objavili miskoncepcie (A-C):

A. Graf musí byť symetrický podľa osi y (∑=13).

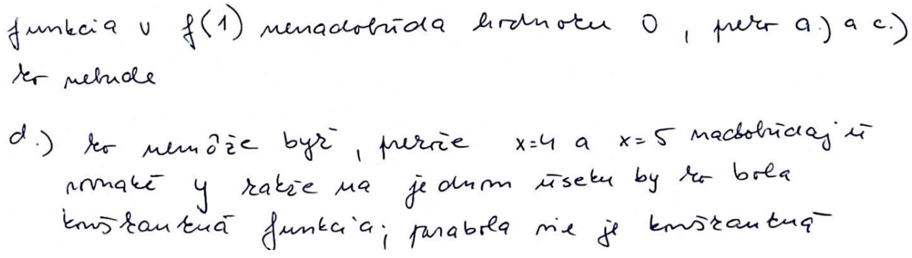
Táto miskoncepcia sa objavila u 13 žiakov. Napr. Obrázok 3: žiačka načrtla osi do grafu s predpokladom symetrického uloženia paraboly vzhľadom na os y. Opisuje stúpanie hodnôt, aj keď neuvážila konštantné stúpanie v možnosti c). Úlohu riešila stratégiou (ii).



Obrázok 3

B. Pre dve rôzne hodnoty x nemôžu existovať rovnaké funkčné hodnoty, pretože funkcia by sa stala na tomto úseku konštantnou (∑=10).

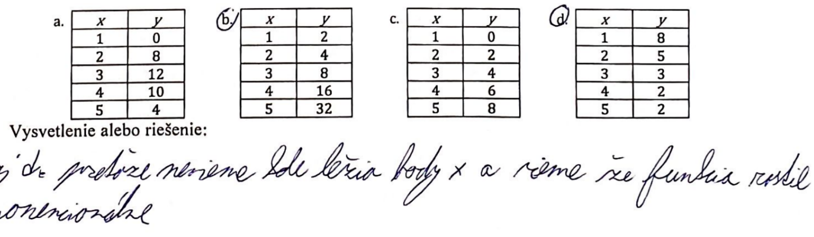
Táto miskoncepcia súvisí s častou miskoncepciou, že funkcia je vždy prostá, teda ak pre každú hodnotu x existuje jediné y, tak aj pre každé y existuje jediná hodnota x (Leinhardt a kol., 1990). Na Obrázku 4 môžeme vidieť riešenie žiačky, ktorá napísala, že funkcia sa kvôli dvom rovnakým hodnotám stane na tomto úseku konštantnou. Táto žiačka tiež do grafu načrtla osi symetricky – s vrcholom v počiatku.



Obrázok 4

C. Nerozlišovanie rastu kvadratickej a exponenciálnej funkcie (∑=5).

Žiak bol priradený k tejto miskoncepcii, ak do svojho riešenia napísal, že je funkcia exponenciálna, rastie exponenciálne (Obrázok 5), alebo aj na základe tejto myšlienky označil možnosť b) ako správnu. Je jasné, že rozlíšenie rastu paraboly od exponenciálnej funkcie pre nich nebolo jednoznačné. Dvaja žiaci určili predpis tejto funkcie ako $y = 2^x$.



Obrázok 5

Záver

Výsledky výskumu ukázali, že väčšina žiakov gymnázií má po prebratí tematického celku Funkcia problém s prepojením tabuľky a grafu kvadratickej funkcie ak ide o graf bez súradnicových osí, v ktorom je naznačený len trend rastu a klesania. V žiackych riešeniach sa najčastejšie vyskytoval aspekt vstup-výstup (stratégia (i)). Počet žiakov, ktorí v tabuľkách identifikovali kovarianciu bol minimálny, no aj napriek tomu žiaci často používali stratégiu (ii), pričom identifikovali trendy, vzory, alebo globálne vlastnosti, ako napríklad rast a klesanie funkcie. Ani jedno z riešení neobsahovalo stratégiu (iii). Takéto riešenie sa objavilo iba v pilotnom výskume a je uvedené na obrázku 2 – vpravo. Výsledky výskumu môžu pomôcť súčasným a budúcim učiteľom matematiky vo vyučovaní funkcií, pretože poukazujú na problémy, ktoré u žiakov pretrvávajú po prebratí tohto tematického celku. Tiež poukazujú na potrebu zaradenia viacerých úloh, ktoré vyžadujú rôzne stratégie riešenia a prácu s tabuľkou hodnôt.

LITERATÚRA

[1] Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. Review of Educational Research, 60(1), 1–64. https://doi.org/10.3102/00346543060001001

[2] Ronda, E. (2015). Growth points in linking representations of function: a research-based framework. Educational Studies in Mathematics, 90(3), 303-319. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9631-1

[3] Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2020). Young Students' Functional Thinking Modes: The Relation Between Recursive Patterning, Covariational Thinking, and Correspondence Relations. Journal for Research in Mathematics Education, 51(5), 631–674. https://doi.org/10.5951/jresematheduc-2020-0164

Mgr. Daniela Šabaková
Univerzita Pavla Jozefa Šafárika
Jesenná 5
SK – 040 01 Košice
e-mail: daniela.sabakova@student.upjs.sk

MOŽNOSTI DÔVODENIA V ZÁKLADOŠKOLSKEJ ARITMETIKE

MÁRIA SLAVÍČKOVÁ A JARMILA NOVOTNÁ

ABSTRAKT. *Príspevok v stručnosti predstavuje rámec pre určenie typu argumentu a stratégiou podmienenú prácu s úlohou na hodine matematiky. Do aktivít boli vyberané úlohy z učebníc, ktoré na prvý pohľad nepôsobia ako úlohy zamerané na argumentáciu a dôvodenie. Ponúkame pomocné otázky, ktoré môžu napomôcť k práci s úlohou na hodine tak, aby argumentácia a dôvodenie bolo na prvom mieste.*

Úvod

Dôvodenie a dokazovanie by malo byť integrálnou súčasťou matematického vzdelávania, keďže ho možno považovať za „lepidlo“, ktoré pomáha matematike dávať zmysel. Ako definuje Jeannotte a Kieran (2017, s. 9), ide o proces komunikácie s ostatnými alebo so sebou samým, ktorý umožňuje odvodzovať matematické výroky z iných matematických výrokov. S dôvodením má zmysel začínať už od útleho veku, žiaci by mali byť schopní podať relevantné vysvetlenie javov na prislúchajúcej kognitívnej úrovni využitím adekvátnych reprezentácii (napr. iba slovne, manipulovaním s objektmi, obrázkom a pod.)

Dôvodiť žiaci nezačnú sami od seba, mali by dostať vhodné impulzy od svojho učiteľa aby vzniknutý didaktický kontrakt (podľa Brousseau, 1997) v sebe dôvodenie obsahoval. Ako naznačujú viaceré výskumy, učitelia matematiky majú problémy s dôvodením na hodinách matematiky a jeho podporením, úplne absentuje, alebo je chápané vo veľmi úzkom slova zmysle (napr. Çakıroğlu a kol., 2023)

V pracovnej dielni sme sa preto zamerali na prácu s úlohami z učebníc, ktoré na prvý pohľad nemusia pôsobiť ako úlohy zameraná na dôvodenie. Zamerali sme na dva pohľady na úlohu: (i) módy dôvodenia podľa rámca predstaveného v Sevinc a kol (2022) a (ii) spôsob práce s úlohu podmienený stratégiou riešenia.

Teoretické východiská

Pri práci s úlohami zohľadňujeme dva pohľady, ako bolo spomenuté v úvode. Na oba sa viažu teoretické východiská, ktoré teraz stručne predstavíme.

Módy dôvodenia vznikli úpravou rámca od Stylianidesa G. (2009) s tým, že sa niektoré kategórie zjemnili, resp. rozšírili podľa úloh v učebniciach pre 8. ročník ZŠ v piatich krajinách: Slovensko, Česká Republika, Taliansko, Nórsko a Turecko (rámec vznikol v rámci projektu MaTeK a univerzity zo spomenutých krajín na tomto projekte spolupracujú). Tieto módy sú uvedené v Tabuľke 1 s krátkym vysvetlením.

Tabuľka 1: Módy dôvodenia (Sevinc a kol., 2022, vlastný preklad)

	Typ argumentu	Krátka charakteristika
1	Odvolanie sa na autoritu	bez odôvodnenia, napr. v Euklidových základoch, v učebnici, a pod.
2	Jednoduchá (1-kroková) dedukcia	jednoduchá dedukcia z jedného, alebo viacerých predpokladov

3	Matematizácia (s odôvodnením krokov)	vysvetlenie dekontextualizácie problému definovaného v reálnom svete
4	Využitie analógie	vytvorenie záveru na základe podobnosti medzi dvoma prípadmi (jeden pochopený, dobre známy, druhý menej pochopený)
5	Empirický argument / špecifický prípad	od konkrétneho k zovšeobecneniu, testovanie tvrdení pomocou príkladov priamo meraných veličín
	a Tvorba tvrdenia a zovšeobecnenie	
	b Overenie tvrdenia	
6	Tvorba záveru / overenie / zamietnutie využitím dedukcie	závery zo známych predpokladov využitím formálnych logických pravidiel
	a Generický príklad	
	b Kontrapríklad	
	c Systematická enumerácia	
	d Iné	
7	Iné	napr. abduktívne

Druhý pohľad súvisí s očakávanou stratégiou riešenia, pričom sme sa zameriavali na:

- Ako je zavedený nový poznatok, alebo terminológia?
- Kto je aktívny?
- Boli použité modely? Ak áno, aké?
- Vyžaduje sa priame využitie predchádzajúcich poznatkov?
- Bola prítomná manipulácia? (napr. skladanie, prekreslenie, rysovanie,...)

Oba predstavené pohľady nám mali uľahčiť predstavu o tom, ako by bolo možné s danou úlohou pracovať v triede (s akým cieľom by bola zaradená, aké aktivity by boli pred ňou, počas, a pod.). V ďalšom texte uvádzame aktivity naplánované na pracovnú dielňu, čitateľovi by sme odporučili vyskúšať si prácu s úlohami s ťažiskom na dôvodenie (jeho rôzne módy) ako aj na stratégie, ktoré by mohol žiak alebo učiteľ na hodine navrhnúť.

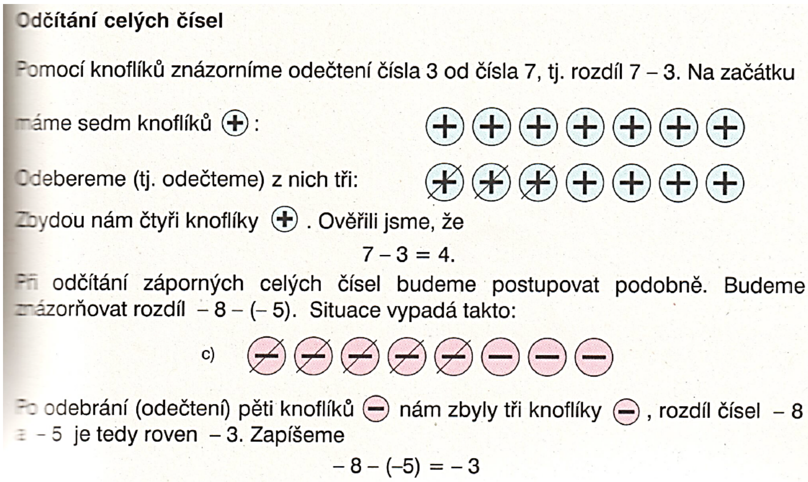
Aktivity

Aktivity sú tvorené úlohami, alebo príkladmi z vybraných učebníc na Slovensku (Šedivý a kol., 1999) a v Českej Republike (Novotná a kol., 1996 a 1997).

Aktivita 1: (Novotná a kol., 1996, s. 21-22) V příkladu 3 a) jsme nejprve nahradili 158 větším číslem 160 a 22 menším číslem 20. Odhad podílu byl větší než přesný výsledek. Když jsme nahradili 158menším číslem 150 a 22 větším číslem 25, byl odhad podílu menší než přesný výsledek. Umíte vysvětlit, proč tomu tak bylo? Zjistěte, v jakém vztahu ke správnému výsledku bude odhad podílu v těchto případech:

- dělence nezměníme a zvětšíme dělitele,
- dělence nezměníme a zmenšíme dělitele,
- dělence zvětšíme a nezměníme dělitele,
- dělence zmenšíme a nezměníme dělitele.

Aktivita 2: (prebrané z Novotná a kol., 1996, s. 43) operácie so celými číslami, pravidlá pre sčítanie a odčítanie.



Odčítání celých čísel

Pomocí knoflíků znázorníme odečtení čísla 3 od čísla 7, tj. rozdíl 7 – 3. Na začátku

máme sedm knoflíků ⊕ : ⊕⊕⊕⊕⊕⊕⊕

Odebereme (tj. odečteme) z nich tři: ⊕⊕⊕⊕⊕⊕⊕

Zbydou nám čtyři knoflíky ⊕ . Ověřili jsme, že

$$7 - 3 = 4.$$

Při odčítání záporných celých čísel budeme postupovat podobně. Budeme znázorňovat rozdíl – 8 – (– 5). Situace vypadá takto:

c) ⊖⊖⊖⊖⊖⊖⊖⊖

Po odebrání (odečtení) pěti knoflíků ⊖ nám zbyly tři knoflíky ⊖ , rozdíl čísel – 8 a – 5 je tedy roven – 3. Zapíšeme

$$-8 - (-5) = -3$$

Obrázok 1: ukážka aktivity z učebnice (zdroj: Novotná a kol., 1996, s. 43)

Aktivita 3: Kryšpín išiel nakúpiť mlieko. Vedel že jeho mama bude potrebovať trištvrte litra na koláč a dva litre budú potrebné na raňajky a zajtrajšiu desiatu. Naviac, kúpil ešte dva balíky po štvrť litre pre seba a Betku do školy. Kúpil

Bola jeho mama s nákupom spokojná? (preložené z originálu Novotná a kol., 1996, s. 86)

Táto aktivita má silný potenciál na diskusiu v triede a formulovanie argumentov aj mimo matematiku (napr. veľa odpadu, mama spokojná nebola)

Aktivita 4: Betka mala na desiatu jahodové mlieko zabalené v štvrťlitrovej krabici. Jej spolužiačka mala banánové mlieko a na obale prečítala 250 ml. Ktorá zo spolužiačok mala krabicu s väčším množstvom mlieka? (preložené z originálu Novotná a kol., 1996, s. 86)

Aktivita 5: (prebrané zo Šedivý a kol., 1999, s. 15)

Adam znovu rozmýšľal nad číslami 5,281 63 a 5,281 6. Nevedel si predstaviť, kde v ľudskej činnosti potrebujeme takéto veľmi presné čísla. Veď na pravítku máme najmenšie dieliky milimetre a i tie sú už veľmi maličké. Vedeli by ste mu odpovedať na otázku, ktoré ľudské činnosti si vyžadujú takéto presné čísla?

PROBLÉM

Keby 5,281 63 bola dĺžka úsečky v centimetroch, teda: 5,281 63 cm. Vedel by Adam túto úsečku narysovať?

K úlohe je v učebnici poskytnuté nasledovné riešenie:

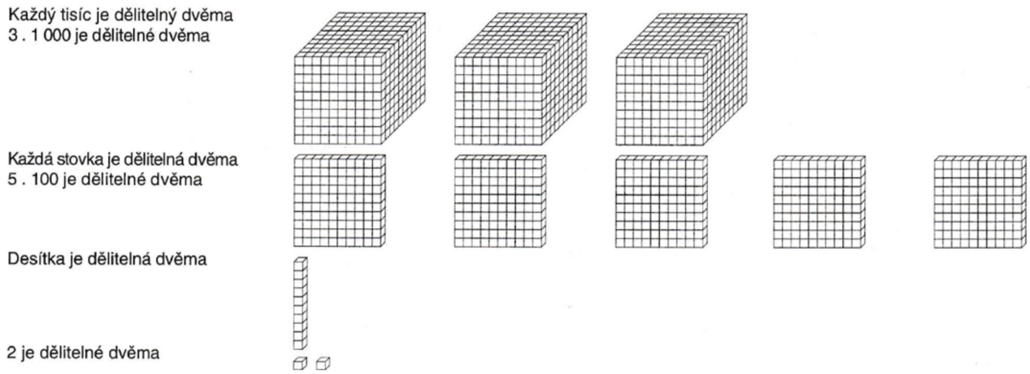
RIEŠENIE

Adam vie: 1 cm = 10 mm $\quad$ 1 mm = $\frac{1}{10}$ cm = 0,1 cm

Myslí si: Bude stačiť, ak narysujem takú úsečku, ktorej dĺžka sa najviac blíži k danému číslu, a preto potrebujem toto číslo upraviť tak, aby malo iba jedno desatinné miesto.

Viem, že 5,2 < 5,281 63 < 5,3
Ktoré z čísel 5,2 a 5,3 je bližšie k 5,281 63 ?
Všimnem si číslicu na mieste stotín: 5,281 63
preto 5,281 63 $\doteq$ 5,3
Narysujem úsečku dĺžky 5,3 cm.
Adam číslo upraví.
My vieme, že takejto úprave sa hovorí **zaokrúhľovanie.**

Aktivita 6: (Novotná a kol., 1997, s. 107) zameraná na objavovanie kritérií deliteľnosti prirodzených čísel, kde žiaci majú zistiť, či dané číslo je, alebo nie je deliteľné 10, 5, 2, 9, 3 využitím grafickej reprezentácie (viď obrázok 2)



Obrázok 2: ukážka reprezentácie čísel (zdroj: Novotná a kol, 1997, s. 107)

Aktivita 7: (Šedivý a kol., 1999, s. 25) Násobenie desatinného čísla celým.

PRÍKLAD 1

Jedna kocka stavebnice LEGO má dĺžku 1,5 cm. Akú dĺžku má mať podložka, ak na ňu chceme pripevniť 10 takýchto kociek za sebou?

Príklad má v učebnici poskytnuté riešenie zobrazené na obrázku 3.

RIEŠENIE

Jurko s Lukášom to skúšajú takto:

10 . 1,5 = 1,5 + 1,5 + 1,5 + 1,5 + 1,5 + 1,5 + 1,5 + 1,5 + 1,5 + 1,5 =
= 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15

Podložka pre 10 kociek má mať dĺžku 15 cm.

Platí: 10 . 1,5 = 15

Jurkovi to nedá:
Keby sme zobrali 100 kociek
a pripevnili ich za sebou
na podložku, akú dĺžku
by mala mať?

Keď podložka pre 10 kociek má dĺžku 15,
potom podložka pre 100 kociek má dĺžku 10 . 15 = 150
Dĺžku podložky vypočítame aj takto: 100 . 1,5 = 150
Podložka pre 100 kociek by mala mať dĺžku 150 cm. A ďalej?

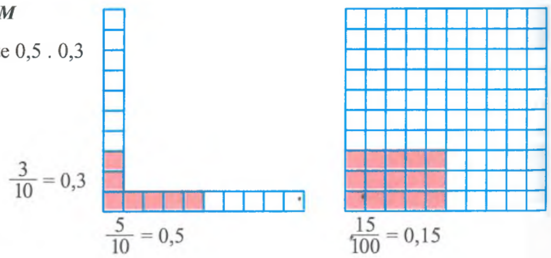
Keby sme vzali 1 000 kociek? Potom: 10 . 150 = 1 500
alebo 1 000 . 1,5 = 1 500
Podložka pre 1 000 kociek by mala mať dĺžku 1 500 cm.

Obrázok 3: riešenie príklad (zdroj: Šedivý a kol., 1999, s. 26)

Aktivita 8: (Šedivý a kol., 1999, s. 36) zameraná na násobenie desatinného čísla desatinným

PROBLÉM

Vynásobte 0,5 . 0,3



Všetky uvedené aktivity, pre ktoré sme sa inšpirovali úlohami z učebníc od dvoch autorských tímov ilustrujú rôzne možnosti zaradenie dôvodenia do vyučovania matematiky. Nie všetky učebnice obsahujú približne rovnaké množstvo úloh, ktoré si priamo vyžadujú odôvodnenie. V učebniciach, ktoré sme vybrali je takýchto situácii ponúknutých pomerne veľa a učiteľ matematiky má preto dobrú podporu pre zaradenie dôvodenia do svojho vyučovania. Úlohy, ktoré dôvodenie priamo nevyžadujú (alebo je iba implicitné) tak môžu byť autorom preformulované na úlohy vedúce k dôvodeniu. Je nám ale jasné, že učiteľ nemá vždy kapacitu preformulovať úlohy, preto odporúčame siahnuť napr. po novej zbierke úloh od Kohanová a kol. (2023) voľne dostupnej pre všetkých na https://www.projectmatek.eu zvlášť vo verzii pre učiteľa a zvlášť pre žiaka.

Záver

Z výsledkov výskumu nám vyplynulo, že dôvodenie v aritmetike a algebre je na hodinách matematiky zastúpené v menšej miere ako v geometrii. Najmenej sa vyskytuje dôvodenie v oblastiach kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika, čo môže byť spôsobené aj problémom s uchopením týchto konceptov niektorými učiteľmi matematiky. Zvýšená miera dôvodenia v geometrii má podľa nášho názoru pôvod v histórii.

Poďakovanie

Tento príspevok vznikol s podporou projektu H2020 č. 951822 „Enhancement of Research Excellence in Mathematics Teacher Knowledge“ MaTeK (https://www.projectmatek.eu/)

Literatúra

[1] Brousseau G., (1997) *Theory of Didactical situations in Mathematics, Didactique des mathématiques 1970-1990*, edited and translated by M. Cooper, N. Balacheff, R. Sutherland et V. Warfield, Kluwer.

[2] Çakıroğlu, E., Kohanová, I., İşler-Baykal, I., Slavíčková, M., Di Paola, B., Michal, J., a Høynes, S-M. (2023) Mathematics teachers' uses of resources in the context of teaching reasoning-and-proving: Insights from a cross-national study. Proceeding of CERME 13 (v tlači)

[3] Jeanotte a Kieran (2017). Conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. Educational Studies in Mathematics 96, 1–16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

[4] Kohanová, I., Porkertová, M., Slavíčková, M., a Švecová, S. (2023). Argumentácia v matematike. Zbierka úloh pre 5.-9. ročník ZŠ a +1.-4. ročník GOŠ. Online, dostupné na https://www.projectmatek.eu

[5] Novotná, J., Kubínová, M., Sýkora, V. a Sinková, M. (1996). Matematika s Betkou 1. Praha: Scientia, s r.o., pedagogické nakladatelství. ISBN 80-7183-015-1

[6] Novotná, J., Kubínová, M., Sýkora, V., Hanková, J. a Sinková, M. (1997). Matematika s Betkou 2. Praha: Scientia, s r.o., pedagogické nakladatelství. ISBN 80-7183-037-2

[7] Šedivý, O., Čeretková, S., a Malperová, M. (1999) Matematika pre 5. ročník ZŠ, 2. diel. SPN Bratislava

doc. PaedDr. Mária Slavíčková, PhD.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: slavickova@fmph.uniba.sk

prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.
Pedagogická fakulta
Univerzita Karlova
M. Rettigové 4
Praha
CeDS, Université de Bordeaux, Francie
e-mail: jarmila.novotna@pedf.cuni.cz

SEBECTVO V DEMOKRACII Z MATEMATICKÉHO HĽADISKA

MATEJ SUROVÝ

Na tejto dielni si vyskúšame prepojenie medzi matematikou (práca na štvorčekovom papieri, Pytagorova veta, práca so súradnicami) a etikou (sebectvo, demokracia). Aktivita sa dá robiť s deťmi bez ohľadu na vek, ukážeme si gradáciu náročnosti pre starších.

Pomôcky: štvorčekový papier A4 (1x1 cm), kružidlo (nepovinné)

Forma práce: rozdelenie do piatich skupín, každá skupina robí to isté ale má svoje špecifikum, hlasovanie, diskusia

Lore

Naša trieda reprezentuje mestečko, kde sa rozhodli využiť matematiku na zlepšenie ich životov. Každý zákon, ktorý platí v tomto meste má dve súradnice x,y, aby sa obyvatelia mohli ľahšie rozhodovať pri prijímaní nových zákonov. (toto sa dá ľubovoľne rozširovať – prispôsobiť publiku)

Pokyny pre učiteľa: Každá skupina má svoje miesto, reprezentované súradnicami x,y, ktoré vyjadruje ich ideálny stav daného zákonu – utopický bod (U). Každá skupina dostane tajne svoj UB a až následne dostanú ďalšie informácie.

Pokyny pre deti:

1. Každá skupina ste obdržali štvorčekový papier a súradnice nejakého bodu. Každá skupina má iný bod.
2. Do stredu papiera si zakreslite mrežový bod $\mathrm{O} = [0; 0]$.
3. Do papiera zakreslite bod so súradnicami, čo ste dostali, pomenujte si ho písmenom U.
4. Do papiera si všetky skupiny zaznačte $\mathrm{Z}_0 = [1; -1]$

Toto je moment, kedy odporúčam obehnúť si skupiny a skontrolovať, či majú správne zaznačené body - s nesprávne zaznačenými bodmi táto aktivita nebude smerovať tam, kam má ísť. (príloha 1)

5. Bod Z_0 označuje počiatočný zákon, bod U označuje utópiu pre vás – stav, kedy sa máte najlepšie.
6. Každá skupina má 1 hlas, hlasujete podľa toho, či sa novým zákonom priblížite k utópii alebo sa od nej vzdialite. Vždy keď **sa vám polepší**, ste **ZA**, keď **sa vám pohorší**, ste **PROTI**.

Pokyny pre učiteľa: tu môžeme zaradiť ukážkové rozhodovanie v nejakej skupine. Na tabuľu je premietaná štvorcová sieť, na ktorú nakreslíme body O, Z_0 rovnako ako majú deti, bod U iný ako majú deti a náhodný bod S. Spýtame sa detí, či by sme mali hlasovať za nový zákon S (skúšobný), pri ktorom ide o to, či $|SU| < |Z_0U|$. Ak áno, tak sme za, lebo sme sa priblížili novým zákonom k utópii. Je dôležité nevybrať bod S tak, aby bol rovnako ďaleko ako Z_0.

7. Skúsme si prvé skúšobné hlasovanie. Do papiera si zaznačte bod $\mathrm{S} = [-2; 7]$ a v skupine zistite, či sa vám polepšilo alebo pohoršilo. Inými slovami, či sa

skúšobným zákonom S približujete k utópii alebo sa od nej vzďaľujeme vzhľadom na počiatočný zákon Z_0, ktorý platí aktuálne.

Malo by sa všetkým pohoršiť. Ak nejaká skupina hlasuje za, má niekde chybu a treba za ňou skočiť a pomôcť im pochopiť, prečo majú byť proti. Prehľad toho, prečo sú skupiny proti nájdete v prílohe 2.

8. Tento „S“kúšobný zákon je „S“trašný, každý si pohorší, taký zákon neprijmeme.
9. Je jasné, že treba navrhnúť nejaký zákon, ktorým si každý vie polepšiť? Tak to spravme tak, že ak si polepší väčšina, tak zákon prijmeme, ak sa väčšine pohorší, tak ho neprijmeme.
10. Navrhujem teda zákon $\mathrm{Z}_1 = [-4; -4]$. Zaznačte si ho do papiera a v skupine zistite, či sa vám polepšilo alebo pohoršilo vzhľadom na stále platný zákon Z_0.

Tento zákon by mal prejsť tesnou väčšinou. Situáciu pri zákone Z_1 nájdete v prílohe 3.

11. Vidím, že väčšine sa polepšilo, takže aktuálne platí zákon Z_1. Počujem však, že sú niektorí z vás nespokojní, a tak navrhnem nový zákon. Porovnajte ho, či sa vám nepolepší vzhľadom na aktuálne platný zákon Z_1. Navrhujem zákon so súradnicami $Z_2 = [7; -7]$. Zaznačte si ho do papiera a v skupine zistite, či sa vám polepšilo alebo pohoršilo vzhľadom na aktuálne platný zákon Z_1.

Aj tento zákon by mal prejsť tesnou väčšinou. Situáciu pri zákone Z_2 nájdete v prílohe 4.

12. Máme novo schválený zákon Z_2, no stále cítim, že by sme to mohli viac vylepšiť, stále sa nepolepšilo všetkým. Navrhujem teda zákon $Z_3 = [0; 10]$.

Situácia sa opakuje, aj tento zákon by mal prejsť tesnou väčšinou, situáciu pri zákone Z_3 nájdete v prílohe 5.

13. Zákon Z_3 sa podarilo schváliť, tak už navrhnem len jeden, posledný. Navrhujem zákon $\mathrm{Z}_4 = [-2; 7]$. Skontrolujte, či sa vám nepolepšilo.

Teraz budú za všetci, viacerí si možno všimnú, že navrhujem zákon, pri ktorom boli všetci proti. 100% nie sa zmenilo na 100% áno. Doteraz to bola matika, odteraz začína tá podstatnejšia časť – diskusia

Otázky rozvíjajúce matematický aspekt aktivity

Ako to, že sa 100% nie stalo 100% áno? Vieš vymyslieť vlastnú sekvenciu bodov s touto vlastnosťou? Išlo by to s iným počtom skupín? Musia byť zákony len mrežovými bodmi? Dá sa nájsť utopický bod spoločnosti? Ako ho nájsť?

Otázky rozvíjajúce občiansky aspekt aktivity

Sme v demokracii odsúdení na to, aby nás ostatní zmanipulovali aby sme sa mali horšie? Čo reprezentuje utopický bod spoločnosti? Je diktatúra riešením? Prečo áno, prečo nie? Čo nás doviedlo k tomu, že sme všetci súhlasili s tým, že sa budeme mať horšie ako na začiatku?

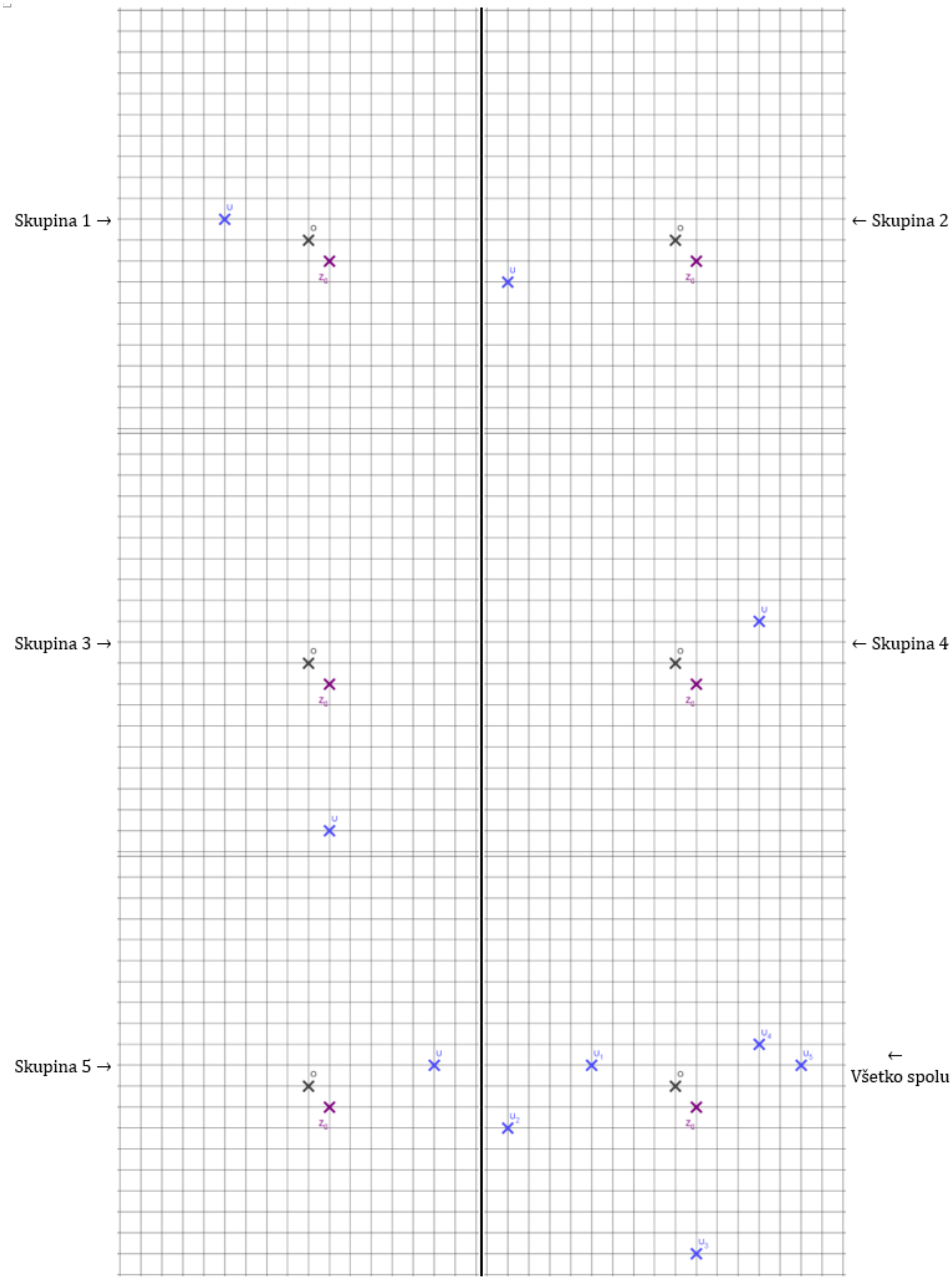
Možné variácie:

- Predkreslené body, zameranie sa len na hlasovanie.
- Použitie Pytagorovej vety namiesto kružidla
- Použitie vzťahu na výpočet vzdialenosti medzi bodmi v mriežke.
- Výpočet dĺžky vektora.
- Viac skupín, menej tesné väčšiny.

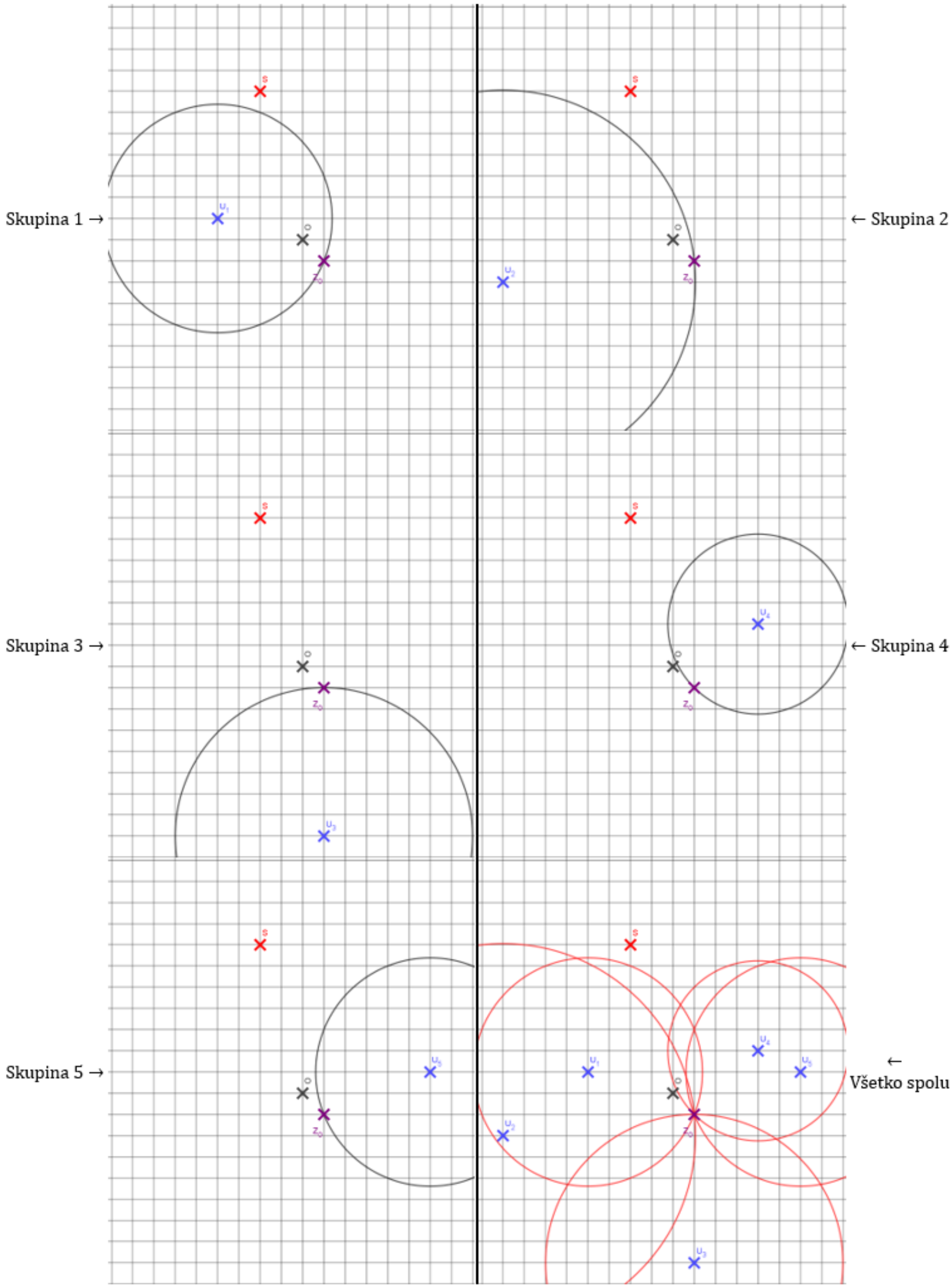
LITERATÚRA

[1] https://www.youtube.com/watch?v=goQ4ii-zBMw&t=153s&ab_channel=SpanningTree

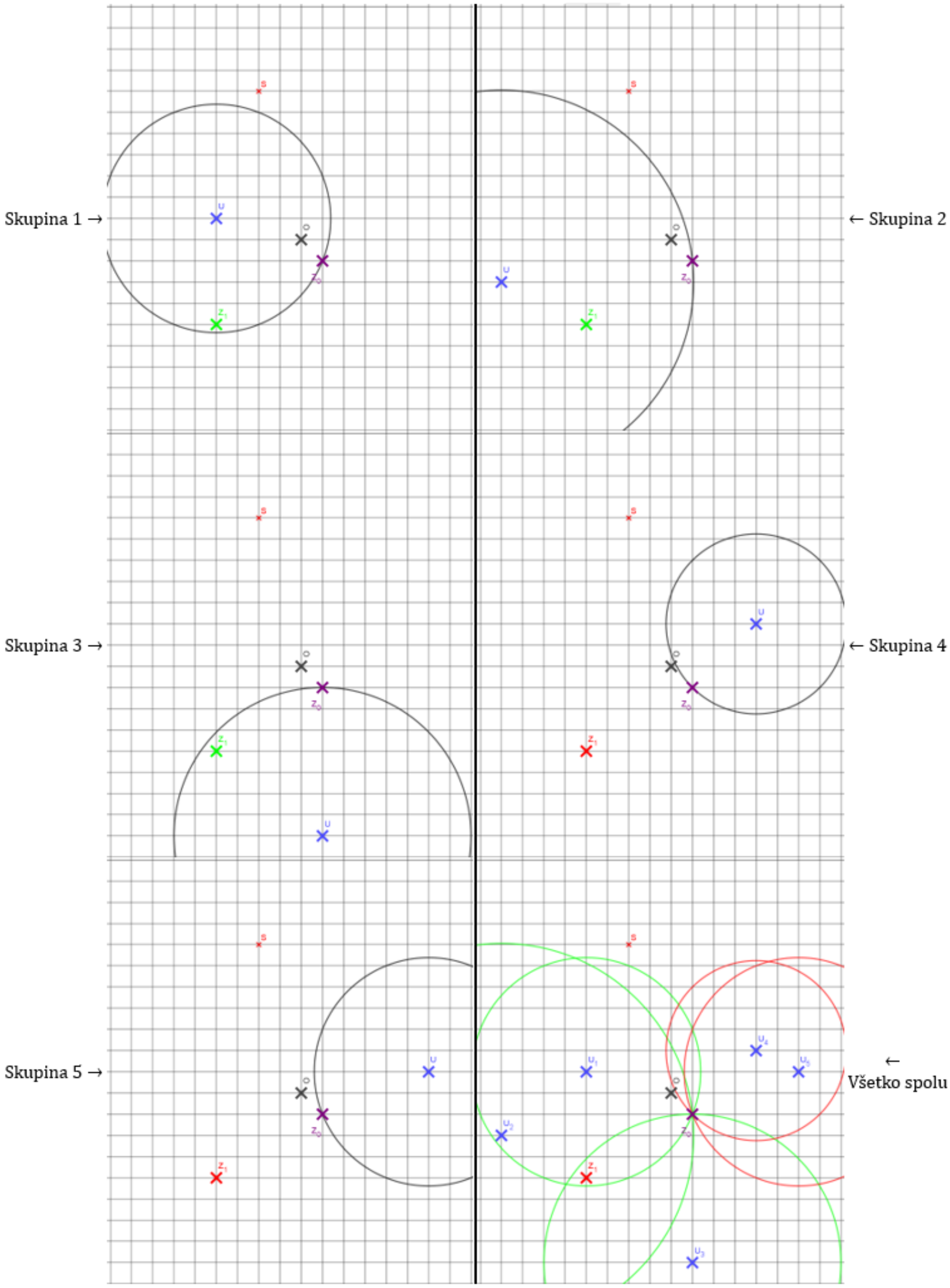
Príloha 1 – počiatočný stav



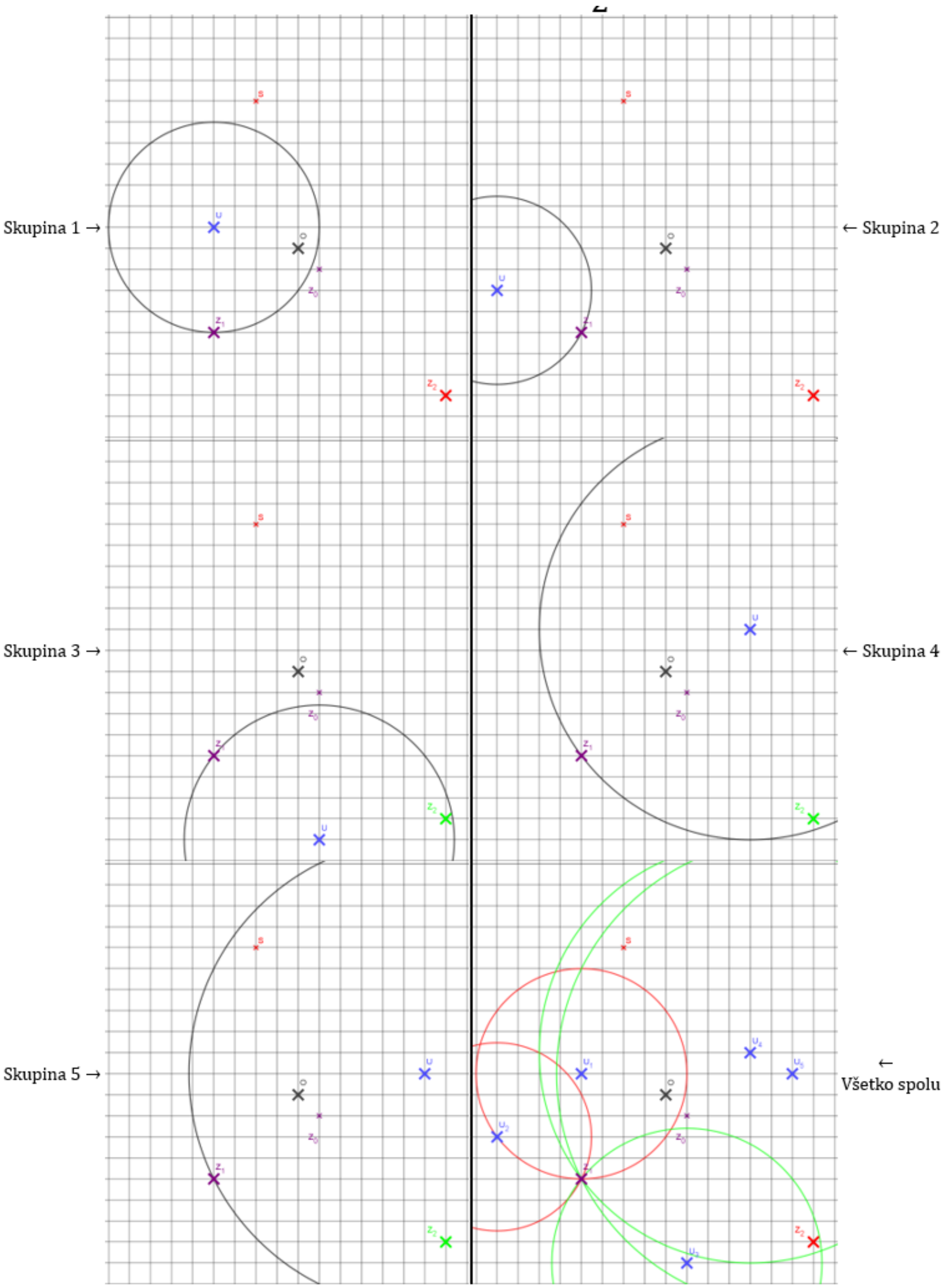
Príloha 2 – skúšobné hlasovanie



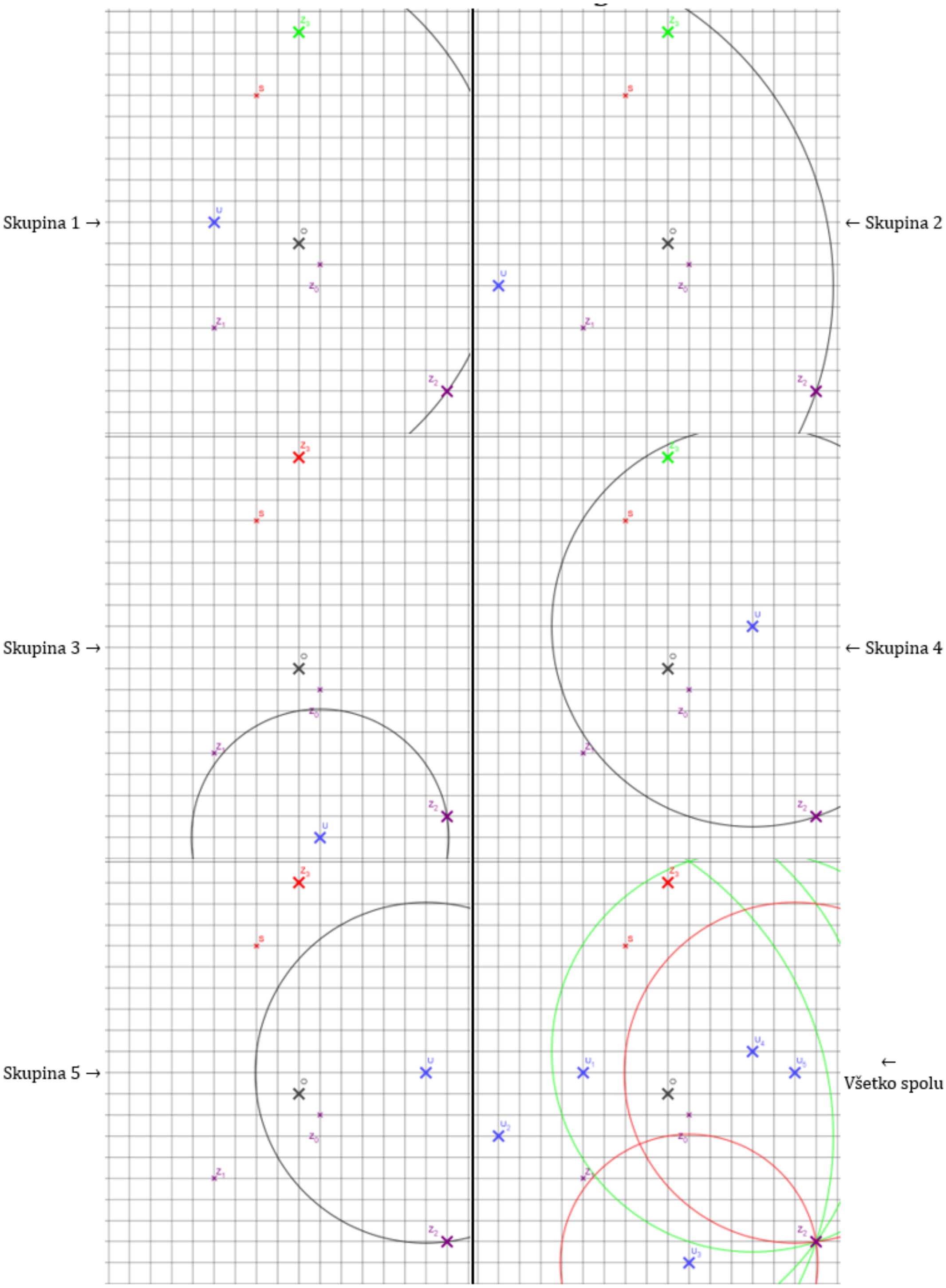
Príloha 3 – Hlasovanie o zákone Z_1



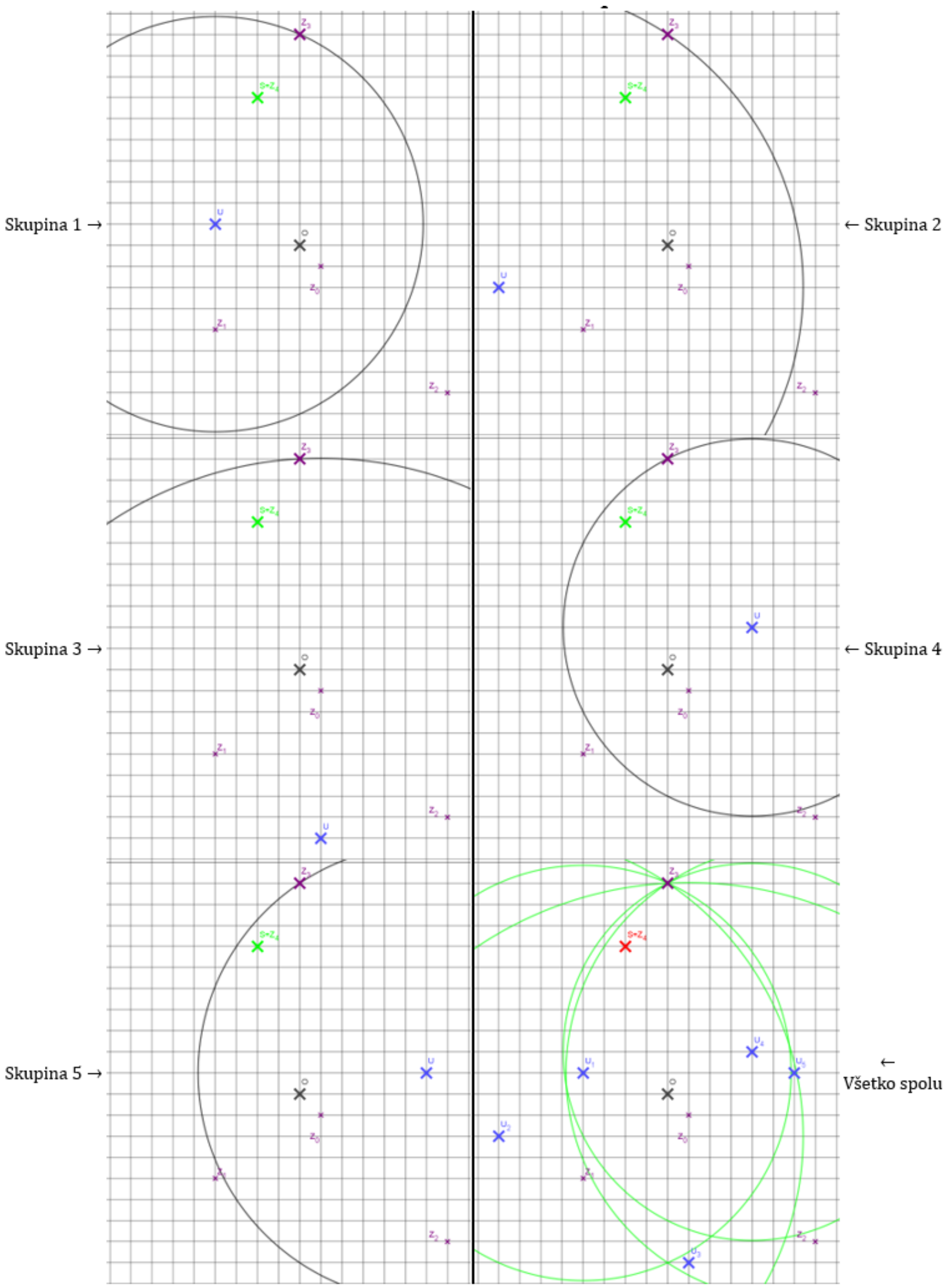
Príloha 4 – hlasovanie o zákone Z_2



Príloha 5 – hlasovanie o zákone Z_3



Príloha 6 – hlasovanie o zákone Z_4



AKO ROZVÍJAŤ MATEMATICKÉ KONCEPTY OD ŠKÔLKY AŽ PO MATURITU. TANGRAM A VPRAVO ALEBO VĽAVO

MARTINA TOTKOVIČOVÁ

ABSTRAKT. *V príspevku sa budeme venovať dvom známym a hlavne na nižších stupňoch vzdelávania obľúbeným konceptom ktorými sú skladačka Tangram a pomôcka podporujúca rozvoj orientácie v rovine s názvom Vpravo alebo vľavo. Naším cieľom bude zamerať sa na ich využitie v gradujúcich zadaniach, prostredníctvom ktorých môžu žiaci a študenti na 2. a 3. stupni vzdelávania objavovať zaujímavé matematické vzťahy.*

Úvod

Školská matematiky na 2. stupni základnej školy, no ešte markantnejšie je to na 3. stupni vzdelávania, sa stáva vďaka svojej zvyšujúcej sa miere abstrakcie pre mnohých žiakov a študentov fragmentálna. Ak sme ešte škôlkarovi a žiakovi 1. stupňa umožňovali aspoň občas vo vyučovacom procese niečo objaviť a aj vďaka tomu si vytvoriť vlastný nový poznatok, na vyšších stupňoch vzdelávania má vyučovanie matematiky skôr transmisívny charakter, čím sa pre mnohých žiakov a študentov stáva neuchopiteľným. Pri tvorbe nami navrhovaných aktivitách, sme vychádzali z bádateľsky orientovaného vyučovania. Inšpirovali sme sa citátom od Roberta Fulghuma, že všetko, čo naozaj potrebujem vedieť, som sa naučil v materskej škole. Na riešenie navrhnutých úloh sme využili pre študentov známu skladačku Tangram a úlohy rozvíjajúce pohyb v štvorcovej sieti.

Tangram

Tangram je skladačka, pre niekoho hlavolam, pozostávajúci zo siedmich konvexných dielikov. Názov Tangram sa objavil po prvýkrát vo Veľkej Británii koncom 19-teho storočia. *Tan* označuje čínsky pôvod, *gram* znamená znak, či obrazec. Klasický čínsky Tangram sa skladá z piatich podobných rovnoramenných pravouhlých trojuholníkov v troch veľkostiach, štvorca a kosodĺžnika. Z Tangramu sa dajú skladať zvieratká, ľudské postavy v činnosti, rôzne predmety, ale aj geometrické útvary. Vytvárajú sa tak súvislé obrazce, v ktorých sa strácajú charakteristické črty použitých dielikov. Dá sa z nich vymodelovať štvorec, pravouhlý trojuholník obdĺžnik, ale aj mnohé iné n-uholníky.

S Tangramom sa veľmi často stretávajú deti v materskej škole alebo na 1. stupni vzdelávania, ktoré pomocou neho skladajú rôzne obrazce, či už podľa vlastnej fantázie, alebo podľa predlôh, ktoré môžu mať rôznu formu. Táto činnosť má väčšinou charakter hry. Aj to je možno jeden z dôvodov, ktorý Tangram „diskvalifikuje" z vyučovacieho procesu na vyššom stupni vzdelávania, kde hru vo vyučovaní skoro vôbec nezaraďujeme.

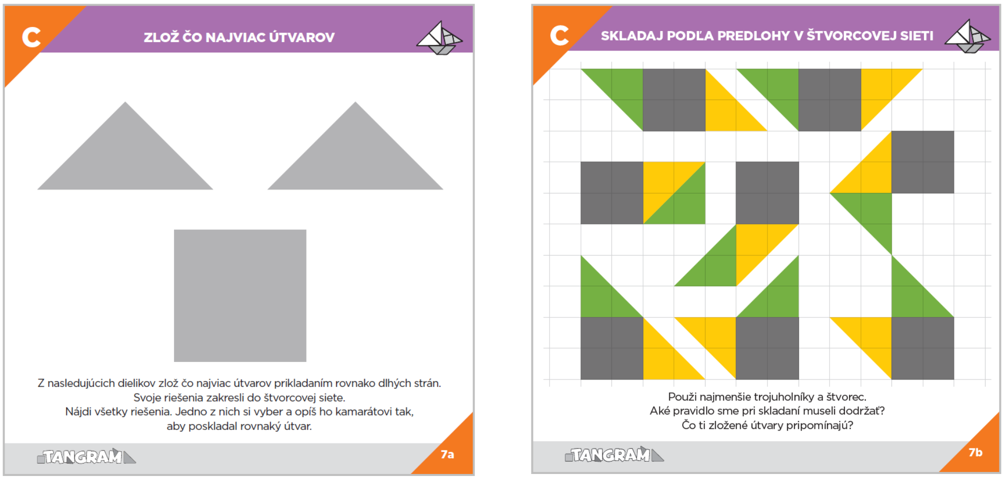
Tangramové karty a ich 3 úrovne

Karty v publikácii Tangram sú rozdelené do 3 úrovní, ktoré sú označené písmenami **A**, **B** a **C**, v ľavom hornom rohu a farebne odlíšené. Každá karta má hlavné zadanie v hornej časti. Zadanie označené písmenom **a** pri čísle karty je náročnejšie, obrazec je zadaný väčšinou iba obrysom alebo vyplnenou plochou (výnimkou sú karty 2 a 4 úrovne **B**). Na druhej strane karty je jeho riešenie, karta má rovnaké číslo, ale označenie **b** (Obrázok 1). To môže slúžiť aj ako zadanie pre mladšie deti, alebo pri objavovaní rôznych vzťahov, ktoré neskôr môžu žiaci využívať vo svojich riešiteľských stratégiách. V spodnej časti karty sa nachádzajú doplňujúce zadania, ktoré majú nápovedný alebo rozširujúci charakter. **Karty využívajú inverznosť zadaní ako autokorektívny prvok**. Práca s takouto pomôckou učí žiakov samostatnosti. Riešenie úlohy nájdu vždy na druhej strane karty, vďaka čomu nepotrebujú pri overení správnosti riešenia asistenciu dospelého. Ak rub a líc spolu priamo nesúvisia, nie je použité označenie **a**, **b**, strany sú označené za sebou idúcimi číslami.

Obrázok 1

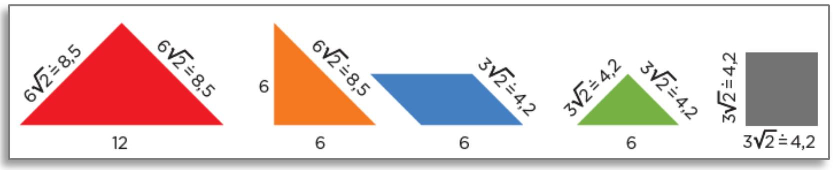
Využitie Tangramu vo vyšších ročníkoch ZŠ a na SŠ

Karty označené písmenom C sú zamerané na poznávanie geometrických útvarov a ich vlastností. Zadania úrovne C sú **najviac matematické a dovolíme si tvrdiť, že predkladaný materiál je charakterom zadaní a ich komplexnosťou ojedinelý** na našom trhu. Snažili sme sa tému rozpracovať s akcentom na gradáciu, aj keď nie je nevyhnutné riešiť úlohy v nami navrhnutom poradí. Dúfame, že úlohy budú zaujímavé a objavné nielen pre žiakov a študentov, ale aj pre mnohých učiteľov. Podrobnejšie by sme predstavili zadanie, ale aj niektoré študentské riešenia karty C7 (Obrázok 2).



Obrázok 2

Zadanie pracuje s vybranými dielikmi (nevyužíva sa všetkých 7). Úloha má kombinatorický charakter. Je dôležité sa pri prezentovaní rôznych útvarov dohodnúť, ktoré považujeme za rôzne. Nemáme všeobecné odporúčanie a necháme to na diskusiu v triede, alebo rozhodnutie vyučujúceho. My sme v rámci návrhov riešení považovali za rôzne všetky tie, ktoré nie je možné získať zhodným zobrazením. Napriek tomu, že sme to takto interpretovali aj v triede, ako bude možné vidieť na (Obrázku 5) nie všetci študenti sa s touto podmienkou stotožnili. Úlohu sme ešte doplnili o zadanie, ktoré nie je súčasťou karty, a to *Ktorý zo zložených n-uholníkov má najväčší a ktorý najmenší obvod*. Keďže Tangram, s ktorým sme pri riešení úlohy pracovali je možné zložiť do tvaru štvorca s rozmermi 12 x 12 cm, študenti využili pri riešení Pytagorovu vetu (Obrázok 3). Skúsili sme aj doplňujúcu otázku, *Ktorý z n-uholníkov má najväčší a ktorý najmenší obsah*. Prekvapilo nás, že mnohí začali úlohu riešiť podobne ako predchádzajúce zadanie s využitím matematického aparátu.

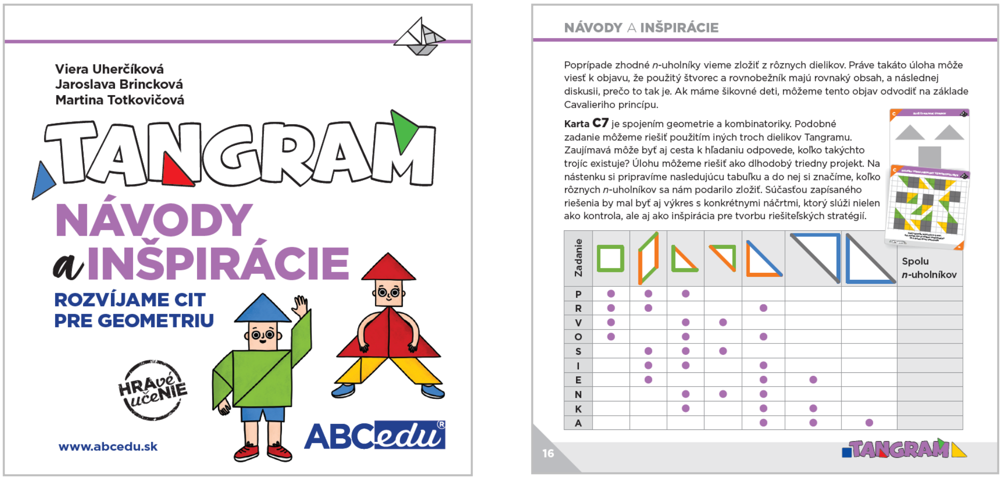


Obrázok 3

S rozšírením úlohy sa môže učiteľ stretnúť v metodike, ktorá je súčasťou kariet so zadaniami (Obrázok 4). Jednotlivé varianty zadania môže nechať postupne objaviť samotných študentov, tak sme postupovali my. Tento krok môže preskočiť a študentov rozdelí do skupín a nechá ich úlohy riešiť obdobne, ako na karte C7. My sme vytvorili 10 skupín po 3 študentoch, kde každá skupina riešila tri varianty (označené písmenami P, R, V, O, S, I, E, N, K, A) úlohy (Tabuľka 1).

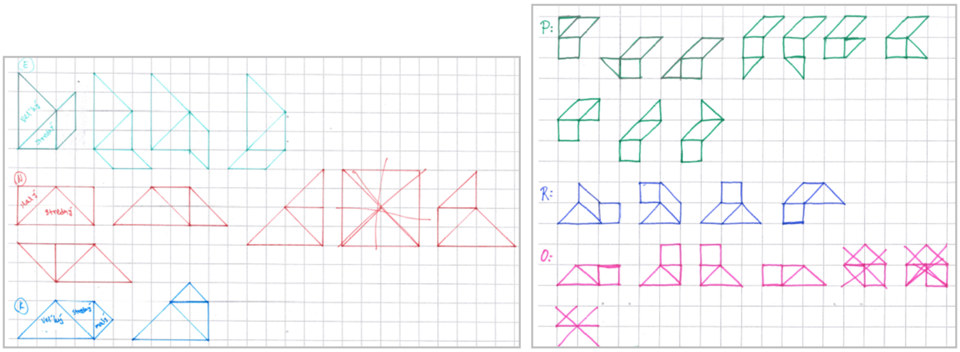
Skupina	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
Zadania	PRV	RVO	VOS	OSI	SIE	IEN	ENK	NKA	KAP	APR

Tabuľka 1



Obrázok 4

Týmto rozdelením sme vytvorili v triede vždy tri skupiny, ktoré riešili jedno spoločné zadanie, vďaka čomu mohli svoje riešenie vzájomne konfrontovať. Riešenia boli vskutku rôznorodé. To mám potvrdilo komplexnosť zadania a aj jeho využiteľnosť vo vyučovaní matematiky na SŠ. Jednou s výziev s ktorou sa museli skupiny popasovať bolo, ako svoje riešenia čo najpresnejšie zaznamenávať. Napriek tomu, že sme riešili kartu C7pred tým, ako sme zadali opisovanú skupinovú prácu, pre mnohých to bol samostatný matematický problém.



Obrázok 5

Vpravo alebo vľavo

Druhý koncept, s ktorým sme pracovali, boli karty, ktoré slúžia na fixovanie pravo-ľavej orientácie a určovaniu polohy ale aj popisu pohybu v rovine prostredníctvom štvorcovej siete.

Úvodné oboznámenie sa sme smerovali na objavenie vzťahu medzi inverznými operáciami v aritmetike a algebre 3 – 3 = 0, a : a = 1, a zápisom pohybu v štvorcovej sieti pomocou šípok ↑↓ (nezmenená poloha). Tento nový poznatok nám veľmi uľahčil dohovor, čo budeme pri riešení úloh považovať za najkratšiu cestu.

Iným objavom bolo zaznamenanie komutatívnosti pri pohybe. Ak vychádzam z rovnakého políčka a aplikujem napríklad pohyb ↓→, prídem na rovnaké políčko v sieti, ako ak by sme išli v zmenenom poradí →↓. Túto novú skúsenosť sme následne aplikovali pri riešení mnohých kombinatorických úloh.

Realizovanie prezentovaných zadaní s využitím konkrétnych pomôcok nás presvedčilo o potrebe riešiť podobné úlohy aj vo vyšších ročníkoch ZŠ a na SŠ. Zapájali sa aj žiaci, ktorí sa bežne riešeniu úloh skôr vyhýbajú. Niektorých dokonca predkladané zadania natoľko inšpirovali, že mali potrebu sa k svojim riešeniam vrátiť aj po vyučovaní a následne ich nasledujúce dni konzultovať :)

LITERATÚRA

[1] V. Uherčíková, J. Brincková, M. Totkovičová: Tangram, Zbierka úloh, Bratislava, ABCedu, a.s., 2021, ISBN 978-80-99973-35-1

[2] M. Totkovičová, E. Hoššová: Vpravo alebo vľavo – Piráti, Bratislava, ABCedu, a.s., 2023, ISBN 978-80-99973-59-7

PaedDr. Martina Totkovičová, PhD.
Pedagogická fakulta, Univerzita Komenského
Šoltésovej 4
SK – 811 08 Bratislava
e-mail:totkovicova1@uniba.sk

Poďakovanie. *Príspevok vznikol ako súčasť riešenia projektu VEGA 1/0033/22 (Bádateľsky orientovaná výučba v matematickom, prírodovednom a technickom vzdelávaní).*

PODPORA DÔVODENIA U ŽIAKOV VO VEKU 11-12 ROKOV

PETER VANKÚŠ

ABSTRAKT. *V rámci našej pracovnej dielne sme prezentovali rámec zachytávajúci spôsoby dôvodenia žiakov v riešení matematických úloh. Následne sme tento rámec ilustrovali na vybraných úlohách zo slovenských a českých učebníc. Tieto sme spoločne s účastníkmi pracovnej dielne analyzovali z hľadiska uvedeného rámca a tiež z hľadiska ich používania na hodine matematiky.*

Úvod

Počas riešenia projektu MaTeK (*Enhancement of research excellence in Mathematics Teacher Knowledge*) na Oddelení didaktiky matematiky FMFI UK v Bratislave bol v medzinárodnej spolupráci vytvorený rámec, ktorý kategorizuje matematické úlohy z hľadiska spôsobov dôvodenia žiakov (Sevinc et al., 2022). Tento rámec v stručnosti zobrazuje Tabuľka 1.

Spôsoby dôvodenia	Krátka charakteristika
1) Odvolanie sa na autoritu	Nulové dôvodenie
2) Jednoduchá (1 kroková) dedukcia	Používanie jedného predpokladu
3) Matematizácia	Prevod do matematického kontextu
4) Dôvodenie analógiou	Použitie analogických prípadov
5) Dôvodenie empirickými argumentmi/špecifickými prípadmi	Zovšeobecnenie na základe špecifických prípadov
6) Tvorba záverov/dôvodenie na základe deduktívneho uvažovania	Závery vyvodené deduktívne z daných informácií

Tabuľka 1: Rámec spôsobov dôvodenie

Uvedený rámec sme počas pracovnej dielne využili pri analýze úloh zameraných na dôvodenie a argumentáciu vo vybraných slovenských a českých učebniciach (Novotná et al., 1996; Šedivý et al., 1997; Šedivý et al., 2000). Konkrétne sa jednalo o úlohy z oblasti geometrie.

Predstavenie vybraných úloh

Veľká časť našej pracovnej dielne pozostávala z práce s vybranými úlohami. Účastníci spolupracovali v rámci skupín 2–3 členov, pričom dostali nasledovné pracovné inštrukcie:

1. Vyriešte predstavenú úlohu.
2. Zamerajte sa na spôsoby argumentácie, ktoré by používali žiaci resp. na ktoré by ste ich nasmerovali ako učitelia.

3. Ako by ste odporučili pracovať s danou úlohou v triede s dôrazom na podporu argumentácie žiakov.

Po každej analyzovanej úlohe skupinky prezentovali svoje výstupy, pričom sme o nich podnetne diskutovali. V nasledujúcej časti článku uvedieme konkrétne úlohy, na ktorých sme pracovali. Jednalo sa o podnetné úlohy, preto ich zadania stoja za pozornosť. Pri úlohách 1 až 5 uvádzame tiež ukážkové riešenia uvedené v zodpovedajúcich učebniciach. Tie sme prezentovali v rámci diskusie aj účastníkom pracovnej dielne.

Úloha 1 (Novotná et al., 1996, s. 52). *Pomocou papierového obrúsku ukážte, že štvorec má štyri osi a je súmerný podľa každej z nich.*

Ukážkové riešenie: Rozložte papierový obrúsok na podložke (baliaci papier, noviny a pod.) Ceruzkou vyznačte na podložke vrcholy štvorca, ktorý predstavuje obrúsok. Obrúsok potom prevracajte tak, aby sa vrcholy kryli s bodmi označenými na podložke. Presvedčte sa, že to dosiahnete štyrmi spôsobmi. Vyznačte priamky, pozdĺž ktorých v jednotlivých prípadoch obrúsok prevraciame. Nazývame ich osi súmernosti štvorca.

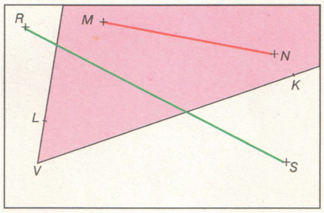
Úloha 2 (Novotná et al., 1996, s. 103).

Nakreslite uhol KVL, ktorý je menší ako pravý uhol. Označte M, N dva vnútorné body ∡ KVL. Označte R, S dva vonkajšie body ∡ KVL (Obrázok 1).

a) Zostrojte úsečku MN. Viete nájsť na nej bod, ktorý je vnútorným bodom ∡ KVL?

b) Zostrojte úsečku RS. Viete nájsť na nej bod, ktorý je vnútorným bodom ∡ KVL?

c) Vyberte dva vonkajšie body ∡ KVL tak, aby čiara, ktorá ich spája, neobsahovala vnútorný bod ∡ KVL.

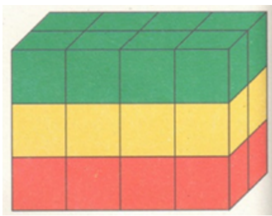


Obrázok 1

Ukážkové riešenie: Nahraďte úsečku RS kusom dreva a posúvajte ho po obrázku tak, aby okraje dreva vždy predstavovali vonkajšie body ∡ KVL.

Úloha 3 (Novotná et al., 1996, s. 160).

Pomocou kockových blokov drevenej stavebnice postavte kváder podľa obrázka (Obrázok 2). Určte jeho objem.



Obrázok 2

Ukážkové riešenie: Kváder obsahuje 8 červených kociek, rovnaký počet zelených a žltých kociek. Je to 3 x 8 = 24 kociek. Ak kocku považujeme za jednotkovú mierku, povieme: Objem kvádra na obrázku je 24 jednotkových kociek.

Zručnejšie deti nebudú počítať kocky po jednej, ale všimnú si, že na prednom okraji kvádra sú 4 kocky, na pravom okraji 2 kocky a na zvislej hrane 3 kocky. To dáva 4 x 2 x 3 = 24 kociek. Dostaneme rovnaký výsledok ako v prvom riešení.

Záver: Objem kvádra sa rovná súčinu počtu kociek umiestnených pozdĺž troch hrán kvádra, ktoré majú spoločný vrchol. Tento postup platí pre výpočet objemu každého kvádra.

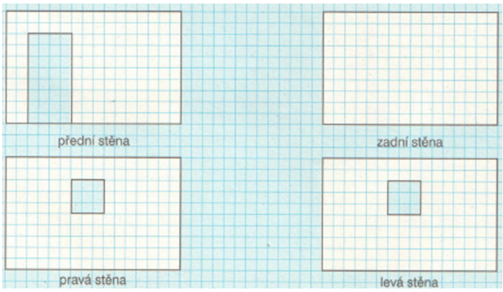
Úloha 4 *(Novotná et al., 1996, s. 147). Steny chatky, ktorú Ajnštanovci stavajú v záhrade, budú z tehál s rozmermi 25 cm x 25 cm x 10 cm. Šírka steny bude 10 cm.*

Kryšpín dostal za úlohu vypočítať približnú spotrebu tehál.

Otec mu povedal, že nemusí počítať s medzerami na maltu ani sa zaoberať rohmi chatky. Aj tak musia mať trochu viac tehál.

Vieme, že základ chatky je štvorec so stranou 4 m, výška stien bude 2,5 m. Kryšpín tiež zistil, že dvere budú mať šírku 1 m a výšku 2 m a obe okná budú štvorcové s dĺžkou strany 75 cm.

Ukážkové riešenie: Plány stien Kryšpín nakreslil na štvorcový papier tak, aby jednotlivé štvorce predstavovali tehly (Obrázok 3). Spočítal štvorce na plánoch všetkých stien a povedal otcovi, koľko tehál treba kúpiť.



Obrázok 3

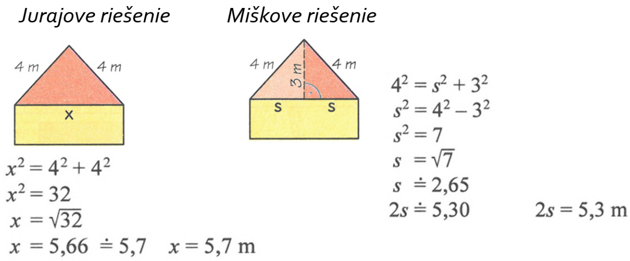
Ďalšie úlohy boli uvedené počas pracovnej dielne bez riešení.

Úloha 5 ((Šedivý et al., 1997, s. 61).

Máme 27 kockových blokov stavebnice. Môžeme z nich postaviť stavbu v tvare kocky?

Úloha 6 (Šedivý et al., 2000, s. 62). (Pozn. Tu sa jednalo o úlohu pre starších žiakov. Zaradili sme ju kvôli zaujímavej forme zadania.)

Na obrázku je náčrt domu. Juraj a Miško riešili domácu úlohu s údajmi vyznačenými na obrázku. Mali vypočítať šírku domu. Ich riešenia znázorňuje Obrázok 4. Vysvetlite, prečo dosiahli rozdielne výsledky. Ktorý z nich riešil problém nesprávne a akú chybu urobil?

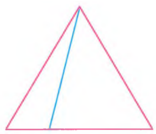


Obrázok 4

Úloha 7 (Šedivý et al., 1997, p. 120).

Trojuholník som rozdelila jednou úsečkou tak, aby na obrázku boli 3 trojuholníky (Obrázok 5).

Je možné rozdeliť trojuholník dvoma úsečkami tak, aby na obrázku bolo 3, 4, 5, 6 alebo 8 trojuholníkov? Pre každú možnosť nakreslite obrázok.



Obrázok 5

Záver

Účastníci pracovnej diele na prezentovaných úlohách počas diskusie dokumentovali možnosti rozvoja dôvodenia a argumentácie žiakov. Práca v skupinách bola veľmi produktívna a diskusia priniesla množstvo nápadov ako v úlohách argumentovať rozmanitými cestami, využívajúc rôzne spôsoby dôvodenia podľa prezentovaného teoretického rámca (Sevinc et al., 2022). Na záver sme sprostredkovali účastníkom niektoré zistenia analýzy učebníc uskutočnenej v rámci projektu MaTeK (Michal et al., 2022). Pri tejto analýze autori zistili, že najviac úloh na dôvodenie a argumentáciu je v učebniciach v rámci tém z geometrie. Pozitívnym trendom je výskyt manipulatívnych geometrických úloh v daných učebniciach.

Naším budúcim cieľom je okrem iného vytvárať materiály s manipulatívnymi úlohami resp. hrami zameranými na rozvoj dôvodenia a argumentácie v oblasti pravdepodobnosti a štatistiky, pretože uvedený výskum (Michal et al., 2022) ukazuje ich nedostatok v týchto témach.

Grantová podpora

Článok bol podporený z projektu H2020-WIDESPREAD-2018-2020: Enhancement of research excellence in Mathematics Teacher Knowledge, č. 951822 (MaTeK).

LITERATÚRA

[1] Michal, J., Novotná, J., & Slavíčková, M. (2022). Teachers' Reasoning in Different Topics of School Mathematics. ICERI 2022 Proceedings, 3240–3243. https://doi.org/10.21125/iceri.2022.0804

[2] Novotná, J., Kubínová, M., & Sýkora, V. (1996). Matematika s Betkou 1 pro 6. ročník základní školy. [Mathematics with Betka 1 for 6th grade of primary school]. Scientia.

[3] Sevinc, S., Kohanová, I., Isiksal-Bostan, M., Kubáček, Z., Isler-Baykal, I., Lada, M., Cakiroglu, E., & Di Paola, B. (2022). Developing an integrated framework for analyzing ways of reasoning in mathematics. ICERI 2022 Proceedings, 2082–2089. https://doi.org/10.21125/iceri.2022.0529

[4] Šedivý, O., Čeretková, S., Malperová, M. , & Bálint, Ľ. (1997). Matematika pre 5. ročník základných škôl, 1. časť [Mathematics for the 5-th grade, 1-st part]. SPN Bratislava.

[5] Šedivý, O., Čeretková, S., Malperová, M. , & Bálint, Ľ. (2000). Matematika pre 8. ročník základných škôl, 1. časť [Mathematics for the 8-th grade, 1-st part]. SPN Bratislava.

PaedDr. Peter Vankúš, PhD.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: peter.vankus@fmph.uniba.sk

„KRÁTENIE ZLOMKOV“, KTORÉ NECHCETE U SVOJICH ŽIAKOV VIDIEŤ

MICHAELA VARGOVÁ

ABSTRAKT. *Krátenie zlomku označuje operáciu, pri ktorej čitateľ aj menovateľ delíme rovnakým, nenulovým číslom. Napriek jednoduchosti uvedenej operácie sa v prípade niektorých žiakov stretávame s viacerými „kreatívnejšími“ postupmi. Existuje však viacero zlomkov, v prípade ktorých aj nekorektné „krátenie“ vedie k správnemu výsledku. V príspevku poukážeme na skutočnosť, že nájdenie viacerých zlomkov s uvedenou vlastnosťou a prípadné zovšeobecnenie situácie poskytuje pre žiakov príležitosť na skúmanie, nevyžadujúce vedomosti nad rámec stredoškolskej matematiky.*

Úvod

Zlomok $\frac{16}{64}$ má zaujímavú vlastnosť, ak v čitateli aj menovateli škrtneme číslicu 6, dostaneme $\frac{1}{4}$, teda uvedený zlomok v základnom tvare. Neviedlo by takéto „krátenie zlomku“ – teda škrtnutie rovnakých číslic v čitateli aj menovateli zlomku, k správnemu výsledku aj v prípade iných zlomkov? Obmedzme najskôr naše skúmanie na zlomky, ktorých čitateľ aj menovateľ je dvojciferné číslo. Hľadáme teda také zlomky, pre ktoré platí

$$\frac{a\cancel{b}}{\cancel{b}c}=\frac{a}{c},\quad a,b,c\in\{1,...,9\}. \qquad (1)$$

Hľadáme zlomky s uvedenou vlastnosťou

Rovnosť (1) môžeme pomocou rozvinutého zápisu v desiatkovej sústave zapísať v tvare

$$\frac{10a+b}{10b+c}=\frac{a}{c},$$

prípadne po úprave

$$9ac=b(10a-c). \qquad (2)$$

Vidíme, že ľavá strana rovnosti (2) je deliteľná číslom 9, takže číslom 9 musí byť deliteľná aj pravá strana tejto rovnosti. Pretože $b\in\{1,...,9\}$, hodnoty, ktoré môže nadobúdať b za predpokladu, že pravá strana rovnosti (2) je deliteľná číslom 9, určíme jednoducho.

Uvažujme najskôr prípad, keď číslica b nie je deliteľná deviatimi, t.j. $(9;b)=1$. Potom musí byť číslom 9 deliteľný druhý z činiteľov pravej strany rovnosti (2), teda $9\,|\,10a-c$. Pretože $10a-c=9a+(a-c)$, je zrejmé, že $9\,|\,a-c$. Keďže $a,c\in\{1,...,9\}$, tak $9\,|\,a-c$ iba za predpokladu, že $a-c=0$, t.j. $a=c$. Dosadením $a=c$ napr. do rovnosti (1) zistíme, že musí platiť $a=b=c$. Čiže ak $(9;b)=1$, v hľadaní zlomkov so stanovenou vlastnosťou sme veľmi nepokročili, keďže sme získali iba triviálny prípad.

Tentokrát uvažujme prípad, keď $(9;b) = 9$, čiže $b = 9$. Potom rovnosť (2) môžeme zjednodušiť na tvar $ac = 10a - c$, odkiaľ je zrejmé, že $a \mid c$. Ak $a \mid c$, tak rovnosť $ac = 10a - c$ môžeme upraviť napr. na tvar $10 = c + \frac{c}{a}$, odkiaľ dostávame dve možnosti pre hodnoty číslic *a*, *c*, a to $a = 1,\ c = 5$ alebo $a = 4,\ c = 8$.

Prípadne môžeme postupovať aj tak, že rovnosť $ac = 10a - c$ upravíme na tvar $(a + 1)(10 - c) = 10$. Uvážením hodnôt jednotlivých činiteľov poslednej rovnosti opäť dospejeme k záveru, že $a = 1,\ c = 5$ alebo $a = 4,\ c = 8$.

Čiže predpoklad $(9;b) = 9$ v rovnosti (2) vedie k identifikácii dvoch zlomkov, ktoré spĺňajú nami definované „krátenie zlomkov", a to $\frac{49}{98} = \frac{1}{2};\ \frac{19}{95} = \frac{1}{5}$.

Uvážme ešte poslednú možnosť hodnoty $(9;b)$, kde $b \in \{1, ..., 9\}$, ktorou je $(9;b) = 3$. V takom prípade $b = 3$ alebo $b = 6$.

Nech najskôr $b = 3$. Potom rovnosť (2) má tvar $9ac = 3(10a - c)$, resp. $3ac = 10a - c$. Pri určovaní hodnôt, ktoré môžu nadobúdať zvyšné číslice *a* a *c* môžeme využiť skutočnosť, že číslo 3 delí ľavú stranu poslednej rovnosti, teda musí deliť aj jej pravú stranu $10a - c = 9a + (a - c)$, čiže musí platiť, že $3 \mid a - c$; kde $a, c \in \{1, ..., 9\}$. Modifikáciu uvedeného postupu predstavuje úprava rovnosti $3ac = 10a - c$ do „vhodnejšieho tvaru", napr.

$$(3a + 1)(10 - 3c) = 10. \qquad (3)$$

Potom ak $3a + 1 = 10$ a súčasne $10 - 3c = 1$, tak $a = 3, c = 3$. V takom prípade opäť získavame iba triviálny prípad zlomku, ktorý hľadáme.

Pre zvyšné možné hodnoty činiteľov ľavej strany rovnosti (3) (t.j. $(3a + 1 = 5 \wedge 10 - 3c = 2)$; $(3a + 1 = 2 \wedge 10 - 3c = 5)$) nenadobúdajú *a* a *c* celočíselné hodnoty.

Napokon zostáva nájsť možné hodnoty číslic a, c za predpokladu, že $b = 6$. Analogicky ako v predchádzajúcom prípade môžeme rovnosť (2) upraviť na tvar $3ac = 2(10a - c)$, odkiaľ vyplýva, že $3 \mid 10a - c$, a teda $3 \mid a - c$.

Prípadne môžeme rovnosť $3ac = 2(10a - c)$ upraviť na tvar $(3a + 2)(20 - 3c) = 40$ a zvážiť celočíselné možnosti rozkladu čísla 40 na súčin. K netriviálnym riešeniam vedú dve možnosti ($(3a + 2 = 5 \wedge 20 - 3c = 8)$; $3a + 2 = 8 \wedge 20 - 3c = 5$).

Hodnota $b = 6$ vedie k dvom zlomkom stanovenej vlastnosti, a to $\frac{16}{64} = \frac{1}{4};\ \frac{26}{65} = \frac{2}{5}$.

Uvedeným postupom sme zistili, že existujú iba štyri zlomky s dvojciferným čitateľom aj menovateľom, pri ktorých nami uvedené nekorektné „krátenie zlomkov“ vedie k správnemu výsledku. Týmito zlomkami sú $\frac{49}{98}=\frac{1}{2}$, $\frac{19}{95}=\frac{1}{5}$, $\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$; $\frac{26}{65}=\frac{2}{5}$.

Možné zovšeobecnenie

Neviedol by k správnemu výsledku stanovený spôsob „krátenia zlomkov“ aj v prípade zlomkov s viacciferným čitateľom a menovateľom? Bude napríklad platiť

$\frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5}=\frac{1}{5}$, $\frac{1\cancel{99}}{\cancel{99}5}=\frac{1}{5}$, $\frac{1\cancel{999}}{\cancel{999}5}=\frac{1}{5}$..., $\frac{1\overbrace{99\ldots9}^{n-krát}}{\underbrace{99\ldots9}_{n-krát}5}=\frac{1}{5}$? O platnosti uvedenej hypotézy sa môžeme veľmi rýchlo presvedčiť napríklad naznačeným spôsobom, pri ktorom využívame vzťah pre súčet prvých n členov geometrickej postupnosti s kvocientom 10, t.j.

$$\frac{1\overbrace{99\ldots9}^{n-krát}}{\underbrace{99\ldots9}_{n-krát}5}=\frac{1\cdot10^n+9\cdot10^{n-1}+\ldots+9\cdot10^0}{9\cdot10^n+\ldots+9\cdot10^1+5\cdot10^0}=\frac{1\cdot10^n+9\cdot\frac{10^n-1}{9}}{9\cdot10\cdot\frac{10^n-1}{9}+5}=\frac{2\cdot10^n-1}{10\cdot10^n-5}=\frac{2\cdot10^n-1}{5(2\cdot10^n-1)}=\frac{1}{5}.$$

K naznačenému zovšeobecneniu môžeme pristúpiť aj v prípade zvyšných zo štyroch nájdených zlomkov, napríklad $\frac{1\overbrace{66\ldots6}^{n-krát}}{\underbrace{66\ldots6}_{n-krát}4}=\frac{\frac{1}{3}(5\cdot10^n-2)}{\frac{1}{3}(4(5\cdot10^n-2))}=\frac{1}{4}$, $\frac{2\overbrace{66\ldots6}^{n-krát}}{\underbrace{66\ldots6}_{n-krát}5}=\frac{\frac{2}{3}(4\cdot10^n-1)}{\frac{5}{3}(4\cdot10^n-1)}=\frac{2}{5}$.

Záver

Naznačený spôsob hľadania zlomkov so stanovenou vlastnosťou môže pre žiakov predstavovať príležitosť ku skúmaniu, pričom si vystačia s vedomosťami, nepresahujúcimi obsah stredoškolského učiva. V rámci argumentácie môžu využiť svoje vedomosti z deliteľnosti či úpravy algebraických výrazov, prípadne si môžu navrhnúť vlastný spôsob nekorektného „krátenia zlomkov“ či inej algebraickej manipulácie so zlomkami a hľadať zlomky, ktoré majú stanovenú vlastnosť.

LITERATÚRA

[1] S. Čeretková, O. Šedivý, I. Teplička: Matematika pre 7. ročník ZŠ, 2. časť, Bratislava, Slovenské pedagogické nakladateľstvo – Mladé letá, s.r.o., 2022, ISBN 9788010042289

[2] J. Polák: Přehled středoškolské matematiky, Praha, Státní pedagogické nakladatelství, 1983,

Mgr. Michaela Vargová, PhD.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského
Mlynská dolina F1
842 48 Bratislava
e-mail: michaela.vargova@fmph.uniba.sk

MATEMATIKA VČERA A DNES, ALEBO VYUČOVANIE MATEMATIKY NA STREDNÝCH ODBORNÝCH ŠKOLÁCH NETECHNICKÉHO TYPU

ZUZANA VÁŽNA, LENKA NAHLIKOVÁ

Článok pojednáva o procese výučby matematiky na stredných školách. Každá ľudská činnosť, ktorú človek vykonáva s istým zámerom, účelom a cieľom, úzko súvisí s prirodzenou potrebou hodnotenia. Výchovu a vzdelávanie chápeme ako jednu z ľudských činností smerujúcu k vopred stanovenému cieľu, preto musíme hľadať adekvátne postupy, stratégie, techniky a prostriedky na zistenie stavu dosiahnutia tohto cieľa. Hodnotenie patrí medzi dôležitú zložku práce učiteľa v triede.

Úvod

Učitelia matematiky vynakladajú snahu svoju výučbu koncipovať tak, aby sa u žiakov rozvíjalo konceptuálne porozumenie, schopnosť argumentovať a kriticky myslieť. Pre príležitosť rozvoja uvedených žiackych kompetencií aplikujú aj rôzne príklady. Matematické vzdelávanie v odbornom školstve popri funkcií všeobecného vzdelania plní aj v jednotlivých odboroch prípravnú funkciu pre odbornú zložku vzdelávania i uplatnenie v praxi. Tento vzdelávací program je aj pre skupinu odborov 64 Ekonomika a organizácia, obchod a služby.

Zameranie školy

Stredná odborná škola kaderníctva a vizážistky, Svätoplukova 2, v Bratislave, pripravuje a vychováva dievčatá aj chlapcov pre zaujímavé profesie podľa nových školských vzdelávacích programov, a to pre 4- ročný študijný odbor kozmetik, 4-ročný študijný odbor kaderník – vizážista, 3-ročný učebný odbor kaderník, manikér- pedikér, barbier, umelecký parochniar a maskér, taktiež ponúka 2-ročné nadstavbové štúdium v odboroch vlasová kozmetika a starostlivosť o ruky a nohy a 2-ročné pomaturitné kvalifikačné štúdium kozmetik a kaderník-vizážista.

Cieľom matematiky na stredných školách je komplexne rozvíjať osobnosť žiaka. Proces vzdelania smeruje k tomu, aby žiaci vedeli:

- používať matematiku vo svojom budúcom živote,
- čítať s porozumením súvislé texty obsahujúce čísla, závislosti a vzťahy a nesúvislé texty obsahujúce tabuľky, grafy a diagramy, pracovať s návodmi.

Ešte v školskom roku 2006/2007 bola týždenná hodinová dotácia pre študijné odbory 4,3,2,2, pre učebné odbory 2,2,1 a pre nadstavbové štúdium 2, 2 hodiny týždenne, plus cvičenia z matematiky. Práve študijné odbory a nadstavbové štúdium mali možnosť na výber aj maturitu z matematiky, jazyka alebo chémie. Ústna skúška pozostávala z 25 tém.

Od 1.09.2008 zavedením školského vzdelávacieho programu študijné odbory mali model 2,1,1,1. Učebné odbory mali model 1,1 a Nadstavbové štúdium 2,2 hodiny za týždeň. Od školského roka 2013/2014 študijné odbory prešli na model 1,1,1,1.

Žiaci učebného odboru sú na školu prijatí iba formou zápisu podľa výsledkov, ktoré dosiahli v 9. ročníku na základnej škole. Do učebného odboru prichádzajú žiaci hlavne kvôli odboru s možnosťou po skončení tretieho ročníka záverečnou skúškou pokračovať v nadstavbovom štúdiu. Žiaci študijných odborov sú prijatí na štúdium na základe výsledkov zo základných škôl a prijímacích skúšok z matematiky a slovenského jazyka a literatúry.

Zhodnotenie riešení z prijímacích pohovorov do študijného odboru

V prílohe č. 1 je ukážka testu z prijímacích pohovorov

1. V prvej úlohe, kde riešili jednoduchú lineárnu rovnicu niektorí žiaci urobili chybu hneď na začiatku pri roznásobovaní a tým pádom nedosiahli požadovaný výsledok. Ďalšou chybou boli znamienka. Väčšina žiakov nevedela správne dosadiť za premennú x a urobiť skúšku správnosti.
2. V druhej úlohe si väčšina žiakov pomýlila obsah so stranou štvorca. Tu bolo vidno, že úlohy nečítajú s porozumením a neuvedomili si, že je zadaný obsah.
3. Pri riešení tretej úlohy si niektorý žiaci neuvedomili pojem rôzne dvojice, písmená sa neopakujú.
4. Túto úlohu väčšina zvládla, no našli sa žiaci, ktorí zle odčítali z grafu.
5. Pri riešení tejto úlohy najčastejšie chyby boli hlavne v znamienkach a v zlomkoch. Bolo vidno že žiaci neovládajú pojem zlomok, základné úpravy.
6. Vo úlohe niektorí žiaci namiesto počítania prepony počítali odvesnu, nevedeli správne umocniť a tým pádom nedosiahli požadovaný výsledok.
7. Zadanú úlohu väčšina žiakov nezvládla, čo znamená, že si nepamätali pravidlá pre počítanie s uhlami.
8. V úlohe číslo 8 bol najväčším problémom pre žiakov určiť interval, žiaci nemali správne precvičené riešenie nerovníc a teda nevedeli ani správne vyriešiť úlohu.
9. Túto úlohu väčšina zvládla, no našli sa aj žiaci, ktorým robia neovládajú pojmy „zlomok rozšíriť" alebo „zlomok vykrátiť".
10. Túto úlohu väčšina zvládla, no našli sa žiaci, ktorí uvádzali podstavu v tvare **obdĺžnika**. Išlo predovšetkým o žiakov s poruchami učenia.

Pri opravovaní prijímacích skúšok sme mali možnosť prísť k záveru, že žiaci, ktorí prichádzajú študovať odbory zamerané na starostlivosť o ľudské telo, nemajú záujem o matematiku a neprevláda záujem v napredovaní a nadobúdaní nových znalostí v oblasti matematiky ako vyučovacieho predmetu. Bolo možné pozorovať, že žiaci niektoré úlohy riešili podľa naučených postupov a nie na základe logickej úvahy, a tým pádom nebolo možné, aby dosiahli požadované výsledky. Taktiež mnohí uchádzači neovládali základný aparát napríklad na výpočet zlomkov, iní si neprečítali zadanie s porozumením a taktiež prevládali numerické chyby vo výpočtoch.

Vzdelávací obsah predmetu matematika na SOŠ

Vzdelávací obsah predmetu v študijných odboroch SOŠ (v učebných odboroch je vynechaný celok Logika, dôvodenie, dôkazy) je rozdelený do piatich (do štyroch) tematických celkov:

- ***Čísla, premenná a počtové výkony s číslami***
- ***Vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy***
- ***Geometria a meranie***
- ***Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika***

- ***Logika, dôvodenie, dôkazy***

Väčšina žiakov prichádza do učebných odborov zo základných škôl s veľmi slabými výsledkami a preto je snahou na hodinách pristupovať ku každému individuálne. Úlohy v učebných odboroch prispôsobujeme tak, aby najslabší žiak ovládal riešiť samostatne niektoré úlohy. Na hodinách je väčšina žiakov pasívna, nepýtajú sa, iba odpisujú (ak odpisujú) z tabule.

V študijných odboroch sa takisto snažíme na hodinách matematiky pri jednohodinovej dotácii pracovať so žiakmi tak, aby predpísané učivo zvládli čo najlepšie, nakoľko väčšina žiakov prichádza zo základných škôl s priemernými výsledkami. Samozrejme nájdu sa aj veľmi šikovní žiaci, ktorým sa snažíme dávať aj ťažšie príklady ako počítame na hodinách. Na hodinách žiakom vysvetľujeme postup riešení jednotlivých úloh, príkladov. Niektorí sa aktívne zapájajú, snažia sa pýtať na postup. Úlohy vyberáme tak, aby pre žiakov boli aj prínosom pre ich profesiu. Pri riešení slovných úloh vyberáme úlohy so zameraním na finančnú matematiku. Pri tematickom celku geometria a meranie sa snažíme vyberať úlohy z reálneho života, hlavne pri telesách.

Príklad z praxe: Koľko kusov obkladačiek s rozmerom 10cm krát 20cm potrebujeme na úplné obloženie steny v kaderníckom salóne, ak stena, ktorú ideme obkladať má tvar štvorca a výška miestnosti je 3m ?

Výpočet:

S_s – povrch steny; S_o – povrch obkladačky; P - počet kusov obkladačiek

a = 3m; b = 10cm; c = 20 cm

$S_s = a.a = a^2$	$S_s = 3m\ .\ 3m = 9m^2 \quad S_s = 90\ 000\ cm^2$
$S_o = b.c$	$S_o = 10cm\ .\ 20cm = 200cm^2$
$P = S_s : S_o$	$P = 90\ 000cm^2 : 200cm^2 = 450$

Odpoveď: Na obloženie steny v kaderníckom salóne potrebujeme 450 kusov obkladačiek.

Formatívne hodnotenie

Minulý školský rok bol v niektorých triedach robený experiment v rámci záverečnej práce rozširujúceho štúdia a to konkrétne v tematických celkoch lineárne rovnice, nerovnice, kvadratické rovnice a nerovnice, pri ktorom bolo aplikované formatívne hodnotenie. Žiakom veľmi pomáhala pri napredovaní spätná väzba, ktorú dostával každý žiak buď písomne alebo slovne. Práve po spätnej väzbe presne vedeli kde robia chyby a majú ďalej napredovať. So žiakmi som robila v rámci experimentu aj rovesnícke hodnotenie. Účelom rovesníckeho hodnotenia bolo ukázať žiakom, čo vedia, čo dokážu, kam smerujú a ako sa tam dostať. Na druhej strane, výzvy, ktoré žiaci dostanú od svojich rovesníkov si vedia dôkladnejšie osvojiť, stotožniť sa s nimi, a teda sa viac snažia ich postupom času i naplniť. Pri rovesníckom učení sa môžu žiaci učiť od seba navzájom, preto sa čoraz viac využíva v praxi. Žiaci lepšie prijímali hodnotenie od skupiny spolužiakov ako od vyučujúceho a oceňujú aj hodnotenie hovorené ich jazykom.

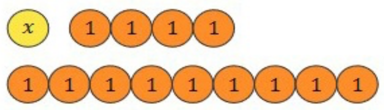
Miskoncepcie v matematike môžu vzniknúť z rôznych dôvodov, vrátane nesprávneho porozumenia konceptov, chýbajúcej informovanosti, nesprávnych predpokladov alebo zlých interpretácií matematických vzorcov. Tu sú niektoré časté miskoncepcie v matematike a spôsoby, ako im predchádzať a opraviť ich:

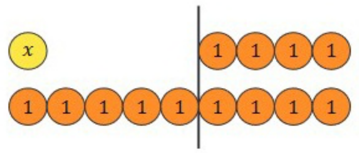
1. **Zlé porozumenie algebraických výrazov:** Niektorí žiaci môžu mať problémy s porozumením algebraických výrazov, čo vedie k zlej interpretácii rovníc a nerovníc. Dôležité je venovať pozornosť symbolom a ich významu.
2. **Chybné porozumenie zlomkov:** Mnohí žiaci majú problémy s pochopením zlomkov, najmä keď ide o ich násobenie, delenie, alebo porovnávanie. Preto je dôležité presne pochopiť, ako s nimi pracovať.
3. **Zamieňanie úmernosti a lineárnej závislosti:** Niektorí žiaci môžu mať problémy s rozlíšením medzi úmernosťou a lineárnou závislosťou. Je dôležité vedieť, kedy ide o jednoduchú úmernosť a kedy ide o lineárnu závislosť.

V prílohe č.2 je ukážka písomnej práce, kde vidieť chyby pri úprave rovnice. Žiak robil numerické chyby pri roznásobovaní zátvoriek. Po napísaní testu žiak dostal spätnú väzbu, kde robil chyby, aby následne mohol napredovať správnym postupom a dával si práve pozor na numerické chyby.

Niektoré žiačky boli v riešení rovníc a nerovníc neúspešné. Dôvodom boli už problémy s porozumením viacerých konceptov učiva matematiky zo základnej školy. S cieľom podporiť porozumenie pojmu neznámej sme volili metódu vizuálnej reprezentácie **(v prílohe č.3 je ukážka žiackej práce).**

Uvažujme napríklad jednoduchú rovnicu $x + 4 = 9$. Skôr ako prejdeme k zložitejším rovniciam, je vhodné poznamenať, že máme k dispozícii konkrétnu reprezentáciu, ktorá môže podporiť riešenie rovníc – žetóny





Teraz je na rade otázka: "Za koľko jednotkových žetónov musíme zameniť žltý („x-ový“) žetón, aby žetóny v oboch riadkoch predstavovali rovnakú hodnotu (aby sa hodnota v oboch riadkoch rovnala)? Potom môžeme proces riešenia modelovať nasledovne: Štyri „jednotkové žetóny“ z horného riadku možno „spárovať“ so štyrmi jednotkovými žetónmi v dolnom riadku a tie potom zahodiť (je to podobné kroku "odčítanie čísla 4 z oboch strán" pri riešení rovníc). Takto zostane jeden žetón x v jednom riadku a 5 jednotkových žetónov v druhom riadku, čo znamená, že $x = 5$

Záver

Cieľom práce bolo sledovať a podporovať postupný rozvoj žiakov vo vzťahu k daným úlohám a obsahom. Zamerali sme na zhromažďovanie informácií o tom, ako sa žiaci učia, či učivu porozumeli a či sa potrebujú v danej téme ešte zlepšiť. Formatívne hodnotenie je dynamické a ako pedagógom, tak i žiakom dovoľuje reagovať na aktuálny stav učenia a učebné potreby. Práve pri uzatváraní známok bol zaznamenaný viditeľný pokrok , keďže sa väčšina žiakov zlepšila v hodnotení v porovnaní s prvým polrokom.

LITERATÚRA

[1] Mattock, P. (2019). Visible Maths, British Library Cataloguing-in-Publication Data, ISBN 978-178583350-2, s. 255-258

[2] BICER, Ali; Capraro, Robert and Capraro, Mary (2014). Pre-service Teachers' Linear and Quadratic Inequalities Understandings. International Journal for Mathematics Teaching and Learning. http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/default.htm

[3] DUBINSKY E and McDonald M A 2000 APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research (USA: Georgia State University) pp 1–14

[4] FISHER, R., Učíme děti myslet a učit se. Praha: Portál, 1997

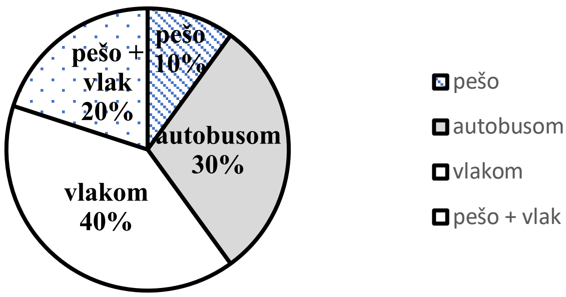
Príloha č.1: Ukážka príkladov z prijímacích pohovorov

1. Vyriešte rovnicu a urobte skúšku správnosti: $6x - 24 = 3.(x - 4)$
2. O koľko dm je dlhšia strana väčšieho štvorca ak viete ich obsah?

$100dm^2$ $\quad$ $8100cm^2$

3. Máme 6 písmen – A,B,C,D,E,F. Koľko rôznych dvojíc môžete vytvoriť, ak sa písmená neopakujú?

4. Do školy chodí 400 žiakov. Vypočítajte koľko žiakov chodí do školy vlakom.

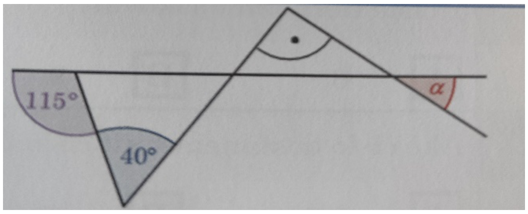


5. Vypočítajte a zlomok uveďte na základný tvar:

a) $(-6).(-5) - 3^2.(-2)^3 =$ $\qquad$ b) $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right):\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) =$

6. Vypočítajte preponu pravouhlého trojuholníka ak odvesny merajú 3cm a 4cm.

7. Určte veľkosť uhla α na obrázku.



a) $15°$ b) $25°$ c) $30°$ d) $45°$

8. Vyberte správne tvrdenie o nerovnici $3x \geq 12$

a) $x \in (-\infty; 4>$ b) $x \in (-\infty; -4>$ c) $x \in (4; \infty)$ d) $x \in <4; \infty)$

9. Namiesto hviezdičky doplňte číslo tak, aby platila rovnosť $\frac{3}{7} = \frac{*}{28}$

a) 4 b) 12 c) 7 d) 3

10. Kocka má podstavu v tvare:

a) štvorca b) lichobežníka c) obdĺžnika d) kosoštvorca

Príloha č.2 - ukážka žiackej práce

1\. a) $3.(x-2)+1=2x-1$

$3x-6+1=2x-1$

$3x-2x=6+1-1$

$1x=6$

numerické chyby, chýba K

b) $3.(2x-1)-5.(x-3)+6.(3x-4)=83$

$6x-3-5x+15+18-2=83$

$6x-5x-3+15+18-2=83$

$1x=28$

numerické chyby na znamienka

2\. a) $1-2\cdot(x-3)=-3-1\cdot(x-5)$

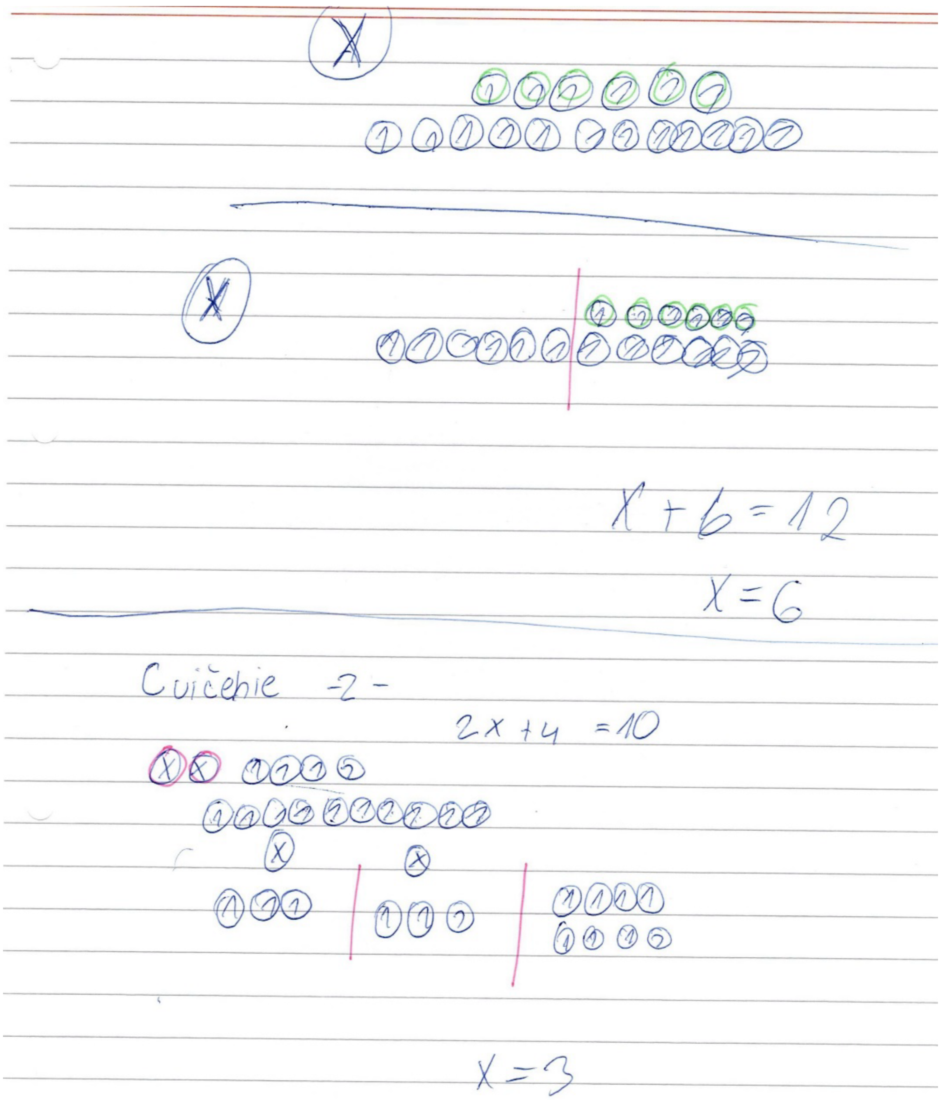
$1-2x-1=-3-1x+5$

$-2x-1x=1-1-3+5$

$-3x=2$

numerické chyby na znamienka.

Príloha č.3 - ukážka žiackej práce



Dva dni s didaktikou matematiky 2023. Zborník príspevkov.

Editor:	Mária Slavíčková
Počet strán:	119
Vydala:	Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzita Komenského v Bratislave
Miesto vydania:	Bratislava
Rok vydania:	2023

Táto publikácia neprešla jazykovou úpravou. Príspevky neboli recenzované. Za obsahovú náplň príspevkov a ich jazykovú stránku zodpovedajú autori.

ISBN 978-80-8147-135-3